جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر
مبادئ الرياضيات (2)

أ. الطاهر إبراهيم

المحاضرة الحادية عشرة
الجزء الاول

مشتقة الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال الاسية:

إذا كانت $y = e^x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = e^u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = e^u . \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = e^{x^2+2x+1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x+1}.(2x+2)$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة:

إذا كانت $y = b^x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = b^x . \ln b$$

وبشكل عام إذا كانت $y = b^u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = b^u . \ln b . \frac{du}{dx}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = 3^x$
2. $y = 9^{2x^2}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$

2. $\frac{dy}{dx} = 9^{2x^2}.\ln 9 .(4x)$

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

إذا كانت $y = \ln x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \ln u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = \ln(1+x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \times 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة:

إذا كانت $y = \log_b x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln b}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \log_b u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{du}{dx}$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \log_2 4x$
2. $y = \log_2 (1+x^2)$

الحل:

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}$$
2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \times 2x \times \frac{1}{\ln 2} = \frac{2x}{(1+x^2)\ln 2}$$

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال المثلثية:

1. إذا كانت $y = \sin x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \sin u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \,.\, \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \times 4 = 4\cos 4x$$

تابع: الاشتقاق:

2. إذا كانت $y = \cos x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \cos u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \,.\, \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x \times 5 = -5\cos 5x$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \cos^2 x$
2. $y = \sin x \cos x$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 2\cos x \,.\, (-\sin x) = -2\cos x \sin x$
2. $y = \sin x \times -\sin x + \cos x \times \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x$

تابع: الاشتقاق:

جدول مشتقات بقية الدوال المثلثية:

3. $$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u . \frac{du}{dx}$$

4. $$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u . \tan u . \frac{du}{dx}$$

5. $$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u . \cot u . \frac{du}{dx}$$

6. $$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u . \frac{du}{dx}$$

حيث $u = f(x)$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ الدوال الآتية :

1. $y = \tan^2 x$
2. $y = \cot^3(2x+1)$
3. $y = \sec(x+1)$
4. $y = \csc 2x$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

1. $$\frac{dy}{dx} = 2\tan x \ \sec^2 x$$

2. $$\frac{dy}{dx} = 3\cot^2(2x+1).\left[-\csc^2(2x+1)\right](2)$$

$$= -6\cot^2(2x+1).\csc^2(2x+1)$$

تابع: الاشتقاق:

3. $$\frac{dy}{dx} = \sec(x+1).\tan(x+1).(1)$$

$$= \sec(x+1)\tan(x+1)$$

4. $$\frac{dy}{dx} = -\csc 2x.\cot 2x.(2)$$

$$= -2\csc 2x \cot 2x$$

تابع: الاشتقاق:

الاشتقاق الضمني:

لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية(غير صريحة) نعتبر y دالة لـ x ونطبق قواعد الاشتقاق المناسبة.

ملاحظة:

عندما نفاضل أي حد يحتوي على y نضرب ناتج التفاضل في $\frac{dy}{dx}$ ثم نجمع الحدود المحتوية على $\frac{dy}{dx}$ في طرف ، وننقل الحدود الاخرى في الطرف الثاني.

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $y^2 + x^2 = 9$
2. $y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3 = 9$
3. $x^2 y + 3xy^3 = x + 3$

1. $$\frac{d}{dx}(y^2 + x^2) = \frac{d}{dx}(9)$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

2. $$\frac{d}{dx}(y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3) = \frac{d}{dx}(9)$$

$$2y.\frac{dy}{dx} + 2x + 9x^2 + 12y^2.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + 12y^2) = -2x - 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 9x^2}{2y + 12y^2}$$

3. $$\frac{d}{dx}(x^2y+3xy^3)=\frac{d}{dx}(x+3)$$

$$x^2.\frac{dy}{dx}+y.2x+3\left[x.3y^2.\frac{dy}{dx}+y^3.1\right]=1+0$$

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy+9xy^2\frac{dy}{dx}+3y^3=1$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x^2+9xy^2\right)=1-2xy-3y^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2xy-3y^3}{x^2+9xy^2}$$

تابع: الاشتقاق:

الاشتقاق الجزئي:

إذا كانت لدينا الدالة $z = f(x, y)$ دالة متغيرين ، اذا ابقينا y ثابتاً فان z دالة في x فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى x وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial x}$

وبنفس الطريقة إذا أبقينا x ثابتاً فان z دالة في y فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى y وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى y ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial y}$

تابع: الاشتقاق:

مثال:

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $z = xy + x^2y + y^2x$

2. $z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

1. $$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2xy + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$$

2. $$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 12y$$

تمارين

1. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = e^{x^2 - 2x}$

ii. $y = (2x + 3)e^{-2x}$

iii. $y = e^{\cos x}$

iv. $y = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-3x}\right)$

تمارين

v. $y = \log_2 3x$

vi. $y = 7^{x^3}$

vii. $y = \ln(\sin x)$

viii. $y = x^2 e^{2x}$

ix. $y = e^{2x} \cos 3x$

تمارين

2. أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

i. $9x^2+4y^2=40$

ii. $y^4+3y-4x^3=5x+1$

iii. $4xy^3-x^2y+x^3-5x+6=0$

iv. $5x^2+2x^2y+y^2=8$

تمارين

v. $y = x^2 \sin x$

vi. $y^2 = x \cos y$

3. إذا كانت $y^2 - 4x^2 = 5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ و $y = 3$

4. إذا كانت $xy^2 + 3y = 27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 2$ و $y = 3$

تمارين

5. أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كانت :

i. $z = x^3 - 2xy + y^3$

ii. $z = 5y^3 + xy - 7y^2$

iii. $z = xy - \ln xy$

iv. $z = x \ln y + y \ln x - xe^{xy}$

تمت بحمد الله