

# المحاضرة الأولى

## المجموعات



## تعريف المجموعة:

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً. وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء آخر.

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

*A, B, C, ...*

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

*a, b, c, ...*



## تابع : تعريف المجموعة:

يستخدم الرمز  $\in$  "ينتمي إلى" ليعين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر  $a$  من ضمن عناصر المجموعة  $A$  فإننا نقول أن  $a$  ينتمي إلى المجموعة  $A$  ويكتب بالصورة  $a \in A$

أما إذا كان  $a$  ليس عنصراً من عناصر المجموعة  $A$  فإننا نقول أن  $a$  لا ينتمي إلى المجموعة  $A$  ويكتب بالصورة  $a \notin A$

**ملاحظة :** تعد دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة في دراسة العلاقات والدوال.



## طرق كتابة المجموعات:

### • طريقة العد (سرد العناصر):

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , "،  
مثل:

$$A = \{1,3,5,7\}$$

$$B = \{a,b,c,d\}$$

$$C = \{1,2,3,\dots\}$$

بحيث لا يتم تكرار العناصر



## تابع: طرق كتابة المجموعات:

### • طريقة القاعدة (الصفة المميزة):

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة، فمثلاً:

$$A = \{x : x \text{ عدد طبيعي زوجي}\}$$

$$B = \{x : x \text{ كلية بجامعة الملك فيصل}\}$$

$$C = \{x : x \text{ طالب مسجل بالمقرر الحالي}\}$$

$$D = \{x : x \text{ عدد حقيقي، } -3 \leq x \leq 1\}$$

$$X = \{x : x \text{ عدد صحيح، } 0 \leq x \leq 12\}$$



## أنواع المجموعات:

### • المجموعة الخالية:

هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز  $\Phi$  أو  $\{ \}$ .  
أمثلة:

$$A = \{x : x^2 + 1 = 0, \text{ عدد حقيقي}\}$$

$$B = \{x : \text{ عدد طبيعي زوجي وفردى}\}$$

$$C = \{x : \text{ دولة عربية تقع في أوروبا}\}$$



## تابع: أنواع المجموعات:

### • المجموعة المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

**مثال:** المجموعات التالية مجموعات منتهية

$$A = \{2,4,6,8\}$$

$$B = \{1,2,3,\dots,100\}$$

$$C = \{x, y, z, w, u\}$$



## تابع: أنواع المجموعات:

### • المجموعة غير المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.  
**مثال:** المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

$$A = \{x : \text{عدد طبيعي فردي}\}$$

$$B = \{10, 20, 30, \dots\}$$

$$C = \{x \in R : 0 \leq x \leq 10\}$$





## تابع: أنواع المجموعات:

### • المجموعة الكلية:

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية منها، ويرمز لها بالرمز  $U$ .

### • المجموعة الجزئية:

تكون المجموعة  $A$  جزئية من المجموعة  $B$  إذا كانت جميع عناصر  $A$  موجودة في  $B$  وتكتب على الصورة  $A \subset B$



## تابع: أنواع المجموعات:

أمثلة:

1. إذا كانت  $A = \{2,4,6\}$  و  $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$  فان  $A \subset B$

2. مجموعة جميع طلاب التعليم الإلكتروني بجامعة الملك فيصل  
مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.



## تابع: أنواع المجموعات:

### • تساوي المجموعات:

تكون المجموعتان  $A$ ،  $B$  متساويتان إذا كانت

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة  $A \equiv B$



## تابع: أنواع المجموعات:

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

$$1 - A = \{1,3,5,7\} , B = \{3,1,5,7\}$$

$$2 - A = \{0,1,2\} , B = \{a,b,c\}$$

الحل:

$$1) A = B$$

$$2) A \equiv B$$



## العمليات على المجموعات:

### • الاتحاد

اتحاد المجموعتين  $A$ ،  $(A \cup B)B$  هو مجموعة كل العناصر الموجودة في  $A$  أو في  $B$  أو في كليهما. أي أن  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

مثال: إذا كان  $A = \{1,2,3,5,7\}$  و  $B = \{2,4,6,8\}$  أوجد  $A \cup B$

الحل:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$



## تابع : العمليات على المجموعات:

### • التقاطع

تقاطع المجموعتين  $A$ ،  $B$  هو مجموعة كل العناصر الموجودة في  $A$  و في  $B$  معاً. أي العناصر المشتركة بين  $A$  و  $B$ . أي أن

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

مثال: اذا كان  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  و  $B = \{0, 2, 4, 6\}$  أوجد  $A \cap B$   
الحل:

$$A \cap B = \{0, 2\}$$



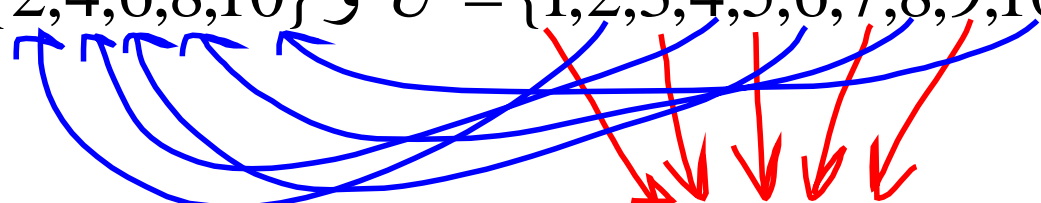
## تابع : العمليات على المجموعات:

### • المكمل أو المتممة:

يقال أن  $\bar{A}$  مكمل المجموعة  $A$  إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية  $U$  باستثناء عناصر  $A$ . أي أن  $\bar{A} = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$

مثال: إذا كان  $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$  و  $A = \{2,4,6,8,10\}$  أوجد  $\bar{A}$

الحل:


$$\bar{A} = \{1,3,5,7,9\}$$



## • الفرق

إذا كانت مجموعتان  $A$ ،  $B$  فإن  $A-B$  يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة في  $A$  وليست في  $B$ . أي أن:

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

مثال: إذا كانت  $A = \{1, 2, 3, x, y\}$  و  $B = \{3, 4, 5, x, w\}$

فإن  $A - B = \{1, 2, y\}$





## تابع: العمليات على المجموعات:

مثال:

إذا كانت  $A = \{1, 2, 3, x, y\}$  و  $B = \{3, 4, 5, x, w\}$   
وكانت المجموعة الكلية  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, w, x, y, z\}$   
فأوجد:

- 1)  $A \cup B$
- 2)  $A \cap B$
- 3)  $B - A$
- 4)  $\bar{A}$
- 5)  $\bar{B}$



## تابع: العمليات على المجموعات:

### الحل:

$$1) \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$$

$$2) \quad A \cap B = \{3, x\}$$

$$3) \quad B - A = \{4, 5, w\}$$

$$4) \quad \overline{A} = \{4, 5, w, z\}$$

$$5) \quad \overline{B} = \{1, 2, y, z\}$$



# المحاضرة الثانية

## المجموعات - تكملة

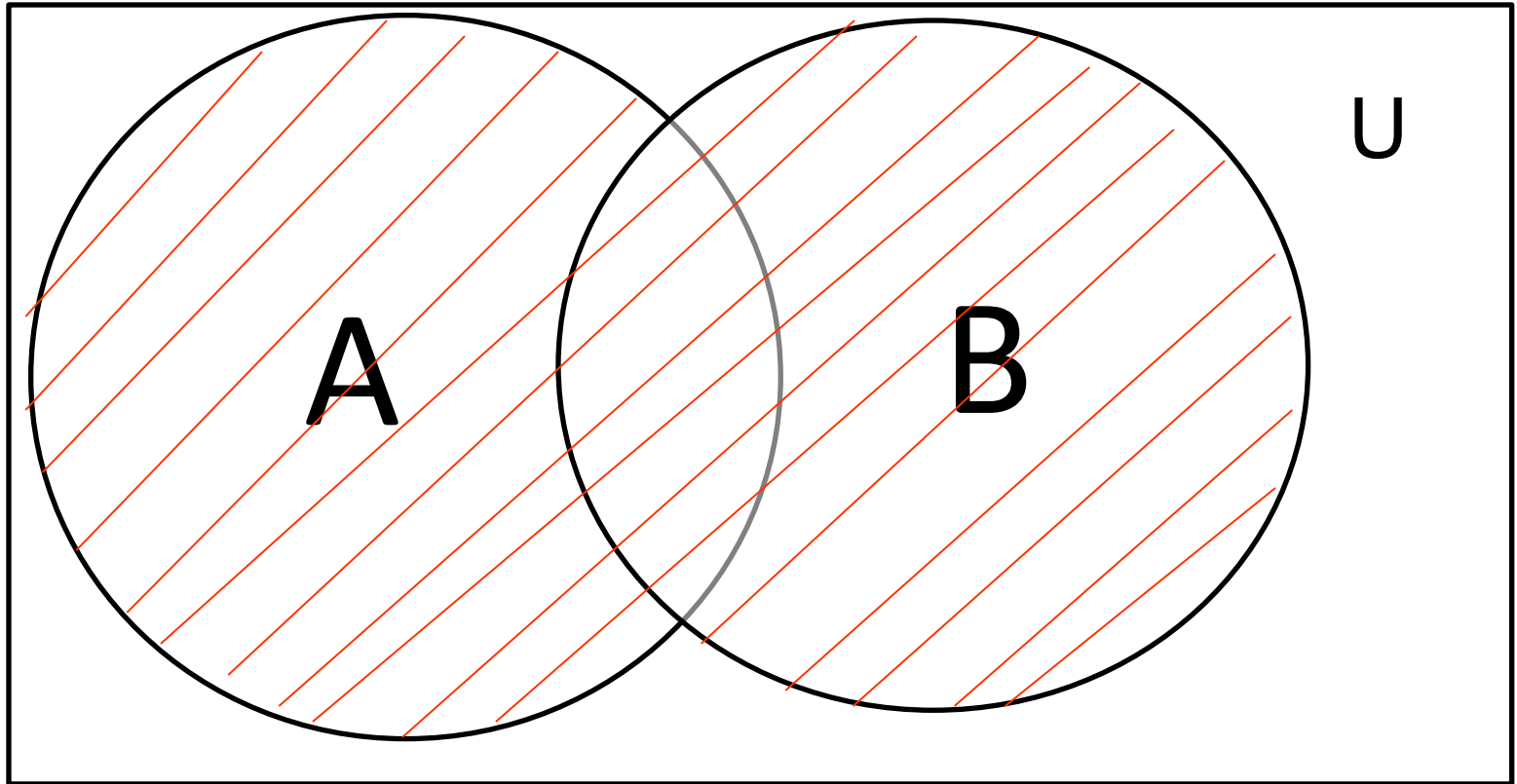


## أشكال فين:

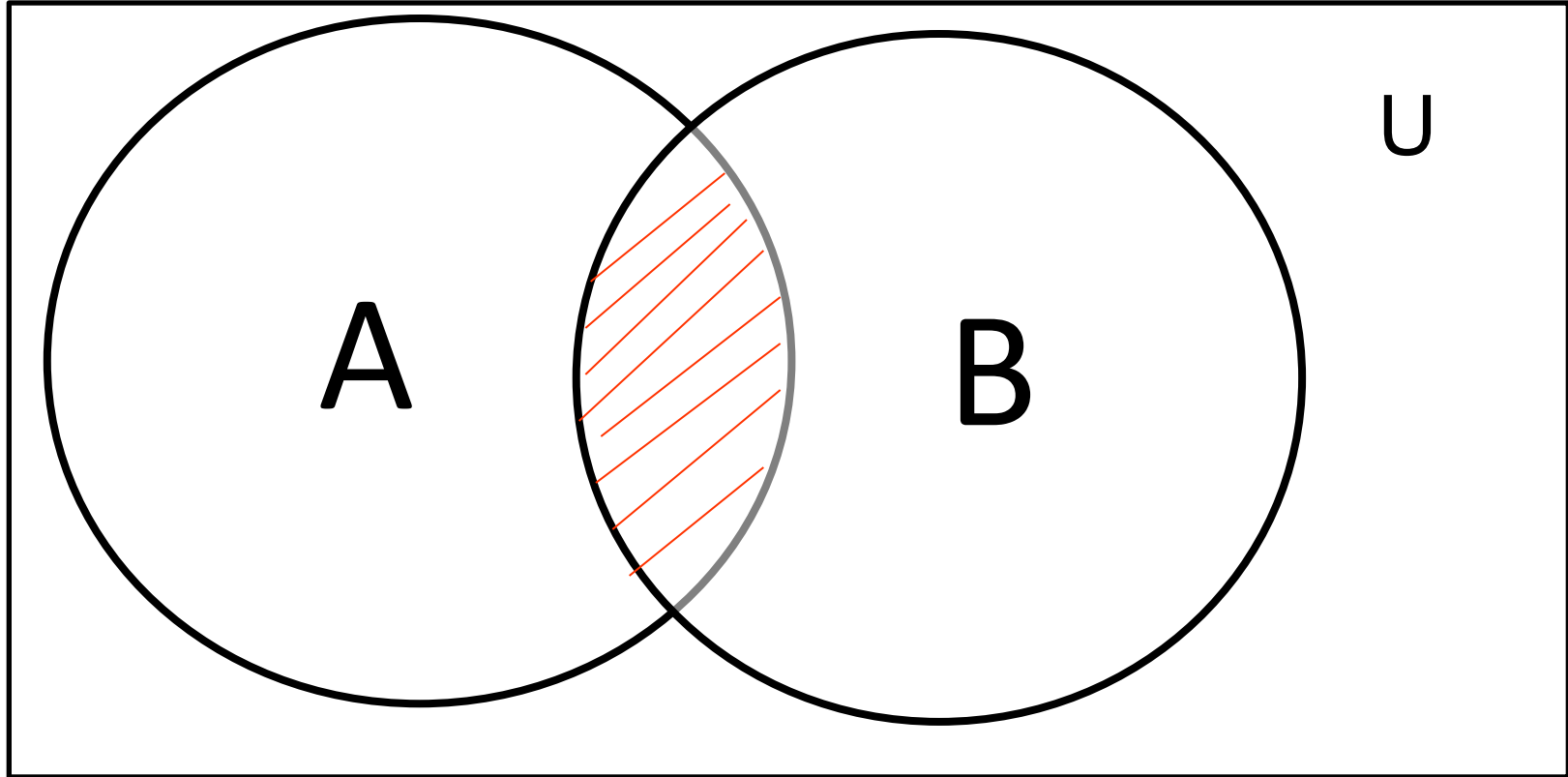
يمكن استخدام الأشكال الهندسية لتمثيل المجموعات والعمليات عليها، حيث يتم تمثيل المجموعة الكلية U بمستطيل ومن ثم أي مجموعة جزئية منها بشكل هندسي كالدائرة مثلاً، يرسم داخل المستطيل ، وتستخدم هذه الأشكال لتوضيح العمليات التي نجريها على المجموعات مثل الاتحاد ، التقاطع والمكملة والفرق وغيرها. كما في الأمثلة التالية:



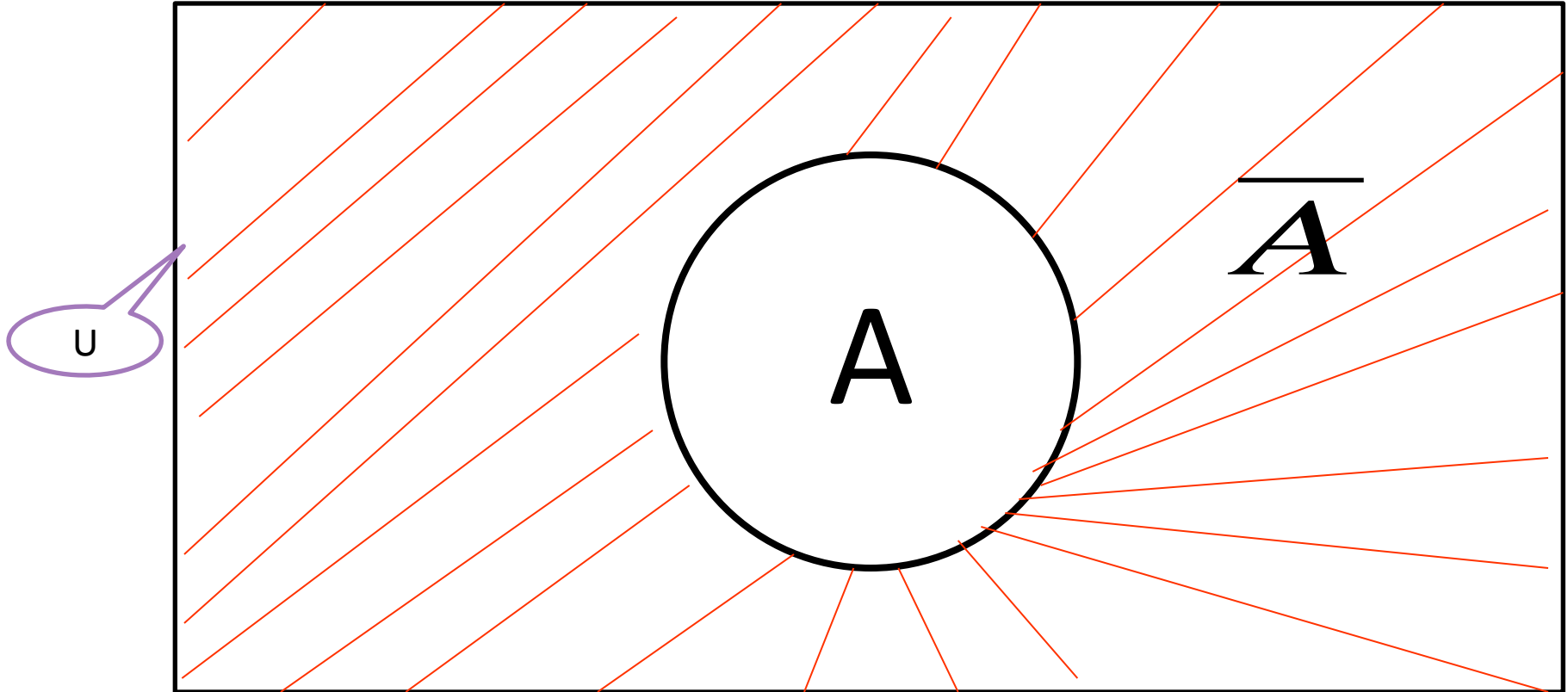
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل اتحاد مجموعتين A و B



