المحاضرة السادسة عشر - الأسبوع التاسع

الفصل الخامس : التقدير

نظرية (٣) : اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للوسط M هي :

$$\left(\bar{X} - t\left[1-\alpha/2, n-1\right]\frac{S}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{X} + t\left[1-\alpha/2, n-1\right]\frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

حيث S : الانحراف المعياري للعينة .

مثال :- اخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي فاعطت $\bar{X} = 17.4$ ، $S = 2.1$. اوجد فترة 95% ثقة للوسط الحسابي M ؟

الحل :- نقوم بعملية تحويل

$$1-\alpha = 95\%$$
$$\alpha = 5\%$$
$$\alpha/2 = 2.5\%$$
$$1-\alpha/2 = 97.5\% = 0.975 .$$

$$\left(17.4 - t\left[0.975, 14\right] \times \frac{2.1}{\sqrt{15}} \; , \; 17.4 + t\left[0.975, 14\right] \times \frac{2.1}{\sqrt{15}}\right)$$

t من جدول توزيع t

$$\left(17.4 - 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}} \; , \; 17.4 + 2145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}}\right)$$

$$(16.24 \quad \text{و} \quad 18.56)$$

فترة ثقة للوسط الحسابي للمجتمع 95%

بإمكاننا استخدام الأسلوب السابق بناء فترات ثقة للفرق الحسابي لأكثر من مجتمع وذلك بالاستعانة بالنظرية التالية:

نظرية (4): (فترات الثقة للفرق بين وسطين)

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وكانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول، بحيث كانت σ_1^2، σ_2^2 معلومتين فإن فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ هي:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \;,\; (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

مثال:- أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, 25)$ و $N(\mu_2, 40)$ مستقل عن الأول، فإذا أعطى العينة الأولى وسطا حسابيا = 32، بينما أعطى العينة الثانية وسطا حسابيا = 47 أوجد:-

أ) فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$؟

ب) فترة ثقة 95% " " " $(\mu_2 - \mu_1)$؟

الحل:- المعطيات

المجتمع الأول	المجتمع الثاني
$\sigma_1^2 = 25$	$\sigma_1^2 = 40$
$n_1 = 9$	$n_2 = 10$
$\bar{X} = 32$	$\bar{Y} = 47$

الحلول :-

أ) فترة 95% ثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ ؟

$1-\alpha = 95\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 97.5\%$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن :-

$$\left[(32-47) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}} \;,\; (32-47) + Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}\right]$$

$Z_{0.975}$ ⇓ من جدول التوزيع الطبيعي

$$\left(-15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4} \;,\; -15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4}\right)$$

$$(-20.1 \;,\; -9.9)$$

$\bar{X} - \bar{Y} = 32 - 47 = -15$ نقطة تقع داخل الفترة

ب) فترة ثقة 90% للفرق $\mu_2 - \mu_1$ ؟

$1-\alpha = 90\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 95\%$

وبتطبيق النظرية نحصل على :-

$$\left[(47-32) - Z_{0.95} \times \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}} \;,\; (47-32) + Z_{0.95}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}\right]$$

⇓

$$\left(15 - 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4} \;,\; 15 + 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4}\right)$$

$$(10.73 \;,\; 19.27).$$

$\bar{Y} - \bar{X} = 15$

وبتعويض نصائح الفترة ، نجد أن :-

$$\left(0.15 - \underbrace{Z_{0.975}}_{\text{من جدول التوزيع الطبيعي}} \times \sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{100}} \;,\; 0.15 + Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{100}}\right)$$

$$\left(0.15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}} \;,\; 0.15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}}\right)$$

$$(0.08 \;,\; 0.22).$$

$\bar{P} = 0.15$ ← يجب أن تقع داخل هذه الفترة

نظرية (6) :- إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع برنولي $b(1, P_1)$ وكانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع برنولي $b(1, P_2)$، فإن فترة ~~الثقة~~ $100(1-\alpha)\%$ ثقة للفرق بين النسبتين $(P_1 - P_2)$ هي :-

$$\left[(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1} + \frac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}} \;,\; (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1} + \frac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}}\right]$$

2 تقدير لنسبة :-

اذ تقدير النسبة لفترة هو عبارة عن ايجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع P ثم ايجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لايجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معين لحصر نسبة النجاح P بداخلها ، والنظرية التالية توضح ذلك .

نظرية (5) : اذا كان $\bar{P} = X/n$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n بحيث n كبيراً ، فإن فترة $100(1-\alpha)100$ ثقة التقريبية لنسبة النجاح P هي :-

$$\left(\bar{P} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} \; , \; \bar{P} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} \right)$$

مثال :- لايجاد فترة 95% ثقة لنسبة عدد الطلاب احد المدارس الثانوية الذين لديهم ضعف في البصر ، اخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد ان 15 لديهم ضعف في البصر كانه 15 طالباً . اوجد فترة الثقة المطلوبة ؟

الحل :- $1-\alpha = 95\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 97.5\%$

وايضاً يجب ايجاد $\bar{P}$:- (التقدير النقطي لنسبة النجاح للعينة)

$$\bar{P} = \frac{15}{100} = 0.15$$

مثال :- اخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب من المدرسة (أ) وجد أن 27 طالباً لديهم نظارات في الأسنان، ثم اخذت عينة عشوائية اخرى من المدرسة (ب) وجد أن 12 طالباً لديهم نظارات في الأسنان. اوجد فترة 95% ثقة للفرق بين $(P_1 \text{ و } P_2)$ ؟

الحل :- $(P_1 - P_2)$ $1-\alpha = 95\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 97.5\%$

$$\overline{P_1} = \frac{27}{100} = 0.27 \qquad \overline{P_2} = \frac{12}{80} = 0.15$$

حيث نظرية النهاية نجد أن :-

$$\left[(0.27-0.15) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100} + \frac{0.15(0.85)}{80}}\right.$$

$$\left. (0.27-0.15) + Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100} + \frac{0.15(0.85)}{80}}\right]$$

$Z_{0.975} \Downarrow 1.96$

$$(0.003 \ , 0.237)$$

$$\overline{P_1} - \overline{P_2} = 0.27 - 0.15 = 0.12$$

نهاية المحاضرة الثانية من الأسبوع التاسع