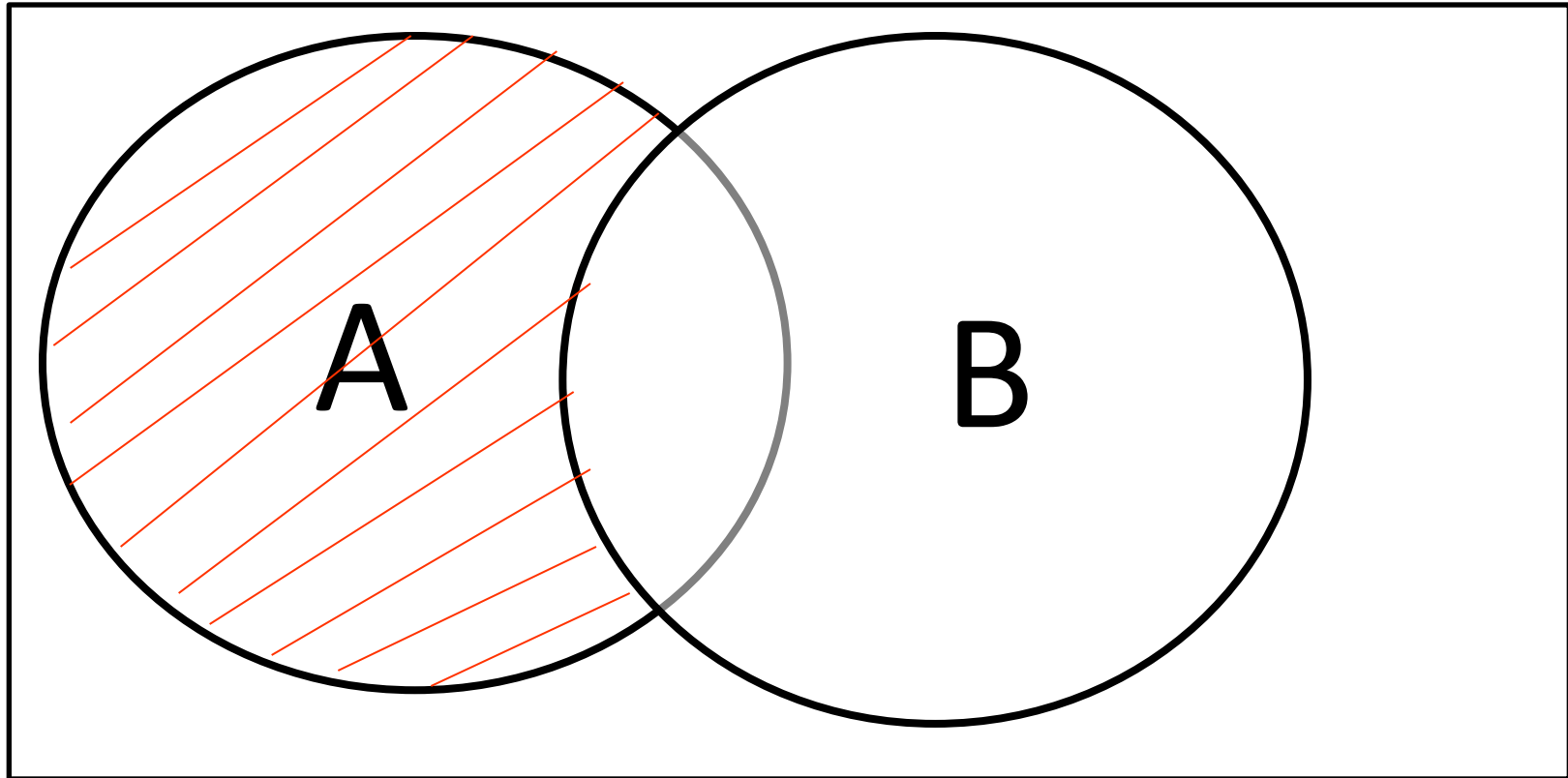
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل تقاطع مجموعتين A و B



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل  $\bar{A}$



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل  $A-B$





## الضرب الديكارتي:

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين  $A$  ،  $B$  (  $A \times B$  ) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة  $(x, y)$  التي ينتمي مسقطها الأول  $(x)$  إلى المجموعة الأولى  $A$  ، بينما ينتمي مسقطها الثاني  $(y)$  إلى المجموعة الثانية  $B$ .  
بالرموز

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$



## تابع : الضرب الديكارتي:

مثال:

إذا كانت  $A = \{-2, 1\}$  و  $B = \{-3, 1, 4\}$

فأوجد  $A \times B$  و  $B \times A$

الحل:

$$A \times B = \{(-2, -3), (-2, 1), (-2, 4), (1, -3), (1, 1), (1, 4)\}$$

$$B \times A = \{(-3, -2), (-3, 1), (1, -2), (1, 1), (4, -2), (4, 1)\}$$



## تابع : الضرب الديكارتي:

مثال:

أنشئ  $A \times B$  ، علما بان

$$B = \{w, x, y\} \text{ و } A = \{1, 2\}$$

الحل:

$$A \times B = \{(1, w), (1, x), (1, y), (2, w), (2, x), (2, y)\}$$



## تابع : الضرب الديكارتي:

### ملاحظات:

- لاحظ أن عدد عناصر  $A$  عنصران وعدد عناصر  $B$  ثلاثة عناصر، وان عدد عناصر  $A \times B$  يساوي عدد عناصر  $B \times A$  و يساوي 6 عناصر (أزواج مرتبة)  $= 2 \times 3 =$  عدد عناصر  $A \times B$  عدد عناصر  $B$ .
- أيضا يمكننا ملاحظة أن

$$A \times B \neq B \times A$$



## تابع الضرب الديكارتي:

يتساوى الزوجان المرتبان  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ،  $(x_1 = x_2)$  ، وكان المسقط الثاني في الزوج الأول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني،  
 $(y_1 = y_2)$



## تابع الضرب الديكارتي:

مثال:

أوجد قيم  $x$  و  $y$  التي تحقق المعادلة  $\left(x + 1, y - \frac{1}{2}\right) = \left(4, \frac{3}{2}\right)$

الحل:

$$x + 1 = 4 \Rightarrow x = 4 - 1 = 3$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$



## مجموعة المجموعات (Power set):

مجموعة المجموعات لأية مجموعة  $S$  هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة  $S$  ومن بينها المجموعة الخالية  $\phi$  والمجموعة  $S$  نفسها ويرمز لها بالرمز  $P(S)$ .

مثال:

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة  $S = \{a, b, c\}$

الحل: عدد عناصر المجموعة =  $2^n$   
مجموعة المجموعات هي:  $2^3 = 8$

$$P(S) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \phi\}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓



## تابع : مجموعة المجموعات:

ملاحظة: إذا احتوت المجموعة  $S$  على  $n$  من العناصر ، فإن عدد عناصر  $P(S)$  يساوي  $2^n$  .

تمرين: أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة  $S = \{1,2,3,4\}$

$N=4$  عدد  
 $2^4 = 16$





# مجموعة الأعداد:

1. مجموعة الأعداد الطبيعية: موضوع نور العصر

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

2. مجموعة الأعداد الصحيحة: موضوع اوسال مع العصر

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$



## تابع: مجموعة الأعداد:

3. مجموعة الأعداد النسبية:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in Z; b \neq 0 \right\}$$

4. مجموعة الأعداد غير النسبية :

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة الأعداد النسبية مثل  $\sqrt{2}$  والنسبة التقريبية  $\pi$  والعدد النايبييري  $e$  غيرها.



# تابع: مجموعة الأعداد:

## 5. مجموعة الأعداد الحقيقية:

وهي المجموعة التي تحتوي على كافة الأنواع السابقة ويرمز لها بالرمز  $\mathbb{R}$  وتمثل هندسياً بخط الأعداد.

$$N \subset Z \subset Q \subset R \quad \text{ملاحظة:}$$

لا يلزم الترتيب

$$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$$

لا يلزم التكرار، الترتيب  
العناصر  $d$  موجودة في  $B$

$$a \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3, d\}$$

لا تساوي  $B$   
وجود  $s$  في المجموعة  $A$

$$\{x, y, z\} \neq \{x, y, z, s\}$$



## تمارين:

1. اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية . يمكن استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر

i.  $A = \{x: 7 \text{ اصغر من } x\}$   
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ii.  $B = \{x: 2 \text{ يقبل القسمة على } x\}$   
 $2, 4, 6, 8, \infty$

iii.  $C = \{y: \text{حرف من هجاء المحصور بين } c \text{ و } h\}$   
 $\{c, h\} \rightarrow \{c\}$

iv.  $D = \{x: 17 \text{ اصغر من } x\}$   
 $1, 3, 5 \rightarrow 15$



## تابع: تمارين:

2. إذا كانت المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر

من 10 ، افرض ان  $A = \{1,3,5\}$  و  $B = \{2,4,6\}$  كون  
المجموعات الآتية:  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$(i) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(ii) A \cap B = \emptyset$$

$$(iii) \bar{A} = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

$$(iv) \bar{B} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$$



## تابع: تمارين:

$$(v) \overline{A \cup B}$$

$$\{7, 8, 9\}$$

$$(vi) \overline{A \cap B}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 9\}$$

$$(vii) \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 9\}$$

$$(viii) \overline{A \cap U}$$

$$\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

$$(ix) A \cap A$$

$$\{1, 2, 3\}$$

المحور ده فعلا كان

صحيح الصياغة

الصياغة المشتركة



تابع: تمارين: <sup>فائدة مهمة</sup>  
 اعداد كالت الاعداد والفاصل داخل قوسى بهذا الشكل  $\{ \}$  فانه الترتيب لى له اهمية  
 و اعداد كالت داخل قوسى بهذا الشكل  $( )$  فانه الترتيب له اهمية

3. لتكن المجموعة الكلية  $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  <sup>صال</sup>  
 ولتكن  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{-1, 1, 3\}$ ,  $C = \{2, 4, 6\}$   
 فأوجد

(i)  $A \times B = \{(1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1)\}$

(ii)  $B \times A = \{(-1, 1), (1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$

(iii)  $B \times B$  <sup>الترتيب مهم 9</sup>

(iv)  $A \times (B \cap C) = \emptyset$

(v)  $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$

(vi)  $\overline{C} \times B = \overline{C} \times B = \{(-1, 1), (1, 1), (1, 3)\}$   
<sup>اعمر 10</sup>

$A \times \mathbb{Q} = \emptyset$



## تابع: تمارين:

4. إذا كانت

$$A = \{x: \text{عدد طبيعي اصغر من } 5\} \quad 1, 2, 3, 4$$

$$B = \{y: \text{عدد طبيعي اصغر من } 3\} \quad 1, 2$$

$$\text{هل } A \times B = B \times A \quad A \times B \neq B \times A$$

5. أوجد قيم  $x$  و  $y$  التي تحقق المعادلة  $(x, y^2) = (2x - 2, 1)$

$$\begin{aligned} x - 2x - 2 &= 0 & y^2 &= 1 \\ x &= 2 & y &= \pm 1 \end{aligned}$$





# المحاضرة الثالثة

## الدوال



## الدالة:

يعتبر مفهوم الدالة واحداً من أهم المفاهيم في الرياضيات. وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو (تتبعين بواسطة) كمية أخرى.

## فمثلاً:

- حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.
- متوسط إنتاج الفدان من المحاصيل يعتمد على كمية السماد المستخدمة.
- الاستهلاك الشهري لأسرة ما يعتمد على دخلها الشهري.



# تابع : الدالة:

## تعريف مجرد لمفهوم الدالة:

إذا كانت  $A$  ،  $B$  مجموعتين فان  $f$  دالة من  $A$  إلى  $B$  ، أي  $f:A \longrightarrow B$   
إذا كانت  $f$  مجموعة جزئية من  $A \times B$  بحيث انه لكل  $x \in A$  توجد  $y$   
واحدة في  $B$  بحيث  $(x,y) \in f$  . يسمى  $y$  قيمة الدالة  $f$  عند  $x$  ويكتب ذلك  
رمزا على النحو  $y=f(x)$  . ويسمى  $y$  بالمتغير التابع و  $x$  بالمتغير  
المستقل .

## ملاحظة:

إذا كانت  $f$  دالة من  $A$  إلى  $B$  . فان  $A$  تسمى مجال الدالة . وتسمى  $B$   
المجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .



## تابع : الدالة:

مثال: إذا كانت  $A=\{1,2,3\}$  و  $B=\{4,8,12\}$  وكانت

$$f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\} \text{ و } f_2 = \{(1,4), (2,8)\} \text{ و}$$

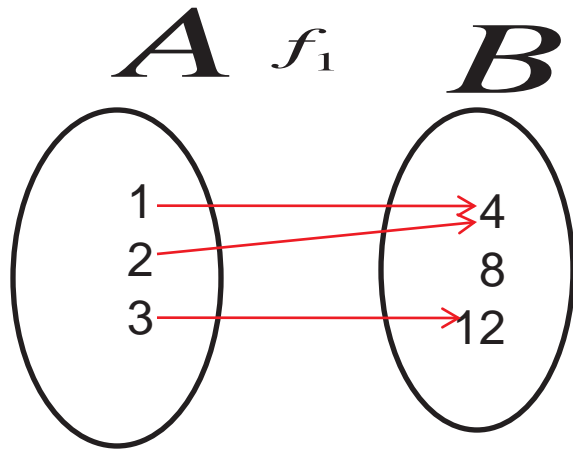
$$f_3 = \{(1,4), (1,8), (2,4), (3,12)\}$$

فهل  $f_1$  ،  $f_2$  و  $f_3$  دوال من  $A$  إلى  $B$  ؟



# تابع : الدالة:

المجال المقابل المجال



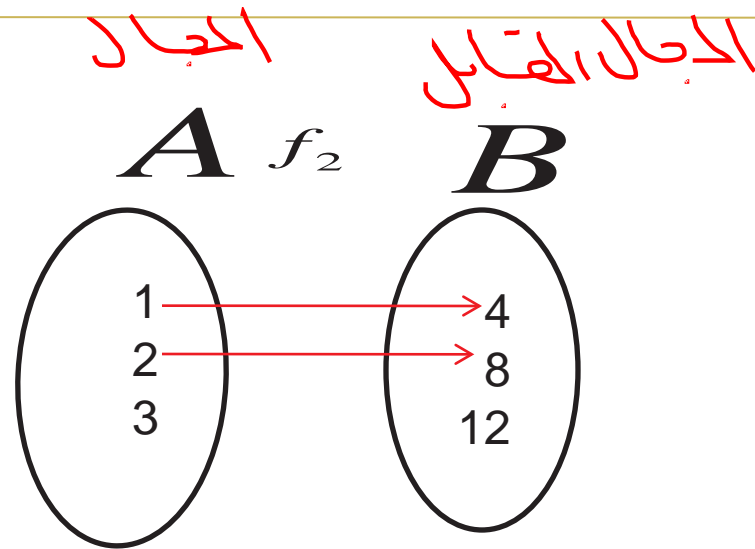
بست دالة  
متباينة  
دالة ولكن

الحل:

نعم  $f_1$  دالة لان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل.



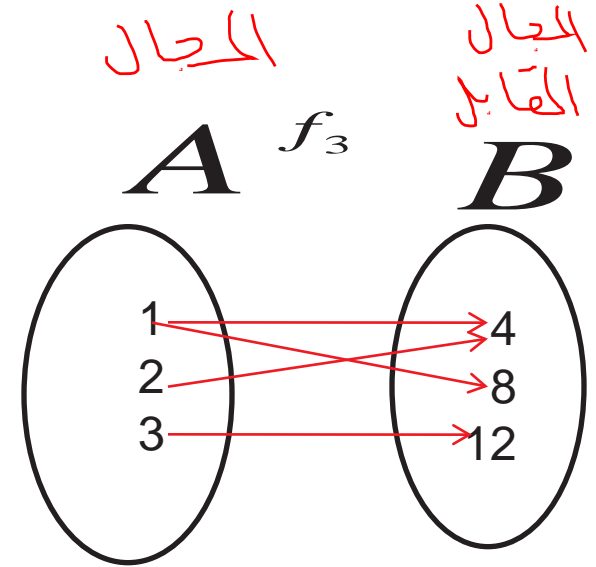
# تابع : الحل :



$f_2$  ليست دالة لان  $3 \in A$  وليس له صورة  $B$  .



# تابع : الحل :



$f_3$  ليست دالة لان  $1 \in A$  وله صورتان



## ملاحظة:

- تذكر ان الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى (المجال المقابل).
- الدالة المتباينة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى (المجال المقابل) ولا يرتبط اكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى (المجال المقابل).





## مثال:

حدد كلاً من مجال ومدى العلاقة التالية، وبين هل هي دالة ، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة؟

$x \quad y$

$$R = \{(-6,-1), (-5,-9), (-3,-7), (-1,7), (-6,-9)\}$$

الحل:

الحل: دائي X  
الحل: دائي Y

المجال =  $\{-6,-5,-3,-1\}$  ، المدى =  $\{-9,-7,-1,7\}$

هل هي دالة؟ لا ليست دالة لان العنصر -6 في المجال ارتبط بكل من العنصرين -1,-9 في المدى



## تمرين:

حدد كلاً من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، وبين ايهما دالة ، واذا كانت دالة فهل هي متباينة؟

1.  $R = \{(-2,0), (-1,-1), (2,-2), (3,4)\}$  دالة ومتباينة
2.  $R = \{(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4)\}$  ليست دالة
3.  $R = \{(-3,1), (-1,1), (0,1), (4,1)\}$  دالة
4.  $R = \{(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$  ليست دالة
5.  $R = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$  ليست دالة
6.  $R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$  دالة ومتباينة



## الدوال الحقيقية:

الدالة الحقيقية هي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية . أي  $f:R \longrightarrow R$

### • دالة كثيرة الحدود:

هي الدالة التي على الصورة  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$  حيث  $a, a_{n-1}, \dots, a_n$  أعداد حقيقية وتسمى معاملات كثيرة الحدود،  $n$  عدد طبيعي  $a_n \neq 0$  . تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ  $(x)$



# الدوال الحقيقية:

مثال: ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية:

الدرجة + المعنى المقترنة

$$(1) f(x) = 3$$

الاولى

$$(2) f(x) = 3x - 4$$

الدرجة الثانية  
تربيع

$$(3) f(x) = x^2 - x + 1$$

الثالثة

$$(4) f(x) = 2 - 3x + x^3$$

الخامسة

$$(5) f(x) = x^3 + x^5 + 5x - 6$$



# تابع: الدوال الحقيقية:

**الحل:**

1. الدرجة الصفرية ويسمى أيضا دالة ثابتة.
2. الدرجة الأولى ويسمى أيضا دالة خطية.
3. الدرجة الثانية ويسمى أيضا دالة تربيعية.
4. الدرجة الثالثة أو دالة تكعيبية.
5. الدرجة الخامسة



# إيجاد قيمة الدالة:

مثال:

إذا كان  $f(x) = x^2 + 4x - 3$  ، فأوجد

$$(i) f(2) = 9$$

$$(ii) f(-1) = -6$$

$$(iii) f(a) = a^2 + 4a - 3$$

$$(iv) f(c+1) = (c+1)^2 + 4(c+1) - 3$$
$$= c^2 + 2c + 1 + 4c + 4 - 3$$

*Note: A handwritten green checkmark is next to the expansion  $c^2 + 6c + 2$ , which is the simplified result of the above steps. A blue arrow points from the final result back to the original function definition.*



## تابع: ايجاد قيمة الدالة:

الحل:

$$(i) f(2) = 2^2 + 4 \times 2 - 3 = 4 + 8 - 3 = 9$$

$$(ii) f(-1) = (-1)^2 + (4 \times -1) - 3 = 1 - 4 - 3 = -6$$

$$(iii) f(a) = a^2 + 4 \times a - 3 = a^2 + 4a - 3$$

$$(iv) f(c+1) = (c+1)^2 + 4(c+1) - 3 \\ = c^2 + 2c + 1 + 4c + 4 - 3 = c^2 + 6c + 2$$



# تمارين:

1. إذا كان  $f(x) = 2x^2 - 3x$  ، فأوجد

(i)  $f(0) = 0$

(ii)  $f(-4) = 2(-4)^2 - 3(-4)$   
 $2(16) + 12$   
 $32 + 12 = 44$

(iii)  $f(1+h) = 2(1+h)^2 - 3(1+h)$   
 $2(1+2h+h^2) - 3 - 3h$   
 $2 + 4h + 2h^2 - 3 - 3h$   
 $-1 + h + 2h^2$

(iv)  $f(x+h)$

$2(x+h)^2 - 3(x+h)$   
 $2(x^2 + 2xh + h^2) - 3x - 3h = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h$





## تابع : تمارين :

2 . للدالة  $f(x)=2x^2-x-5$  أوجد  $f(t)$  و  $f(-1)$

3 . للدالة  $g(x)=\frac{x-1}{2x+3}$  أوجد  $g(x-1)$  و  $g(4)$

4 . للدالة  $f(x)=2x^2-1$  أوجد  $f(1)+f(2)+f(3)$

5 . للدالة  $f(x)=x^2$  أوجد  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

6 . للدالة  $g(x)=x+1$  أوجد  $2[g(2)]^2 - g(2) + 5$

$$5 = \frac{5}{1}$$

7 . للدالة  $f(t)=\frac{2t-1}{t+3}, t \neq -3$  أوجد  $\frac{5}{f(4)}$

8 . للدالة  $f(x)=x^2+2x-3$  أوجد  $f(2c-3)-5f(c)$

9 . للدالة  $g(x)=x^2-5x+8$  أوجد  $g(5a-2)+3g(2a)$



# العمليات على الدوال:

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة معطيات. وتشمل هذه العمليات، العمليات الثنائية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس.

لتكن  $f$ ،  $g$  دالتين فان:

$$(i) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(ii) (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(iii) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$



## تابع: العمليات على الدوال:

$$(iv) \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

$$(v) (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ F after G , G first then F on G value}$$

(vi) معكوس الدالة:

إذا كانت  $y=f(x)$  دالة فان معكوسها يعني إيجاد  $x$  كدالة في  $y$  أي  $x=f^{-1}(y)$ ، حيث  $f^{-1}$  يرمز لمعكوس الدالة  $f$ .



# خطوات ايجاد معكوس الدالة

- أولاً: اعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين  $x, y$
- ثانياً: بدل بين كل من المتغير  $x$  والمتغير  $y$  في المعادلة.
- ثالثاً: حل المعادلة بالنسبة للمتغير  $y$
- رابعاً: ضع  $f^{-1}(x)$  بدلاً من المتغير  $y$

مثال

$$f(x) = x + 1$$
$$y = x + 1$$
$$x = y + 1$$



# تابع: العمليات على الدوال:

مثال: إذا كانت  $f(x)=3x+5$  ،  $g(x)=x^2+1$  ، فأوجد

$$(i) (f + g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(ii) (f - g)(x) = f(x)-g(x)$$

$$(iii) (f .g)(x) = f(x)*g(x)$$

$$(iv) \frac{f}{g}(x) = F(x)/g(x)$$

$$(v) (f \circ g)(x) = f(g(x))$$



## تابع: العمليات على الدوال:

الحل:

$$(i) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 5 + x^2 + 1 \\ = x^2 + 3x + 6$$

$$(i) (f - g)(x) = f(x) - g(x) = 3x + 5 - (x^2 + 1) \\ = 3x + 5 - x^2 - 1 = 3x - x^2 + 4$$

$$(iii) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x + 5)(x^2 + 1) \\ = 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\ = 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$$



## تابع: العمليات على الدوال:

الحل:

$$(iv) \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x + 5}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}(v) (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) + 5 \\ &= 3x^2 + 3 + 5 \\ &= 3x^2 + 8\end{aligned}$$



## مثال:

المسألة

أوجد معكوس الدالة  $f(x) = 2x - 5$

الحل:

$$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$$

$$x = 2y - 5$$

$$x + 5 = 2y$$

$$\frac{x + 5}{2} = y$$

$$y = \frac{x + 5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2}$$





## تابع : العمليات على الدوال:

**مثال:** افرض أن  $f(x) = 1/(x-2)$  ،  $g(x) = \sqrt{x}$  ، احسب

(i)  $(f \circ g)(9)$

(ii)  $(g \circ f)(6)$

**الحل:**

$$(i) (f \circ g)(9) = f(g(9)) = f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$(ii) (g \circ f)(6) = g(f(6)) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



## تمارين :

1. اذا كان  $f(x) = x^2 + 5x - 2$  ،  $g(x) = 3x - 2$  ، فأوجد

(i)  $(f + g)(x)$

(ii)  $(f - g)(x)$

(iii)  $(f \times g)(x)$

(iv)  $\frac{f}{g}(x)$



## تمارين :

2. اذا كان  $f(x) = x^2 - 7x + 2$  ،  $g(x) = x + 4$  ، فأوجد

(i)  $(f + g)(x)$

(ii)  $(f - g)(x)$

(iii)  $(f \cdot g)(x)$

(iv)  $\frac{f}{g}(x)$

(v)  $(f \circ g)(x)$

(vi)  $(g \circ f)(x)$



## تمارين :

3. اذا كان  $f(x) = 2x - 5$  ،  $g(x) = 4x$  ، فأوجد

(i)  $(f \circ g)(x)$

(ii)  $(g \circ f)(x)$

(iii)  $(f \circ g)(2)$

(iv)  $(g \circ f)(5)$



# تابع تمارين:

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية :

$$(i) f(x) = -2x + 1 \quad y = -2x + 1, \quad x = \frac{-y + 1}{-2}$$

$$(ii) g(x) = 5x \quad y = 5x \Rightarrow x = \frac{y}{5}$$

$$(iii) f(x) = \frac{x-4}{3} \quad y = \frac{x-4}{3} \Rightarrow x = \frac{y-4}{3}$$

$$-3 \times x = \frac{y-4}{3} \Rightarrow 3x = y-4 \Rightarrow y = 3x+4$$



# المحاضرة الرابعة

## معادلات الخط المستقيم



# إيجاد ميل الخط المستقيم:

## 1- ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين:

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  يعرف على انه النسبة بين التغير في  $y$  والتغير في  $x$  ، ويرمز له عادة بالحرف  $m$

إذن:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث

$$x_1 \neq x_2$$



## تابع: ميل خط المستقيم:

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين في كلاً من:

1.  $(1, -3)$  و  $(3, 7)$   $5$

2.  $(3, 2)$  و  $(5, 2)$   $\emptyset$

3.  $(2, 3)$  و  $(2, 6)$   $\infty$

الحل:

$$1. \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-3)}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$





## تابع: الحل:

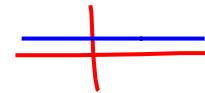
$$2. \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

$$3. \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

إذن الميل غير معرف

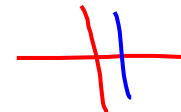
### ملاحظات هامة:

• إذا كان الميل يساوي صفر فان ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور



السينات

• إذا كان الميل يساوي  $\infty$  فان ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور



الصادات



## تابع: ميل خط المستقيم:

2- ميل الخط المستقيم الذي معادلته في الصورة العامة  $ax+by+c=0$

حيث  $a, b, c$  ثوابت والثابتان  $a, b$  لا يساويان الصفر معاً، هو  $m = \frac{-a}{b}$

**مثال:**

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته  $2x+4y-7=0$

**الحل:**

حيث  $a=2$  و  $b=4$  ،  $m = \frac{-a}{b}$

$$m = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{إذاً}$$



# المستقيـمات المتوازية والمستقيـمات المتعامدة:

## المستقيـمات المتوازية:

يقال أن المستقيم  $L_1$  موازياً للمستقيم  $L_2$  أي  $L_1 // L_2$  إذا وفقط إذا كان  $m_1 = m_2$

## المستقيـمات المتعامدة:

يقال أن المستقيم  $L_1$  يعامد المستقيم  $L_2$  أي  $L_1 \perp L_2$  إذا وفقط إذا كان  $m_1 \times m_2 = -1$



# معادلة الخط المستقيم:

## طرق تحديد معادلة الخط المستقيم:

### 1. بمعلومية نقطة وميل:

معادلة الخط المستقيم الذي ميله  $m$  ويمر بالنقطة  $(x_1, y_1)$  هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



## تابع: معادلة الخط المستقيم:

**مثال:** أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة  $(5, -3)$  وميله يساوي  $-2$ .

**الحل:**

$$m = -2, x_1 = 5, y_1 = -3$$

$$y - (-3) = -2(x - 5)$$

$$y + 3 = -2x + 10$$

$$y = -2x + 10 - 3$$

$$y = -2x + 7$$



## تابع: معادلة الخط المستقيم:

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (1,1) وميله يساوي 2.

الحل:

$$m = 2 , x_1 = 1 , y_1 = 1$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y - 1 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 1$$

$$y = 2x - 1$$



## تابع: معادلة الخط المستقيم:

### 2. بمعلومية نقطتين:

معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  هي

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**مثال:** أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين  $(1, -2)$  و  $(5, 6)$

**الحل:**

$$x_1 = 1, y_1 = -2, x_2 = 5, y_2 = 6$$



## تابع: الحل:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - (-2)}{x - 1} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1}$$

$$\frac{y + 2}{x - 1} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y + 2 = 2(x - 1)$$

$$y + 2 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 - 2$$

$$y = 2x - 4$$





## تابع: معادلة الخط المستقيم:

### 3. بمعلومية ميل والمحصول الصادي:

معادلة الخط المستقيم الذي ميله  $m$  ويقطع من محور الصادات جزءاً طوله  $b$  هي  $y=mx+b$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله  $m=3$  مقطوعه الصادي  $b=-2$

الحل:

$$y = mx + b$$

$$y = 3x - 2$$



## تابع: معادلة الخط المستقيم:

مثال:

أوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيم  $2x+3y=6$

**الحل:** لإيجاد المطلوب نضع أولاً المعادلة المعطاة على الصورة :

$$Y=mx+b$$

من المعادلة المعطاة نجد أن

$$2x + 3y = 6$$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

قسمن  
على 3

قسمننا على معامل  $y$   
من اجل جعل واي  
بدون معامل



## تابع: الحل:

بمقارنة هذه المعادلة الأخيرة بالمعادلة  $y=mx+b$   
 نجد أن

الميل هو  $m = -\frac{2}{3}$  والمقطع الصادي هو  $b=2$



## تابع: معادلة الخط المستقيم:

4. بمعلومية الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات:

المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءا طوله =  $a$  ومن محور الصادات جزءا طوله يساوي  $b$  تكون معادلته:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءا طوله 3 وحدات ومن محور الصادات جزءا طوله 2 وحده.



## تابع: معادلة الخط المستقيم:

$$a = 3, b = 2$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$2x + 3y = 6$$

**الحل:**

نبحث عن العامل المشترك بين المقامات وإذا لم نجد فنبحث عن المضاعف المشترك  
فنضرب الجميع في رقم 6

$$6 \times \frac{x}{3} + 6 \times \frac{y}{2} = 6$$

نضرب كل 3

نضرب كل 2

**مثال:** أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته  $2x - 3y = 5$



## تابع: معادلة الخط المستقيم:

الحل:

المحصور السيني للخط  $a =$  وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة  $(a,0)$

$$2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

المحصور الصادي للخط  $b =$  وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة  $(0,b)$

$$-3b = 5 \Rightarrow b = -\frac{5}{3}$$



# تمارين:

1. أوجد كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

أ- المستقيم المار بالنقطة  $(1, -2)$  وميله  $m = -3$   $Y = -3x + 1$

ب- المستقيم المار بالنقطة  $(3, 4)$  وميله صفر  $Y = 4$

ج- المستقيم المار بنقطة الأصل وميله 2  $Y = 2x$

د- المستقيم المار بالنقطة  $(2, 3)$  وميله  $-3/2$   $Y = -3/2x + 6$

هـ- المستقيم المار بالنقطتين  $(3, 4)$  و  $(7, 2)$

و- المستقيم المار بالنقطتين  $(2, 1)$  و  $(3, 4)$   $Y = 3x - 5$

ز- المستقيم الذي ميله  $m = -2$  ومقطوعه الصادي  $b = 3$   $Y = -2x + 3$



## تابع : تمارين:

ح- المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل ويوازي المستقيم  $4y+2x=7$

ط- المستقيم الذي يمر بالنقطة  $(3,2)$  وعمودي على المستقيم  $y=-3x+4$   $Y=1/3x+1$

ي- المستقيم الذي يمر بالنقطة  $(-1,2)$  وعمودي على المستقيم  $4y=2x-3$   $Y=-1/2x+3/2$

ك- المستقيم الذي يمر بالنقطة  $(0,3)$  ونقطة تقاطع المستقيمين  $3x+y=1$  ،

$$y = -23x + 3 \quad 4y + 2x = 3$$

ل- المستقيم الذي يمر بالنقطة  $(3,5)$  ويوازي المستقيم  $3x+5y-2=0$   $y = -\frac{3}{5}x + \frac{34}{5}$

م- المستقيم الذي يمر بالنقطة  $(-1,-5)$  وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{21}{5} \quad (1,8) \text{ و } (5,3)$$





## تابع: تمارين:

2. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من

$$y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$a = 4$   
 $b = 6$

3. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من

$$2x + 7y = 14$$

$a = 7$     $b = 2$

4. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من

$$3x - y = 6$$

$$b = -6, a = 2$$



## تابع : تمارين:

5. أوجد الميل والمقطع الصادي لكل علاقة من العلاقات الخطية التالية:

$$i) \quad 3x + 5y = 15$$

$$ii) \quad 2x = 13 - 4y$$

$$iii) \quad y + 2x + 6 = 0$$

$$iv) \quad 8x + 5y = 20$$



# المحاضرة الخامسة

## المتباينات والقيمة المطلقة



## المتباينات:

أي تعبير يتضمن احد الرموز ( $\geq$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $<$ ) يسمى متباينة.  
فمثلاً كل مما يلي هي متباينات:

$$(i) 3x + 4 \leq 8 - 2x$$

$$(ii) \frac{2x + 4}{x + 5} < 3$$

$$(iii) (x + 4)(x - 1) > 9$$

تستخدم المتباينات في تعريف نوع خاص من المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية والتي تسمى الفترة. وهناك أربعة أنواع من الفترات تعرف كما يلي:



# تابع : المتباينات :

الحد الأدنى  
الحد الأعلى

1. فترة مغلقة  $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

2. فترة مفتوحة  $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$   
يمكن كتابتها  $]a, b[$

3. فترة نصف مغلقة من جهة اليسار (نصف مفتوحة من جهة اليمين)

$$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

4. فترة نصف مفتوحة من جهة اليسار (نصف مغلقة من جهة اليمين)

$$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$$

اي فترة مفتوحة من  
جهة تكون الجهة  
المفتوحة الى ما لانهاية  
∞



# خواص المتباينات:

1.  $a^2 \geq 0$  لكل  $a \in R$
2. إذا كانت  $a < b$  و  $b < c$  فإن  $a < c$
3. إذا كانت  $a < b$  فإن  $a + c < b + c$  وكذلك  $a - c < b - c$
4. إذا كانت  $a < b$  وكانت  $c > 0$  فإن  $ac < bc$
5. إذا كانت  $a < b$  وكانت  $c < 0$  فإن  $ac > bc$
6. إذا كانت  $a > 0$  فإن  $\frac{1}{a} > 0$
7. إذا كانت  $a > 0$  و  $b > 0$  بحيث  $a < b$  فإن  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$



## تابع: المتباينات:

$$4x + 7 = 2x - 3 \quad \text{بالإشارة}$$
$$x = -5$$

### حل المتباينات:

حل المتباينة هو القيمة أو مجموعة القيم التي تجعل المتباينة صحيحاً.

$$4x + 7 \geq 2x - 3 \quad \text{مثال (1): حل المتباينة}$$

الحل:

$$4x + 7 - 7 \geq 2x - 3 - 7$$

$$4x \geq 2x - 10$$

$$4x - 2x \geq 2x - 10 - 2x$$



## تابع : الحل :

$$2x \geq -10$$

$$\frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times -10$$

$$x \geq -5$$

مجموعة الحل هي الفترة  $(-5, \infty)$ .





## تابع: المتباينات:

مثال (2): حل المتباينة

الحل:

$$-5 < 3x - 2 < 1$$

$$3x - 2 = 1$$

$$x = 1$$

$$3x - 2 = -5$$

$$x = -1$$

$$(-1, 1)$$

$$-5 + 2 < 3x - 2 + 2 < 1 + 2$$

$$-3 < 3x < 3$$

$$\frac{1}{3} \times -3 < \frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times 3$$

$$-1 < x < 1$$

مجموعة الحل هي الفترة  $(-1, 1)$ .

وصفها لا بآشارة

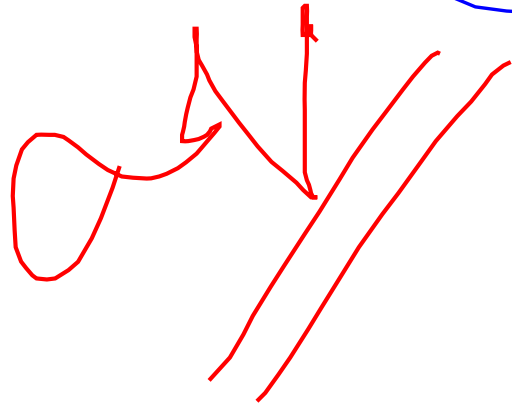
معادلة

↓ ↓



## تابع: المتباينات:

$$(-\infty, -) \cup (+, \infty)$$



مثال (3): حل المتباينة  $x^2 + x - 12 > 0$

الحل:

$$(x - 3)(x + 4) > 0$$

الحالة الأولى  $(x - 3) > 0$  و  $(x + 4) > 0$  Mode  $\rightarrow 3$

إذاً  $x > -4$  و  $x > 3$

أي أن  $x > 3$

$$x_1 = -4$$
$$x_2 = 3$$



## تابع الحل :

الحالة الثانية  $(x-3) < 0$  و  $(x+4) < 0$

إذا  $x < 3$  و  $x < -4$

أي أن  $x < -4$

إذا مجموعة الحل هي  $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$



# تمارين:

## حل المتباينات التالية:

1.  $5 > 2 - 9x > -4$   $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

2.  $5x - 6 > 11$   $(\frac{17}{5}, \infty)$

3.  $-6 \leq 1 - 3x \leq 2$   $[-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$

4.  $4 \leq 2x + 2 \leq 10$   $[1, 4]$

5.  $3x - 5 < 10$   $(-\infty, \frac{5}{3})$

6.  $x^2 - 5x + 6 > 0$   $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$



## تابع : تمارين:

7.  $3 \leq 4x - 7 < 9$   $\left[ \frac{5}{2}, 4 \right)$

8.  $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \leq 2 = \left( -\infty, \frac{4}{3} \right]$



# القيمة المطلقة:

## تعريف:

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي  $x$  (ويرمز لها بالرمز  $|x|$ ) تعرف كالتالي:

$$|x| = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



# تابع: القيمة المطلقة: بالرمز $|x|$ معادته كما نرى

## خواص القيمة المطلقة:

1.  $|x| < a$  تكافئ  $-a < x < a$  حيث  $a > 0$

2.  $|x| \leq a$  تكافئ  $-a \leq x \leq a$  حيث  $a > 0$

3.  $|x| > a$  تكافئ  $x > a$  أو  $x < -a$  حيث  $a > 0$

4.  $|x| \geq a$  تكافئ  $x \geq a$  أو  $x \leq -a$  حيث  $a > 0$

5.  $|ab| = |a||b|$

$(-\infty, -) \cup (, \infty)$



## تابع: الخواص :

$$.6 \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$.7 \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$.8 \quad |a - b| \geq |a| - |b|$$





# تابع: القيمة المطلقة:

مثال (1): حل المتباينة  $|2x + 4| \leq 3$

الحل:

$$|2x + 4| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 2x + 4 \leq 3$$

$$-3 - 4 \leq 2x + 4 - 4 \leq 3 - 4$$

$$-7 \leq 2x \leq -1$$

$$\frac{1}{2} \times -7 \leq \frac{1}{2} \times 2x \leq \frac{1}{2} \times -1$$

$$-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

مجموعة الحل هي الفترة  $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$



## تابع: القيمة المطلقة:

مثال (2): حل المتباينة  $|2x-5| > 3$   
الحل:

$$\begin{array}{l} 2x-5 < -3 \quad \text{أو} \quad 2x-5 > 3 \\ 2x-5+5 < -3+5 \quad \text{أو} \quad 2x-5+5 > 3+5 \\ 2x < 2 \quad \text{أو} \quad 2x > 8 \\ x < 1 \quad \text{أو} \quad x > 4 \end{array}$$

مجموعة حل المتباينة هي  $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$



## تابع: القيمة المطلقة:

مثال (3):

حل المتباينة  $\left| \frac{3x+1}{2} \right| < 1$  ملاحظة  
الحل:

$-1 < \frac{3x+1}{2} < 1$  ملاحظة  
عطاء راحة

$$2 \times -1 < 2 \times \frac{3x+1}{2} < 2 \times 1$$

$$-2 < 3x+1 < 2$$



## تابع: الحل:

$$-2 - 1 < 3x + 1 - 1 < 2 - 1$$

$$-3 < 3x < 1$$

$$\frac{1}{3} \times -3 < \frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times 1$$

$$-1 < x < \frac{1}{3}$$

مجموعة الحل هي  $(-1, \frac{1}{3})$



# تمارين:

## حل المتباينات التالية:

1.  $|x + 2| < 1$   $(-3, -1)$
2.  $|3x| > 12$   $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$
3.  $|3x - 2| \leq 4$   $[-\frac{2}{3}, 2]$
4.  $|1 - 2x| > 3$   $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
5.  $|2x - 3| < 7$   $(-2, 5)$
6.  $|3x + 4| \geq 5$   $(-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, \infty)$



# تمارين:

7.  $|2x| < 6$   $[-3, 6)$

8.  $\left| \frac{7-3x}{2} \right| \leq 1$   $\left[ \frac{5}{3}, 3 \right]$



# المحاضرة السادسة

## الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية



# الدالة الأسية:

أي دالة من النوع  $y = a^x$  تسمى دالة أسية .  
حيث  $a$  عدد حقيقي موجب. يسمى  $a$ : الأساس ،  $x$ : الأس.  
حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية  $(-\infty, \infty)$  ، ومجالها المقابل  
الأعداد الحقيقية الموجبة  $(0, \infty)$ . أي  $f : R \rightarrow R^+$   
أمثلة:

$$f(x) = 2^x , f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x , f(x) = e^x , f(x) = e^{5x+2}$$





# الدالة اللوغاريتمية:

إذا كان  $a > 0$  ،  $a \neq 1$  فإن الدالة الأسية  $y = a^x$  لها معكوس يرمز لها بالرمز  $x = \log_a y$  تسمى الدالة اللوغاريتمية ، حيث  $\log_a y$  وتقرأ لوغاريتم  $y$  للأساس  $a$  .

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية الموجبة  $(0, \infty)$  ، ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية  $(-\infty, \infty)$  . أي  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

أمثلة:

$$f(x) = \log_2 x, f(x) = \log_4 (2x + 4)$$



# اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية:

يعتبر العددان  $e$  و  $10$  (حيث  $e$  عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس للوغاريتمات. واللوغاريتمات للأساس  $e$  تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها  $\ln x$ .

**أمثلة:**  $f(x) = \ln x^5$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$

تسمى اللوغاريتمات للأساس 10 باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز  $\log x$  بدلاً عن  $\log_{10} x$ .

**أمثلة:**

$f(x) = \log x$ ,  $f(x) = \log(x^2 - 1)$ ,  $f(x) = \log(2x - 3)$



# تابع: الدالة اللوغاريتمية:

للح

## قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من  $x$  ،  $y$  ،  $b$  عدداً حقيقياً موجباً ،  $b \neq 1$  ، وكان  $n$  عدداً حقيقياً فان:

$$1. \log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$2. \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

$$3. \log_b(x^n) = n \log_b x$$

$$4. \log_b(b^x) = x$$

$$5. \log_b b = 1 \quad , \quad \log_b 1 = 0$$



# الدوال المثلثية:

هناك دالتان أساسيتان هما:

$$(i) \quad y = \sin x$$

$$(ii) \quad y = \cos x$$

وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:



# تابع الدوال المثلثية:

$$(iii) y = \tan x \quad \left( \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0 \right)$$

$$(iv) y = \sec x \quad \left( \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cos x \neq 0 \right)$$

$$(v) y = \csc x \quad \left( \csc x = \frac{1}{\sin x}, \sin x \neq 0 \right)$$

$$(vi) y = \cot x \quad \left( \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0 \right)$$



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

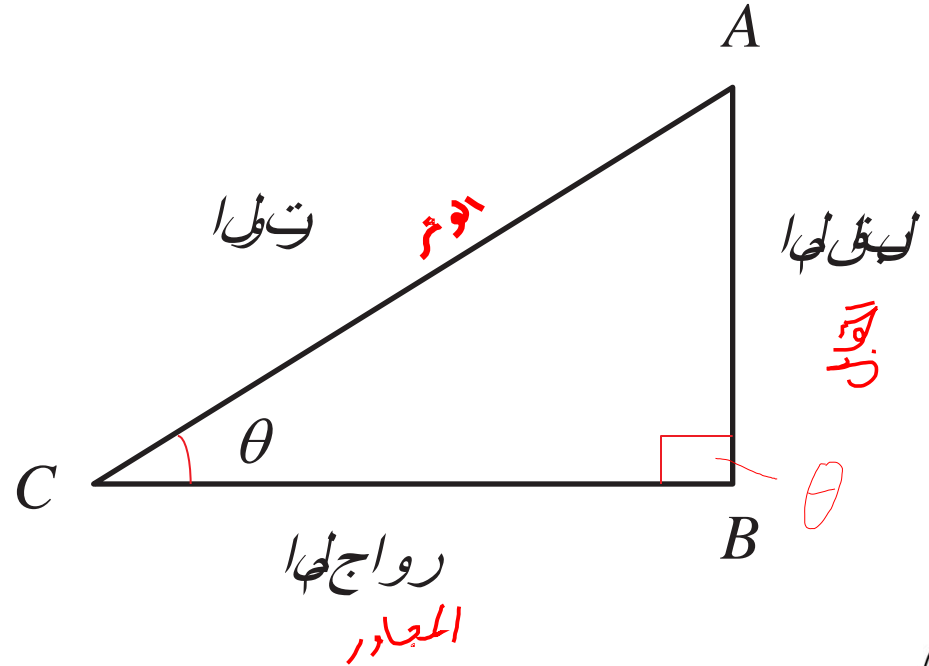
ملاحظة:



# تابع : الدوال المثلثية:

## التفسير الهندسي للدوال المثلثية:

إذا كان  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$  كما في الشكل التالي:



# تابع : الدوال المثلثية:

فان النسب المثلثية لزواية حادة  $\theta$  وهي:

المثلث

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \quad , \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad , \quad \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

مثال:

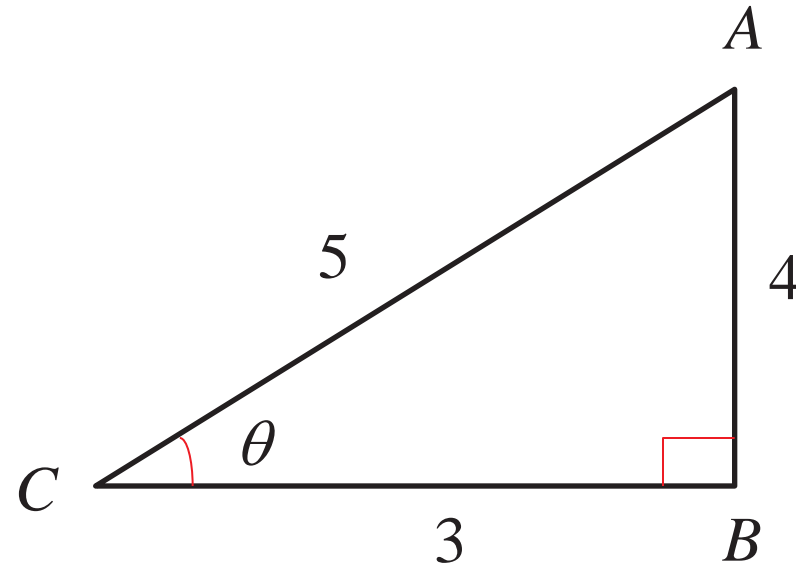
إذا كان  $\cot \theta = \frac{3}{4}$  ، فأوجد النسب الأساسية:  $\sin \theta$  ،  $\cos \theta$  ،  $\tan \theta$  وكذلك أوجد كلاً من:  $\sec \theta$  و  $\csc \theta$  .



## تابع : الدوال المثلثية:

الحل:

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 = 25 \\ \therefore \overline{AC} &= \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$



$$\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{5}{3}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{4}$$





# الدوال النسبية:

إذا كان  $h(x)$  ،  $g(x)$  كثيري حدود فان  $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$  تسمى دالة نسبية بشرط  $g(x) \neq 0$  ومجالها هو كافة الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام.

أمثلة:

1.  $f(x) = \frac{x+7}{x+5}$

2.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

3.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$



# الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

## الدالة الصريحة:

هي الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة  $y=f(x)$  ، أي المتغير التابع  $y$  في طرف والمتغير المستقل  $x$  في الطرف الآخر.

## أمثلة:

1.  $y = 2x + 3$
2.  $y = x$
3.  $y = x^2 + 2x - 3$



# الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

## الدالة الضمنية:

هي التي يمكن كتابتها في الصورة  $f(x,y)=k$ ، حيث  $k$  قيمة ثابتة.  
أمثلة:

1.  $x^2 + y^2 = 25$
2.  $x^2 + y^2 + xy + 2x - 4y + 5 = 0$
3.  $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$



# الدوال الزوجية والدوال الفردية:

## الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة  $y=f(x)$  دالة زوجية إذا كانت  $f(-x)=f(x)$

مثال:

هل الدالة  $f(x) = x^2$  دالة زوجية؟

$$f(-x) = (-x)^2$$

$$=(-x)(-x)$$

$$= x^2$$

$$= f(x)$$

الحل:

إذاً الدالة زوجية



# تابع : الدوال الزوجية والفردية:

مثال:

هل الدالة  $f(x) = x^2 + x$  دالة زوجية؟

الحل:

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\ &= (-x)(-x) + (-x) \\ &= x^2 - x \\ &\neq f(x)\end{aligned}$$

إذاً ليست زوجية.



# تابع : الدوال الزوجية والفردية:

## الدالة الفردية:

تعتبر الدالة  $y=f(x)$  دالة فردية إذا كانت  $f(-x) = -f(x)$

مثال:

هل الدالة  $f(x) = x^3 + x$  دالة فردية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\ &= (-x)(-x)(-x) + (-x) \\ &= -x^3 - x = -(x^3 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

إذاً الدالة فردية.



# تطبيقات اقتصادية:

## 1- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز  $Q_D$  بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز  $p$ .



## تابع : تطبيقات اقتصادية:

مثال:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة:  $Q_D = 25 - 5P$

فأوجد

1. الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما  $P=3$ .  $Q = 10$
2. سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة  $Q_D = 18$ .

$$18 = 25 - 5X$$

حل





# تابع : تطبيقات اقتصادية:

الحل:

1. عندما  $P = 3$

$$\begin{aligned}Q_D &= 25 - 5P \\ &= 25 - 5 \times 3 \\ &= 25 - 15 \\ &= 10\end{aligned}$$

2. عندما  $Q_D = 18$

$$\begin{aligned}Q_D &= 25 - 5P \\ 18 &= 25 - 5P \\ 5P &= 25 - 18 = 7 \\ \therefore P &= \frac{7}{5} = 1.4\end{aligned}$$

بالإضافة  
معايير كاد



# تابع: تطبيقات اقتصادية:

## 2- دالة العرض (الإنتاج) الخطية:

هناك علاقة طردية بين كمية الإنتاج من سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما زادت كمية الإنتاج. ونرمز لكمية العرض (الإنتاج) من سلعة ما بالرمز  $Q_s$  بينما نرسم لسعر السلعة بالرمز  $P$ .



# تابع: تطبيقات اقتصادية:

مثال:

إذا كانت  $Q_s = 3P - 2$  فأوجد:

1.  $Q_s$  إذا كانت  $P = 5$  13

2.  $P$  إذا كانت  $Q_s = 10$  4

الاجابة



# تابع: تطبيقات اقتصادية:

الحل:

1. عندما  $P = 5$

$$\begin{aligned}Q_s &= 3P - 2 \\ &= 3 \times 5 - 2 \\ &= 15 - 2 \\ &= 13\end{aligned}$$

2. عندما  $Q_s = 10$

$$\begin{aligned}Q_s &= 3P - 2 \\ 10 &= 3P - 2 \\ -3P &= -2 - 10 = -12 \\ \therefore P &= 4\end{aligned}$$



# تطبيقات اقتصادية:

## 3- التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين:

يحدث التوازن في السوق إذا كانت الكمية المعروضة من سلعة ما مساوياً للكمية المطلوبة منها. وهذه الحقيقة تعين سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن.

**مثال:**

- إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي  $Q_D = 20 - P$
- وان دالة العرض لنفس السلعة هي  $Q_S = P - 10$
- أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن



# تابع الحل :

الحل:

يحدث التوازن عندما تتساوي الكميتان المطلوبة والمعرضة .

$$Q_S = Q_D$$

$$P - 10 = 20 - P$$

$$P + P = 20 + 10$$

$$2P = 30$$

$$\therefore P = \frac{30}{2} = 15$$

الحل بالالان

$$X - 10 = 20 - X$$



## تابع: الحل:

نعوض سعر التوازن في إحدى الدالتين، ولتكن دالة العرض

$$\therefore Q_s = 15 - 10 = 5$$

إذا كانت الكمية



## تمارين:

1. هل الدالة  $f(x) = 3x^2 - 4x$  دالة زوجية؟ ✗
2. هل الدالة  $f(x) = 3x^3 - 4x$  دالة فردية؟ ✓
3. هل الدالة  $f(x) = 2x^2 + x$  دالة فردية؟ ✗
4. هل الدالة  $f(x) = x^3 - 4$  دالة زوجية؟ ✗
5. هل الدالة  $f(x) = x^3 - x$  زوجية أم فردية أم غير ذلك؟





## تمارين:

6. إذا كان  $\sec \theta = 2$  ، فأوجد النسب الأساسية  $\sin \theta$  ،  $\cos \theta$  ،  $\tan \theta$  ومقلوب كلاً من  $\sin \theta$  و  $\tan \theta$  .

7. إذا كان  $\tan \theta = \frac{15}{8}$  ، فأوجد  $\sin \theta$  ،  $\cos \theta$  ،  $\sec \theta$  ،  $\csc \theta$  ،  $\cot \theta$

8. إذا دالة الطلب على سلعة معينة:  $Q_D = 100 - 5P$  فأوجد

(أ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما  $P = 19$  . 5

(ب) سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة  $Q_D = 50$  . 10

(ج) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل، أي  $P = 0$  .

100



## تمارين:

9. إذا دالة العرض على سلعة معينة:  $Q_s = 4P - 5$  فأوجد

أ)  $Q_s$  إذا كانت  $P = 5$  . ١٥

ب)  $P$  إذا كانت الكمية المطلوبة  $Q_s = 7$  . 3



## تمارين:

10. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي  $Q_D = 25 - \frac{1}{2}P$  وان دالة العرض لنفس السلعة هي  $Q_S = 2P - 50$  أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن  $Q = 10$  ,  $P = 30$

11. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي  $Q_D = 3P - 4$

وان دالة العرض لنفس السلعة هي  $Q_S = 36 - 2P$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن  $3x - 4 = 36 - 2x$

$$Q = 20 \quad P = 8$$



# المحاضرة السابعة الجزء الاول

مجال الدالة:



# مجال الدالة:

**تعريف:** مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون عندها قاعدة الدالة معرفة. وكثيرات الحدود مجالها  $R$

**عند البحث عن مجال الدالة لابد من الانتباه للأمور الآتية:**

- أ- أن لا يكون المقسوم عليه صفراً .
- ب- أن لا يكون هناك مقدار سالب تحت جذر دليله زوجي.
- ج- أن لا يكون مقدار اخذ لو غار يتمه مقداراً سالباً.
- د- النقاط الفاصلة للدوال المعرفة وفق أكثر من قاعدة.
- هـ- الشروط الإضافية الموضوعه على قاعدة الدالة.



## تابع: مجال الدالة:

أمثلة:

أوجد مجال الدوال التالية : كثيرات الحدود

$$1) f(x) = 3x^2 + 5x - 7$$

الحل:

الدالة معرفة لجميع قيم  $x$  إذاً المجال هو  $\mathbb{R}$ .



## تابع: مجال الدالة:

$$2) f(x) = \sqrt{x+4}$$

**الحل:**

يجب أن يكون المقدار  $x+4 \geq 0$  وذلك لوجود الجذر التربيعي أي  $x \geq -4$  إذاً المجال هو الفترة  $[-4, \infty)$ .



## تابع: مجال الدالة:

$$3) f(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

**الحل:**

المجال R لان دليل الجذر فردي.





## تابع: مجال الدالة:

$$4) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

**الحل:**

لوجود الجذر التربيعي يجب أن يكون  $x^2 + 4 \geq 0$  وهذا صحيح لجميع قيم  $x$  إذاً المجال هو  $R$ .



## تابع: مجال الدالة:

يجب ان لا يكون المقام صفر  
لهذا استثنينا رقم  
2 لان  $x - 2 = 0$  = صفر

$$5) \quad f(x) = \frac{3x + 5}{x - 2}$$

**الحل:**

يجب أن لا يكون المقام صفراً ، ويكون  $x - 2 = 0$  عندما  $x = 2$  ،  
إذاً المجال هو  $R$  ما عدا 2 .

وتكتب اصيلاً  
 $R - \{2\}$



تابع: مجال الدالة :

الاعداد الحاصلة {1} - R

$$6) f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , x > 1 \\ 7x - 6 & , x < 1 \end{cases}$$

الحل:

الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة ولكنها غير معرفة عند  $x=1$ ،  
إذاً المجال هو  $R - \{1\}$ .



## تابع: مجال الدالة :

$$7) f(x) = \begin{cases} x + 7 & , 1 < x \leq 4 \\ 3x - 5 & , 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

**الحل:**

الدالة معرفة بقاعدتين وهناك قيودا بان  $1 < x \leq 8$  اذاً المجال هو

الفترة  $(1, 8]$

نقل الفترة  
< تجعلها مفتوحة



تابع: مجال الدالة :

الحال صحيح  $(-\infty, \infty)$

$$8) f(x) = \log(2x + 4)$$

باللابة :-  
 $2x + 4 = 0$

الحل: الناتج -2

بسبب وجود اللوغاريتم يجب أن يكون  $2x+4 > 0$ ، أي  $x > -2$  ،  
إذاً المجال هو الفترة  $(-2, \infty)$



## تابع: مجال الدالة :

الحرر وصاه فعل الحاصل

$$9) f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x}$$

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 \\ \therefore x &= -4 \end{aligned}$$

بالإشارة

$$\begin{aligned} 3-x &= 0 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

الحل:

يوجد جذران ، في الأول يجب ان يكون  $x+4 \geq 0$  أي  $x \geq -4$  وفي الثاني يجب أن يكون  $3-x \geq 0$  أي  $3 \geq x$  ، اذاً المجال هو الفترة التي تحقق الشرطين معاً، أي المجال هو الفترة  $[-4, 3]$



# تمارين:

أوجد مجالات الدوال التالية:

1.  $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

الدالة معرفة لجميع قيم  $x$  إذا  $\mathbb{R}$

2.  $f(x) = \log(3x + 7)$

$(-\frac{7}{3}, \infty)$

3.  $f(x) = \frac{2x + 8}{x + 4}$

$\mathbb{R} - \{-4\}$

4.  $f(x) = \sqrt{x + 1}$   $[-1, \infty)$



# تابع : تمارين:

6.  $f(x) = \frac{3x + 8}{x^3 - 1}$

Handwritten red scribbles.

7.  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Handwritten red annotations: The number 0 in the first interval is circled, and the number 2 in the second interval is circled. Arrows point from these circles to a handwritten red box containing the interval [0, 2].





# المحاضرة السابعة

## الجزء الثاني

رسم الدوال:



# رسم الدوال:

## الخطوات:

1. نقوم بإنشاء جدول بقيم  $x$  وقيم  $y$  المناظرة لها للحصول على الأزواج المرتبة التالية:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$
2. نرسم المحاور الديكارتية ونقوم بتدريج كل منهما تدريجاً مناسباً .
3. نقوم بتعيين هذه النقاط على المستوى الديكارتي ثم توصيلها بصورة ملساء للحصول على منحنى الدالة.



# رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

هناك صيغ قياسية لبعض الدوال مثل:

1. دالة خط مستقيم وتسمى دالة التطابق

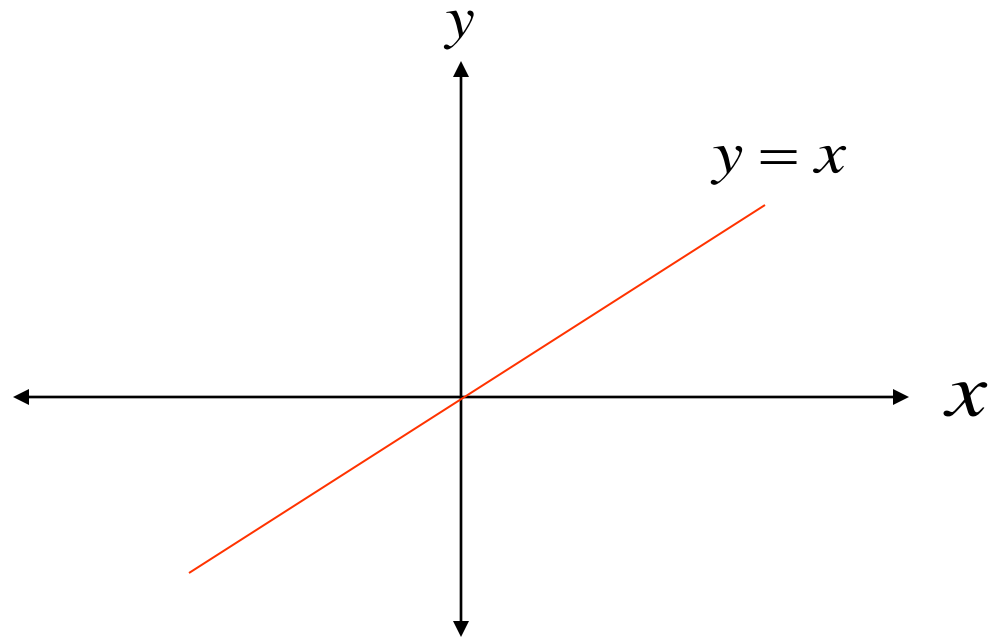
مثال: ارسم الدالة  $y = f(x) = x$

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3



# تابع: الحل:



# رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

## 2. الدالة التربيعية:

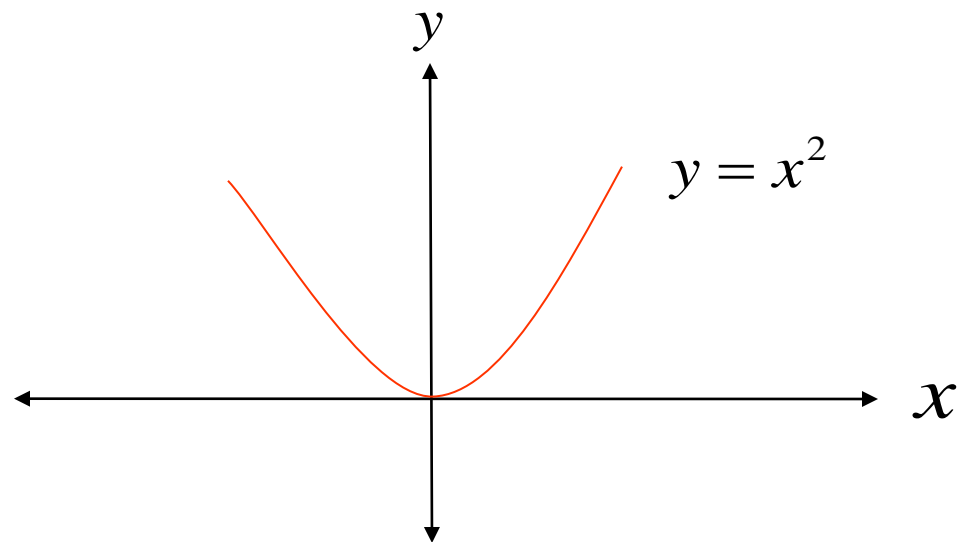
مثال: ارسم الدالة  $y = f(x) = x^2$

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	9	4	1	0	1	4	9



# تابع: الحل:



# رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

## 3. الدالة التكعيبية:

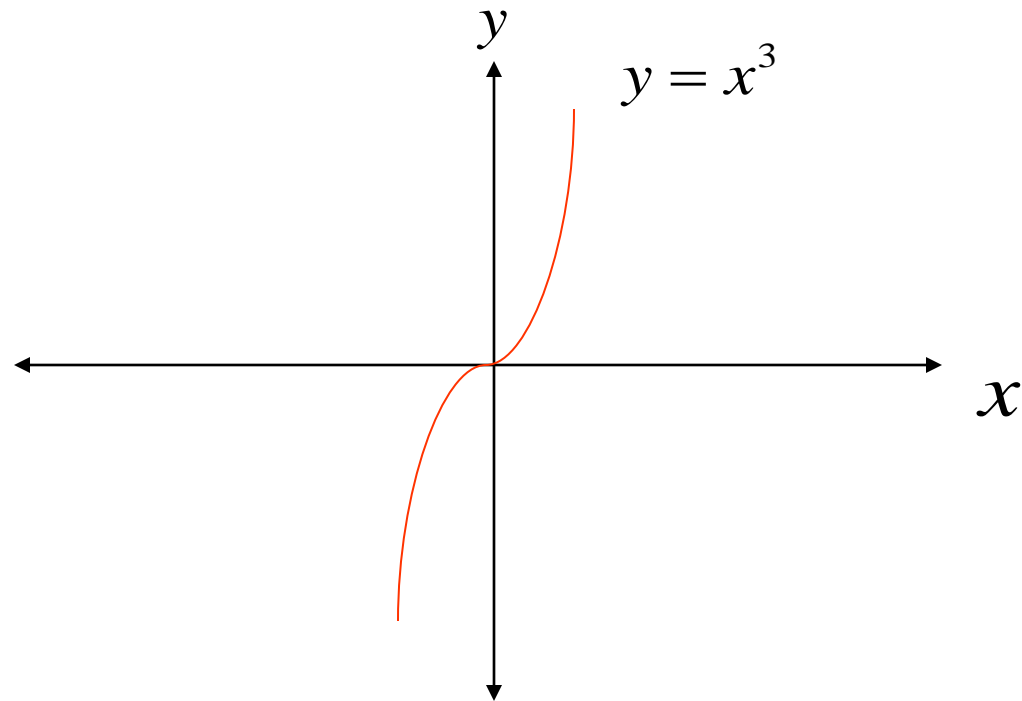
مثال: ارسم الدالة  $y = f(x) = x^3$

الحل:

x	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	-8	-1	0	1	8



# تابع: الحل:





# رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

الإحداثيات  
معرفة لـ  
عوض

4. الدالة الجذر التربيعي:

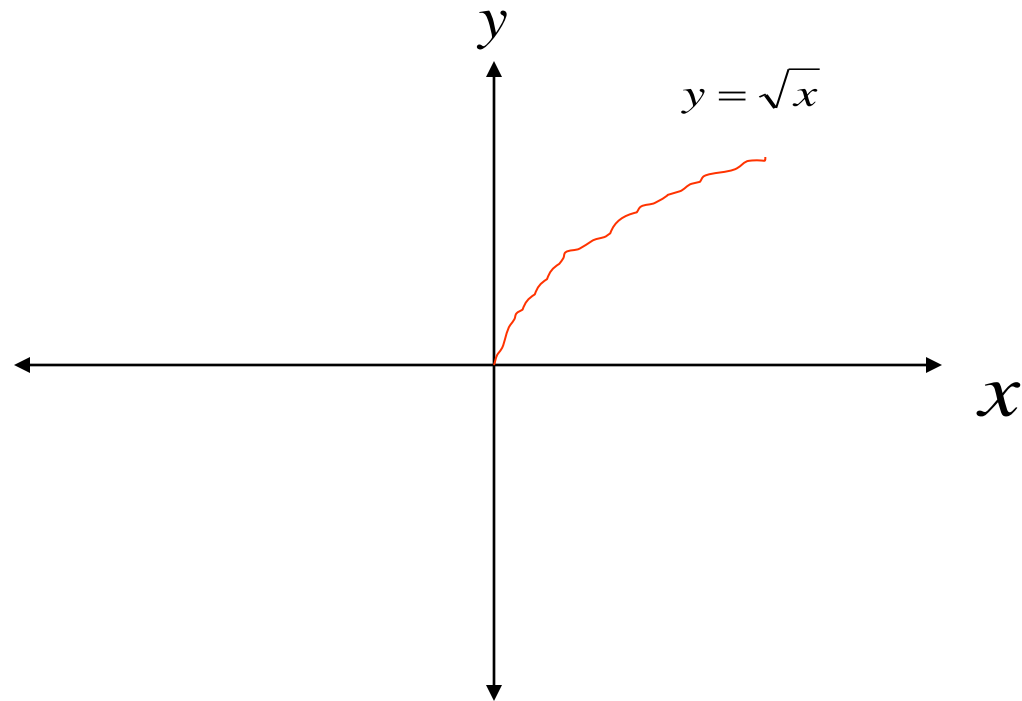
مثال: ارسم الدالة  $y = f(x) = \sqrt{x}$

الحل:

x	0	1	2	3	4
y=f(x)	0	1	1.4	1.7	2



# تابع: الحل:



# رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

5. دالة القيمة المطلقة:

التمرين يطلب لأي

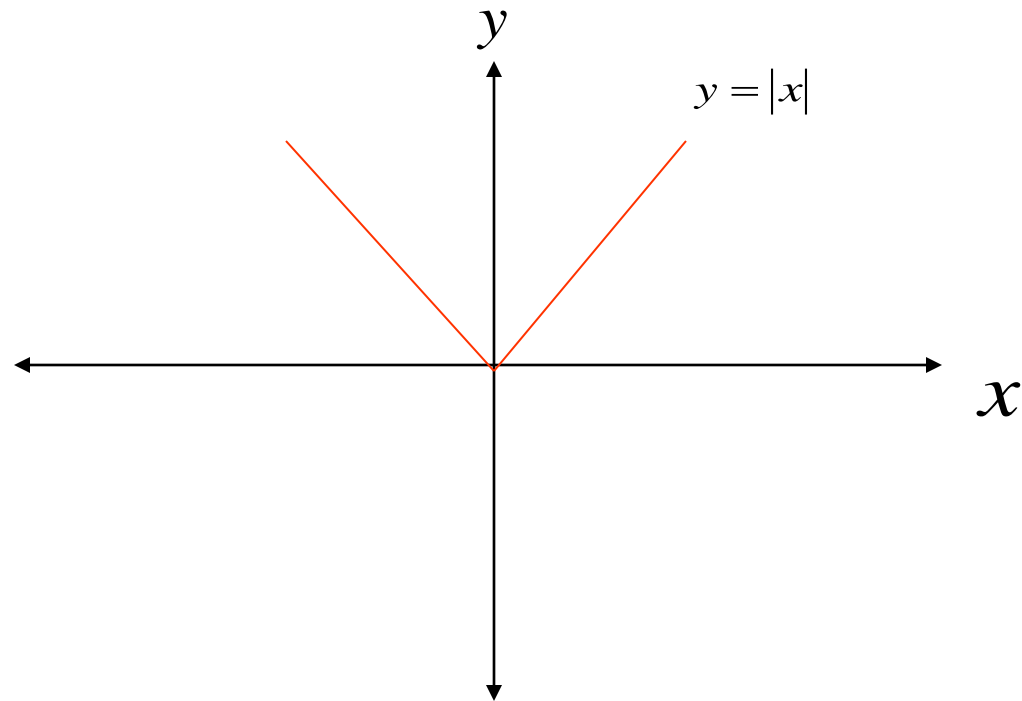
مثال: ارسم الدالة

الحل:  $y = f(x) = |x|$  مقدرتي التمرين لوجه ل

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	3	2	1	0	1	2	3



# تابع: الحل:



# ملاحظات على رسم الدوال:

## 1. الإزاحة إلى الأعلى:

يمكن الحصول على منحنى  $y = f(x) + c$  بإزاحة منحنى  $y = f(x)$  بمقدار  $c$  وحدة إلى أعلى ( على محور  $y$  ).

**مثال:**

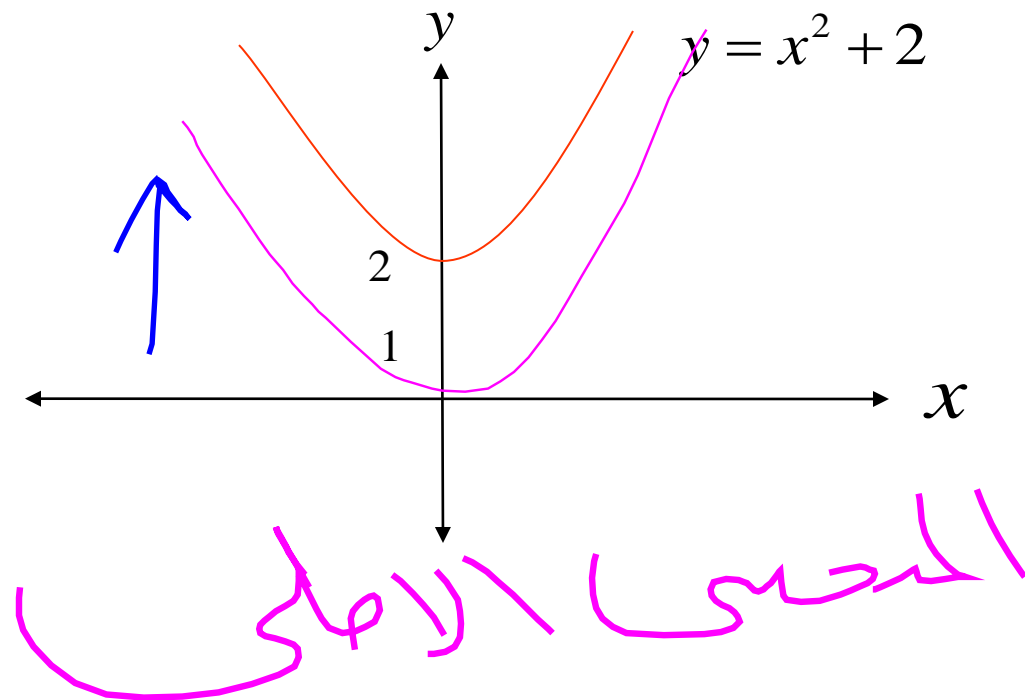
ارسم منحنى الدالة  $y = x^2 + 2$

**الحل:**

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة  $y = x^2$  وحدتين إلى أعلى كما يلي:



# تابع: الحل:



# ملاحظات على رسم الدوال:

## 2. الإزاحة إلى الأسفل:

يمكن الحصول على منحنى  $y = f(x) - c$  بإزاحة منحنى  $y = f(x)$  بمقدار  $c$  وحدة إلى أسفل ( على محور  $y$  ).

مثال:

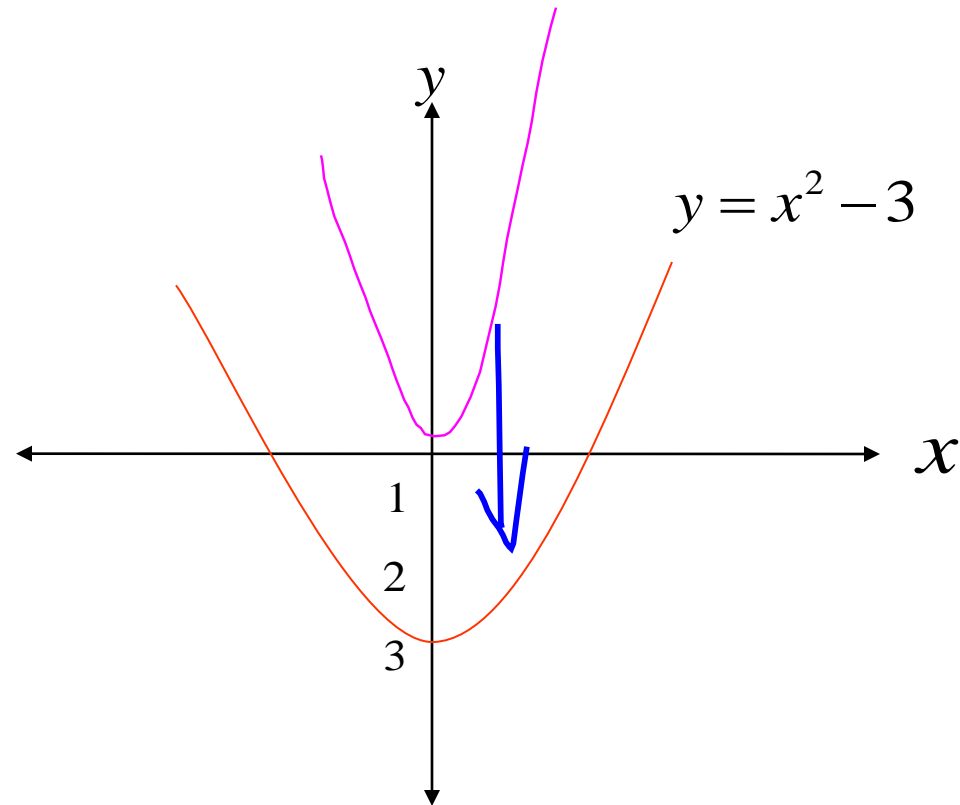
ارسم الدالة  $y = x^2 - 3$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة  $y = x^2$  ثلاث وحدات إلى أسفل كما يلي:



# تابع: الحل:





# تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

## 3. الإزاحة إلى اليمين:

يمكن الحصول على منحنى  $y = f(x-c)$  بإزاحة منحنى  $y = f(x)$  بمقدار  $c$  وحدة إلى اليمين (على محور  $x$ ).

مثال:

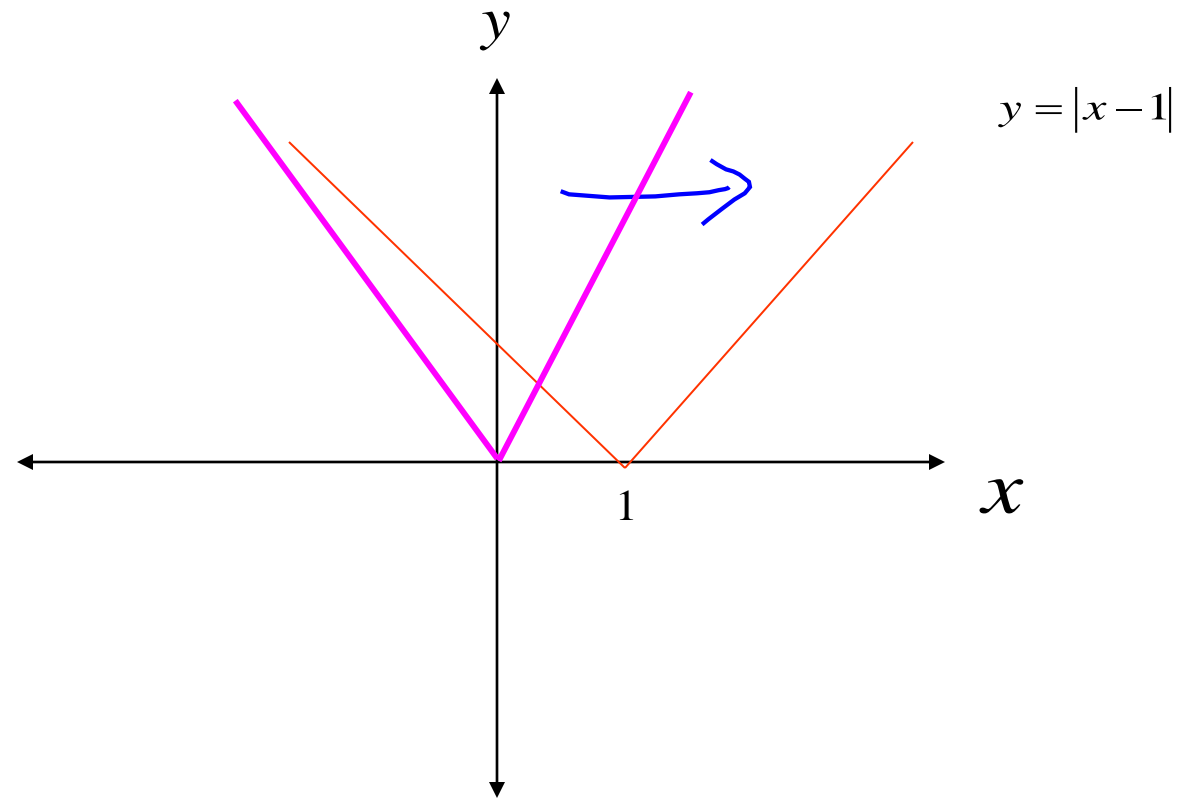
$$y = |x-1|$$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة  $y = |x|$  وحدة واحدة إلى اليمين كما يلي:



# تابع: الحل:



# تابع: ملاحظات على رسم الدوال :

## 4. الإزاحة إلى اليسار:

يمكن الحصول على منحنى  $y = f(x+c)$  بإزاحة منحنى  $y = f(x)$  بمقدار  $c$  وحدة إلى اليسار ( على محور  $x$  ).

مثال:

ارسم الدالة  $y = |x+3|$  → تتصلب عى  
 $y = |x| + 3$   
الحل:

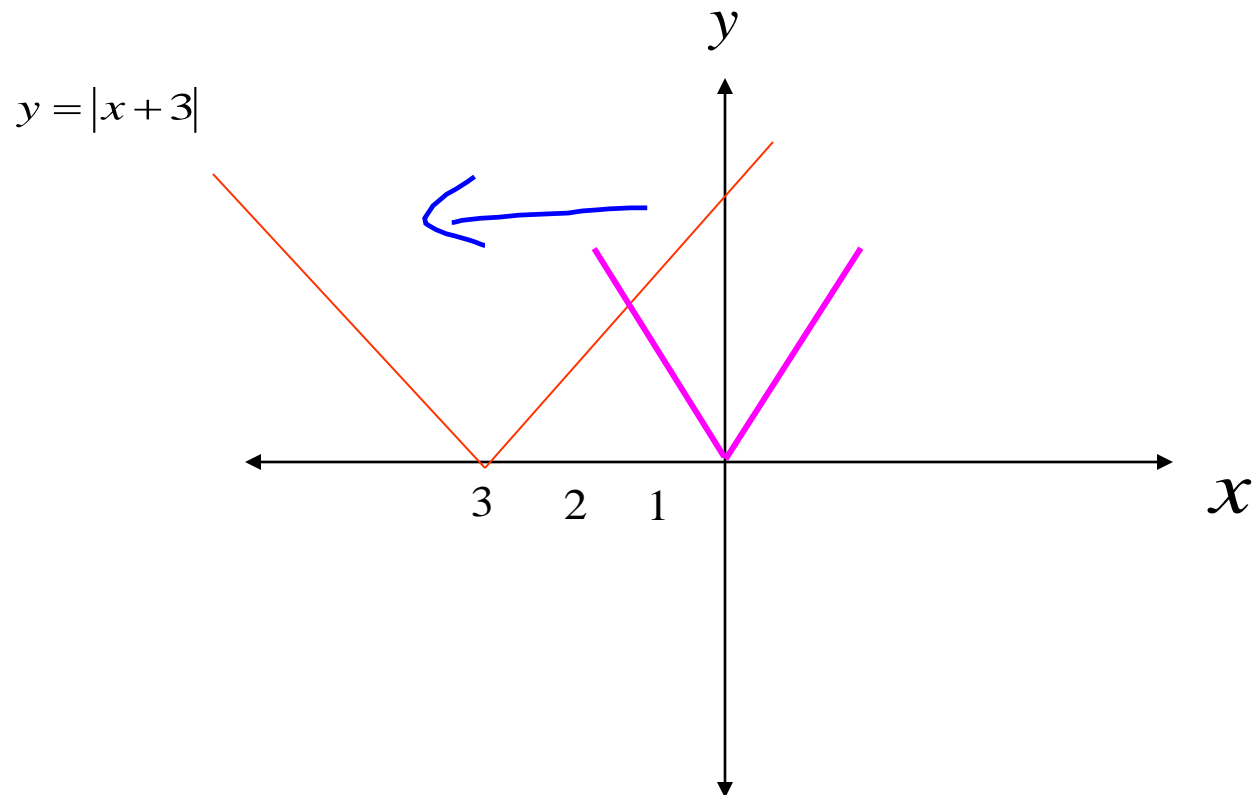
نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة  $y = |x|$  ثلاث وحدات إلى

اليسار كما يلي:

إذا كان الجمع خارج القيمة المطلقة او خارج الجذر او خارج الاس التربيعي او الاس التكعيبي فتصبح الازاحة الى اعلى واذا كانت الإشارة سالبة فتصبح الازاحة الى اسفل كما في القانون ١ و ٢ للازاحة الى اعلى واسفل



# تابع: الحل:



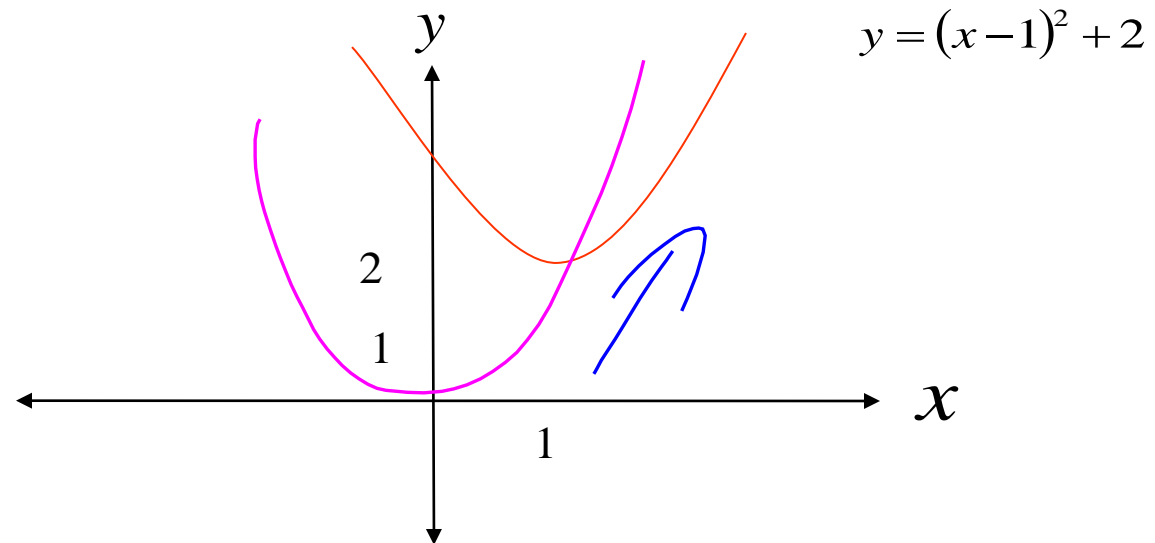
# تابع: رسم الدوال :

مثال: ارسم الدالة  $y = (x-1)^2 + 2$  ارسم الدالة  $y = x^2$  وحدة واحدة إلى اليمين ثم وحدتان إلى أعلى كما يلي:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة  $y = x^2$  وحدة واحدة إلى اليمين ثم وحدتان إلى أعلى كما يلي:



# تابع: الحل:



# تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

## 5. الانعكاس على محور X:

يمكن الحصول على منحنى  $y = -f(x)$  بانعكاس منحنى  $y = f(x)$  على محور X .

مثال:

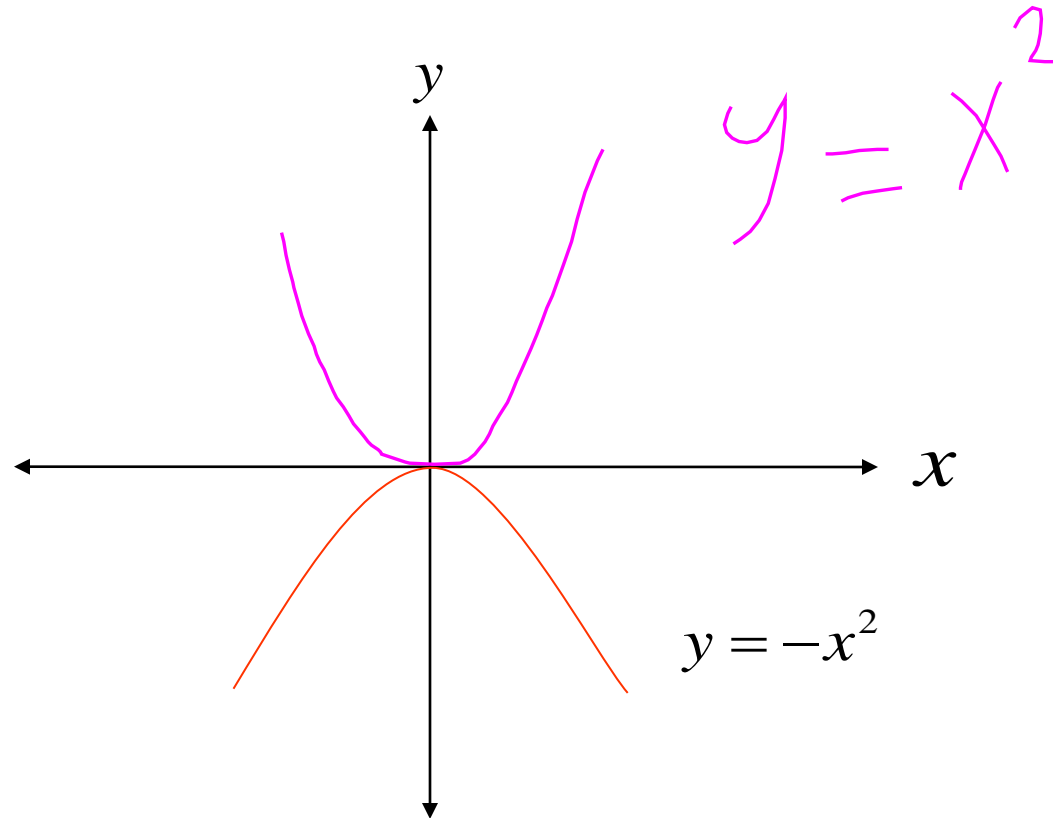
ارسم الدالة  $y = -x^2$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة  $y = x^2$  على محور X كما يلي:



# تابع: الحل:





# تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

مثال:

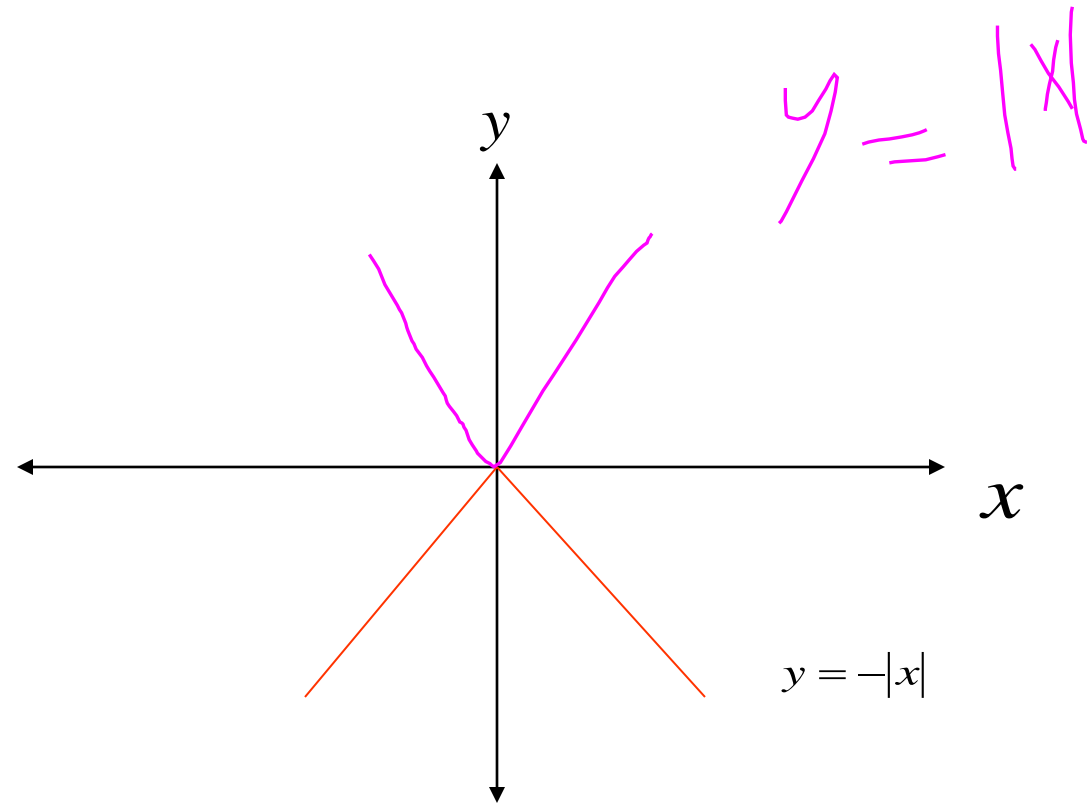
ارسم الدالة  $y = -|x|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة  $y = |x|$  على محور  $x$  كما يلي:



# تابع: الحل:



# تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

مثال:

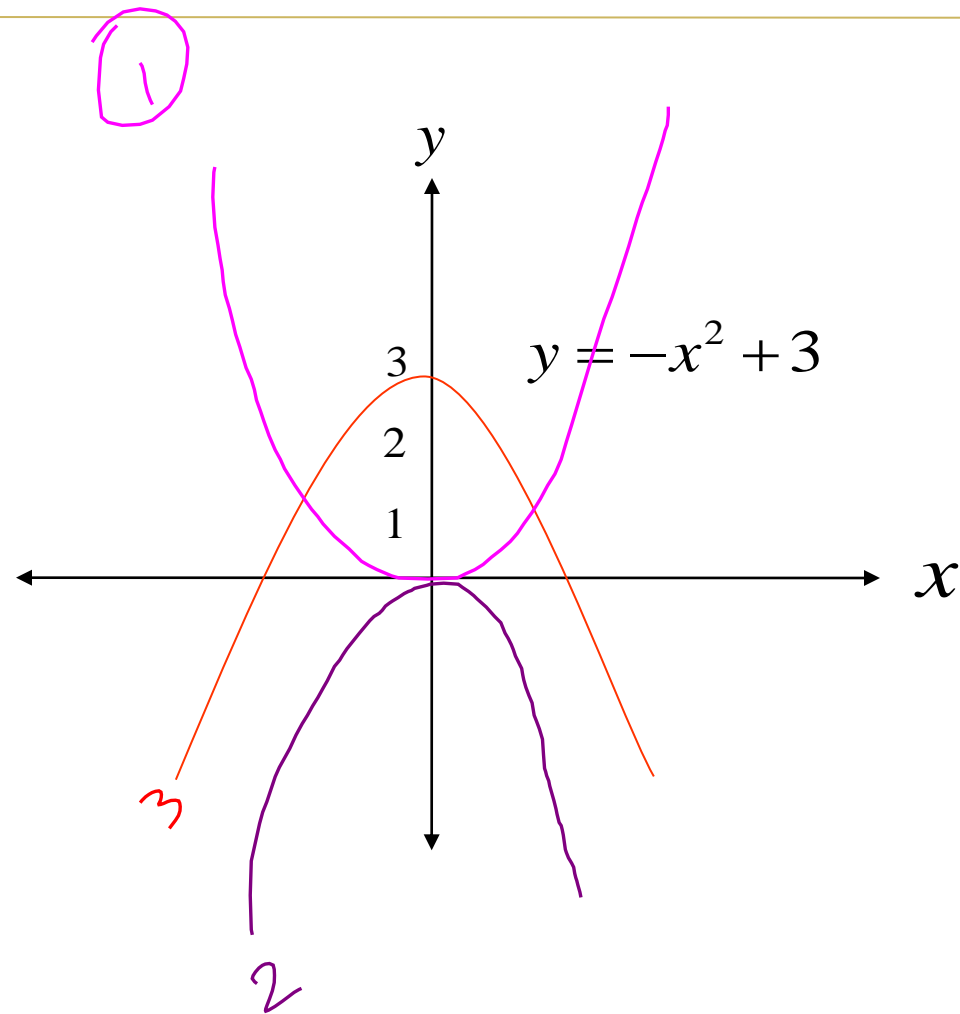
ارسم الدالة  $y = -x^2 + 3$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة  $y = x^2$  على محور  $x$  ثم إزاحته ثلاث وحدات إلى أعلى كما يلي:



# تابع: الحل:



# تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

## 6. الانعكاس على محور $y$ :

يمكن الحصول على منحنى  $y = f(-x)$  بانعكاس منحنى  $y = f(x)$  على محور  $y$ .

مثال:

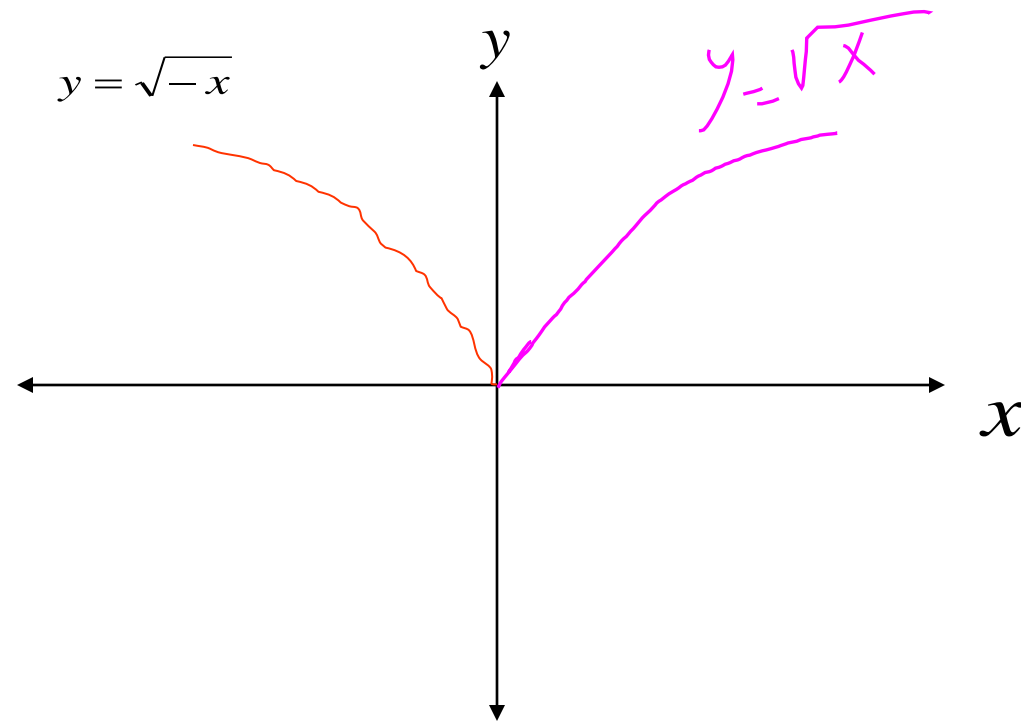
ارسم الدالة  $y = \sqrt{-x}$   $\rightarrow$  عكس  $y = \sqrt{x}$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة  $y = \sqrt{x}$  على محور  $y$  كما يلي:



# تابع: الحل:



# تمارين:

ارسم الدوال التالية:

1.  $f(x) = x + 4$  اعلى
2.  $f(x) = x^2 - 4$  اسفل
3.  $f(x) = x^2 + 1$  اعلى
4.  $f(x) = (x + 2)^2 - 1$  اعلى + اسفل
5.  $f(x) = (x - 3)^2$  ليس
6.  $f(x) = -(x + 2)^2$  ليس معلوم



# تمارين:

حسب

7.  $f(x) = |x - 3| + 4$  — أعلى

8.  $f(x) = (x - 2)^3$  — / —

9.  $f(x) = \sqrt{-x}$  ← مطلوب +

10.  $f(x) = -|x| - 2$  ↓  
مطلوب إلى الأسفل





# المحاضرة الثامنة

## النهايات

## Limits



# النهايات:

## مفهوم النهاية:

نهاية الدالة يقصد بها إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة. وعادة تكتب النهايات على الصيغة  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  وتقرأ نهاية الدالة  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  من القيمة  $a$  ( $x \rightarrow a$ )

## مثال:

إذا كانت  $f(x)=2x+1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  يعني إيجاد قيمة الدالة  $f(x)$  عندما قيمة  $x$  تؤول إلى 2. وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5.



# تابع: النهايات:

## جبر النهايات:

1. إذا كانت  $f(x) = c$  ، حيث  $c$  عدد حقيقي فان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  لكل عدد حقيقي  $a$  .

2. إذا كانت  $f(x) = x$  فان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  لكل عدد حقيقي  $a$  .

وكذلك إذا كانت  $f(x) = mx + b$  ، حيث  $m$  و  $b$  عددان

حقيقيان فان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ma + b$



# تابع: النهايات:

مثال:

أوجد قيمة كل مما يأتي:

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} 2$

2.  $\lim_{x \rightarrow -2} x$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4)$

4.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5)$

الإجابة  
Mode 7  
نكتب الماركة  
start

الحل  
المدى  
ويخرج الحل



# تابع: النهايات:

الحل:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} 2 = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} x = -2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$$



## تابع: النهايات:

3. إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  ، وكانت  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$  وكانت  $c$  أي عدد حقيقي ، فان:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \pm k$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \times l$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \times \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = l \times k$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{l}{k} , k \neq 0$$



# تابع: النهايات:

مثال:

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ ،  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

فأوجد مما يلي:

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} [h(x) - f(x)]$   $5 \sim$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \times h(x)]$   $-84$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 2} 8f(x)$   $40$



# تابع: النهايات:

iv.  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + h(x) + g(x)]$  7,5

v.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{f(x)}$  2,1





## تابع: النهايات:

الحل:

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 2} [h(x) - f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= 10.5 - 5 = 5.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \times h(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \\ &= -8 \times 10.5 = -84 \end{aligned}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} 8f(x) = 8 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$



# تابع: النهايات:

الحل:

$$\begin{aligned}\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + h(x) + g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \\ &= 5 + 10.5 + (-8) \\ &= 15.5 - 8 = 7.5\end{aligned}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{10.5}{5} = 2.1$$



## تابع: جبر النهايات:

4. إذا كانت  $f(x)$  دالة كثيرة حدود ،  $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$

فان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_n a^n = f(a)$$

مثلاً :

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4x + 3) = 5^2 - 4 \times 5 + 3$$

$$\begin{array}{l} \text{أضرب} \\ x^2 - 4x + 3 \end{array} = 25 - 20 + 3 = 8$$



# تابع: جبر النهايات:

## ملاحظة:

فان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  اذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{l}$$



# تابع: النهايات:

## نظرية:

إذا كانت النهاية  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  موجودة و  $n$  عددا صحيحاً موجباً فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

## مثلاً:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3x - 1]^6 = \left[ \lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1 \right]^6 = [3 \times 1 - 1]^6 = [3 - 1]^6 = 2^6 = 64$$

$$(3x - 1)^6 = 64$$

بالإشارة 64



# تابع: النهايات:

أمثلة:

$$3x^3 + 5x^2 - 7$$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 + 5x^2 - 7) = 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7$$

$$= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7$$

$$= 24 + 20 - 7 = 37$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 7}{x - 5} = \frac{3 \times 3^2 + 7}{3 - 5} = \frac{3 \times 9 + 7}{-2} = \frac{27 + 7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$$

$$\frac{3x^2 + 7}{x - 5}$$



## تابع: النهايات:

موجوده في الاصل  
زر  $\times 10^4$  قايحتها 2.7182

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} e^{x+2} = e^{2+2} = e^4$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} = \frac{1 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

حاله اذا لا محرم لتعيين  
كمية غير معينة

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \ln(2x - 5) = \ln(2 \times 3 - 5) = \ln(6 - 5) = \ln 1 = 0$$

بالا  
لها زر  $\ln$



## تابع: النهايات:

$$\begin{aligned} 6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \log(3x^2 + 5) &= \log(3 \times 2^2 + 5) \\ &= \log(3 \times 4 + 5) \\ &= \log(12 + 5) \\ &= \log 17 \end{aligned}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 + 4x - 2)^3 = (3 \times 1^3 + 4 \times 1 - 2)^3 = (3 + 4 - 2)^3 = 5^3 = 125$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9}$$

لو كان العدد يقبل الجذر مثل  $\sqrt[3]{9}$  فكتب  
النتيجة ٢ اما في هذه الحالة فالتيا كسر  
فتذكرها كما هي





## تابع: النهايات:

3. إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

وأردنا إيجاد  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات:

i. تقع  $a$  ضمن مجال القاعدة الأولى



# تابع: النهايات:

ii. تقع  $a$  ضمن مجال القاعدة الثانية

iii. تقع  $a$  على الحد الفاصل بين المجالين

مثال: إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد

i.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$     ii.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$     iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

قواعد النهايات

في الحدود الداخلية

في الحد الفاصل



## تابع: النهايات:

الحل:

i. تقع 3 ضمن مجال القاعدة الثانية لان  $3 > 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (7x - 2) = 7 \times 3 - 2 = 21 - 2 = 19$$

ii. تقع  $\frac{1}{2}$  ضمن مجال القاعدة الأولى لان  $\frac{1}{2} < 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (3x^2 + 5) = 3 \left( \frac{1}{2} \right)^2 + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$



## تابع: النهايات:

المسألة

iii. تقع 1 على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا نحسب النهاية من اليمين (أي  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ) والنهاية من اليسار (أي  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ )

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (7x - 2) = 7 \times 1 - 2 = 7 - 2 = 5$$

أكبر من 1 يعني نعوض في المعادلة الثانية

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + 5) = 3 \times 1^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

أصغر من 1 لذا نعوض في المعادلة الأولى

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

غير موجودة



# تمارين

أ- إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ ،  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ ، و  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$  فأوجد مما يلي:

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} [5f(x) - 4h(x)] = (5 \times 5) - (4 \times 10.5) = -17$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ -\frac{1}{2}g(x) \times h(x) \right] = (-\frac{1}{2} \times -8) \times 10.5 = 42$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 2h(x) + 3g(x) - 2]$  لمن



## تابع: تمارين:

iv.  $\lim_{x \rightarrow 2} [8f(x) - g(x) \times h(x)]$  (8 (5)) - ((-8)(10,5)) = 124

v.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$   $-\frac{8}{5}$

vi.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{2f(x)}$   $\frac{21}{20}$



# تابع: تمارين:

ب- أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{غير موجود}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 3}{x + 4} = \frac{1}{6}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$



## تابع: تمارين:

$$5. \lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[4]{x^2 - 3x - 8} = x^2 - 3x - 8 = 10 = \sqrt[4]{10}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \log(2x + 4) = \setminus$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^2 + 1) = \setminus, 6$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 5x + 1)^2 = 4$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \setminus$$





# المحاضرة التاسعة

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة

(حالات عدم التعيين) والاتصال



# نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

الكمية الغير معينة هي الكمية التي ليس لها جواب محدد.

من أهم حالات عدم التعيين التي تظهر عند حساب النهايات هي:

$$\frac{0}{0} \quad \text{و} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

يمكن إزالة حالة عدم التعيين بإحدى الطرق التالية:

أولاً: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر =  $\frac{0}{0}$  نعالج الحالة كما يلي:

أ- إذا كانت البسط والمقام كثيرتا حدود:



# تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

التحليل والاختصار ثم التعويض

**مثال:**

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \frac{(\cancel{x+1})(x-1)}{\cancel{x+1}} = x-1$$

**الحل:**

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} = \frac{1 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة



## تابع: النهايات:

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -1-1 = -2$$



## تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x+3)(\cancel{x-3})}{\cancel{x-3}} = x + 3$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3 + 3 = 6$$



## تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{1^2 - 3 \times 1 + 2}{1 - 1} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = 1 - 2 = -1$$



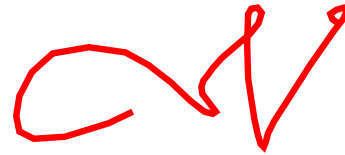
# تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ب- إذا احتوت الدالة على جذر:

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

$$1. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$



أوجد نهاية كل مما يلي:

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \frac{3 - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط  $(\sqrt{x} + 3)$



# تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

حاصل ضرب عددين  $x =$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9} + 3} \\ &= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$





## تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = \frac{\sqrt{2+2} - 2}{2-2} = \frac{\sqrt{4} - 2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط  $(\sqrt{x+2} + 2)$

قدا صو المرافق  
ويشئ الصدر



## تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$



# تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ثانياً: عندما  $x \rightarrow \infty$

عندما تكون نتيجة التعويض المباشر  $\frac{\infty}{\infty}$  نتبع ما يلي:  
نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على  $x$  بأكبر أس أو نستخدم النتيجة التالية إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود.

نتيجة:

إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  كثيرتا حدود و  $x \rightarrow \infty$  فان:

$$1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.

لكون السهم  
هـ



# تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}$$

إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام.

$$3- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.



# تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ملاحظة:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \right)^n = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right]^n = 0$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \right)^3 = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right]^3 = 0$$



# تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

**مثال:**

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5}$$

**الحل:**

بما أن درجة البسط = درجة المقام إذاً:

معامل  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \frac{1}{3}$$



## تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^0 - 2}{x^{\textcircled{2}} + 2x + 1}$$

**الحل:**

بما أن درجة البسط أقل من من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 1} = 0$$



## تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\textcircled{3}} + x}{x^{\textcircled{2}} + 5}$$

**الحل:**

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام إذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 5} = \infty$$





## تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x^3 + 7}$$

**الحل:**

بما أن درجة البسط = من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x^3 + 7} = \frac{5}{2}$$



# تابع: تمارين:

بالامكان استخدام الالة لحل  
المعادلات وايجاد المعامل المشترك  
باقي عليك تحدد الاشارة

أوجد النهايات التالية:

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x+4)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x+3)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2 + 5x + 4} = \frac{x+4}{(x+4)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} = \frac{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} = \frac{9 - x}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} = \frac{-(x - 9)}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} = \frac{-1}{3 + \sqrt{x}} = -\frac{1}{6}$$

ملاحظة عند حل المعادلة بالالة يكون الناتج  
٢- و٣- فيجب عندها اخذ اشارة الاوسط او  
التجريب للتأكد في حال ضرب الناتج هل  
يعطيني نفس المعادلة ام لا

نضرب البسط بالكامل مع تغيير  
اشارة المرافق فقط وليس الجذر



## تابع: تمارين:

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1} = 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4} = \frac{7}{2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1} = \infty$$



# الاتصال:

## تعريف:

يقال للدالة  $f(x)$  متصلة في نقطة  $c$  إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

أ- الدالة معرفة في  $c$  أي أن  $f(c)$  معرفة

ب-  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجودة

ج-  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$



## تابع: الاتصال:

مثال(1):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & , x \neq -3 \\ -6 & , x = -3 \end{cases}$$

متصلة في  $x = -3$  ؟



# تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(-3) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{9 - 9}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} x - 3 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = -6$$

بما أن

إذاً الدالة متصلة في  $x = -3$



# تابع: الاتصال:

مثال (2):

عمومي (الاي)

هل الدالة المعرفة بـ

$$2(2) - 3$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$$

متصلة في  $x=2$  ؟



# تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 3) = 2 \times 2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

بما أن  
إذاً

إذاً الدالة غير متصلة في  $x=2$  غير موجودة  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$





# تابع: الاتصال:

مثال (3):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x < 2 \\ 1 & , x = 2 \\ 5 - x & , x > 2 \end{cases}$$

متصلة في  $x=2$  ؟



# تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (5 - x) = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) \quad \text{بما أن}$$

إذاً الدالة غير متصلة في  $x=2$



## تابع: الاتصال:

مثال (4):

أثبت أن الدالة  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$  غير متصلة في  $x = -2$

الحل:

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

غير معرفة

إذاً الدالة غير متصلة في  $x = -2$

إذا كانت الدالة غير معرفة يعني ما في قيمة مباشرة لـ  $a$  من البداية فما في داعي نحاول نعدلها لو كان السؤال يطلب الاتصال كما هو اعلاه



# تمارين:

بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة متصلة أو غير متصلة في العدد  $x$  المعطى

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 2 + x & , x < 2 \\ 2 - x & , x \geq 2 \end{cases}$$

في  $x=2$  غير متصل

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq -1 \\ x - 1 & , x < -1 \end{cases}$$

في  $x=-1$  متصل



$$f(x) = (1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1)^2 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \neq \lim_{x \rightarrow 1}$$

تمارين:

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ 2 & , x > 1 \end{cases}$$

في  $x=1$   
غير متصل

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & , x < 2 \\ 3 & , x = 2 \\ 5-x & , x > 2 \end{cases}$$

في  $x=2$   
متصل



# المحاضرة العاشرة

## الاشتقاق



# الاشتقاق:

## متوسط التغير:

إذا كانت  $y=f(x)$  فان أي زيادة في المتغير المستقل  $x$  قدرها  $\Delta x$  تحدث تغير في المتغير التابع  $y$  قدره  $\Delta y$  . النسبة بين التغير في  $y$  إلى التغير في  $x$  تسمى متوسط التغير للدالة.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{إذا}$$

لأي  $x_1$  و  $x_2$  في مجال الدالة  
حيث  $x_2 = x_1 + \Delta x$



## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد متوسط التغير للدالة  $f(x) = x^2 + 2$  عندما تتغير  $x$  من 1 إلى 1.5

**الحل:**

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 1.5$$

$$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$f(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 2.25 + 2 = 4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4.25 - 3}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$





## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد متوسط التغير للدالة  $f(x) = 3x + 2$  عندما تتغير  $x$  من 1 إلى 2

**الحل:**

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

$$f(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$f(2) = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$



## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد متوسط التغير للدالة  $f(x) = x^2 + 2$  عندما تتغير  $x$  من 2 إلى 4

**الحل:**

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 4$$

$$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$f(4) = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 6}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$$



## تابع: الاشتقاق:

### تعريف المشتقة الأولى:

نهاية متوسط التغير للدالة عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  (ان وجدت) تسمى المشتقة الأولى للدالة  $y = f(x)$  بالنسبة للمتغير  $x$  ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] , y' , \frac{dy}{dx} , f'(x)$$

إذاً

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل (المبادئ الأولية للتفاضل)



# تابع: الاشتقاق:

## جبر الاشتقاق:

1. إذا كانت  $y = x^n$  حيث  $n$  عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

**مثال:** أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I.  $y = x^5$

II.  $y = x^{-3}$

III.  $y = x^{\frac{1}{2}}$



# تابع: الاشتقاق:

الحل:

I.  $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

II.  $\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$

III.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$



## تابع: الاشتقاق:

2. إذا كانت  $y = c$  حيث  $c$  كمية ثابتة فان:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

**مثال:** أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I.  $y = 5$

II.  $y = -10$

III.  $y = \frac{3}{4}$



# تابع: الاشتقاق:

الحل:

I.  $\frac{dy}{dx} = 0$

II.  $\frac{dy}{dx} = 0$

III.  $\frac{dy}{dx} = 0$



## تابع: الاشتقاق:

3. إذا كانت  $y = cx^n$  حيث  $c$  عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = n.c x^{n-1}$$

**مثال:** أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I.  $y = 3x^4$

II.  $y = -2x^7$

III.  $y = 16x^{\frac{1}{2}}$





# تابع: الاشتقاق:

الحل:

I.  $\frac{dy}{dx} = 12x^3$

II.  $\frac{dy}{dx} = -14x^6$

III.  $\frac{dy}{dx} = 8x^{-\frac{1}{2}}$



## تابع: الاشتقاق:

4. إذا كانت  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$  فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n-1)a_nx^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كانت

$$y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$$

**الحل:**

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$



## تابع: الاشتقاق:

5. إذا كانت  $y = [f(x)]^n$  فإن :

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كانت  $y = (2x^2 + 5)^8$

**الحل:**

$$\frac{dy}{dx} = 8(2x^2 + 5)^7 \cdot 4x = 32x(2x^2 + 5)^7$$



## تابع: الاشتقاق:

6. إذا كانت  $y = (f(x) \cdot g(x))$  فإن :

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كانت  $y = (x - 1)(3x - 2)$   
**الحل:**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x - 1)(3) + (3x - 2)(1) \\ &= 3x - 3 + 3x - 2 \\ &= 6x - 5\end{aligned}$$



## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كانت  $y = (x^2 + 1)(2x^3 - 2)$   
**الحل:**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x^2 + 1)(6x^2) + (2x^3 - 2)(2x) \\ &= 6x^4 + 6x^2 + 4x^4 - 4x \\ &= 10x^4 + 6x^2 - 4x\end{aligned}$$



## تابع: الاشتقاق:

7. إذا كانت  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال:

أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كانت  $y = \frac{2x + 5}{3x - 4}$



$$Y' = \frac{(3x-4)(2) - (3)(2x+5)}{(3x-4)^2}$$

الانتباه الى ان اشارة رقم ٣ سوف تكون سالبة ولهذا عند  
الظرب في المعادلة سوف نظربها برقم ٣ سالبة

$$\frac{6x-8-6x-5}{(3x-4)^2}$$

-23

$$\frac{-23}{(3x-4)^2}$$

الانتباه الى ان  
بعض ارقام  
موجبة

## تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(3x - 4)(2) - (2x + 5)(3)}{(3x - 4)^2} \\ &= \frac{6x - 8 - 6x - 15}{(3x - 4)^2} \\ &= \frac{-23}{(3x - 4)^2}\end{aligned}$$





## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كانت  $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{2x}$

الحل:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x)(2x - 5) - (x^2 - 5x + 7)(2)}{4x^2} \\ &= \frac{4x^2 - 10x - 2x^2 + 10x - 14}{4x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 14}{4x^2} = \frac{2(x^2 - 7)}{4x^2} = \frac{x^2 - 7}{2x^2} \end{aligned}$$



$$y' = \frac{x^2 - 5x + 7}{2x} = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{(2x) \cdot (2x - 5) - (2)(x^2 - 5x + 7)}{(2x)^2}$$

$$4x^2 - 10x - 2x^2 + 10x - 14$$

قمنا بتربيع المقام لأنه عبارة عن حد واحد وليس حدين

$$(2x)^2$$

نرى  
لذلك نقول

$$4x^2$$

$$2x^2 - 14$$

$$4x^2$$

$$= \frac{2(x^2 - 7)}{4x^2}$$

نوجد العامل المشترك  
للجس

$$= \frac{x^2 - 7}{2x^2}$$

اختصار الجس على المقام  
بالقسمة على العامل المشترك

## تابع: الاشتقاق:

**نتيجة:** إذا كانت  $y = \frac{c}{f(x)}$  حيث  $c$  ثابت فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كانت  $y = \frac{3}{x^2}$

**الحل:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2)^2} = \frac{-6x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$$



## تابع: الاشتقاق:

8. إذا كانت  $y = f(u)$  ،  $u = g(x)$  ، فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{قانون السلسلة})$$

**مثال:** إذا كانت  $y = u^2 + 5u$  ،  $u = x + 3$  فأوجد  $\frac{dy}{dx}$

**الحل:**  $\frac{du}{dx} = 1$  ،  $\frac{dy}{du} = 2u + 5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 5)(1) = 2(x + 3) + 5 = 2x + 11$$



## تابع: الاشتقاق:

مثال:

إذا كانت  $y = \frac{u}{u+1}$  ، فأوجد  $\frac{dy}{dx}$  عند  $x = 1$  ،  $u = 3x^2 - 1$

الحل:

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1)(1) - u(1)}{(u+1)^2} = \frac{1}{(u+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 6x$$



# تابع: الاشتقاق:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left[ \frac{1}{(u+1)^2} \right] (6x)$$

لكسها في الالة اليدوية

Table او

6 (1)

$$\frac{6(1)}{(3(1)^2 - 1 + 1)^2}$$

$$= \frac{6x}{(u+1)^2}$$

← الالة عومها  
u بدالها المبرمة  
u = 3x<sup>2</sup> - 1

$$= \frac{6x}{(3x^2 - 1 + 1)^2} = \frac{6x}{9x^4} = \frac{2}{3x^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{2}{3(1)^3} = \frac{2}{3}$$



## تابع: الاشتقاق:

### المشتقات العليا:

عندما نشتق الدالة للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:  $f''(x)$  <sup>يُصوّرُها</sup>  $f^{(2)}$  <sup>وكتبت أس 2</sup>

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2} [f(x)], f''(x), y''$$

وعندما نشتق الدالة للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^3}{dx^3} [f(x)], f^{(3)}(x), y'''$$



## تابع: المشتقات العليا:

وهكذا

عندما نشتق الدالة للمرة الـ  $n$  فإن المشتقة التي نحصل عليها يرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} [f(x)], \quad y^{(n)}$$





## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة  $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

**الحل:**

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$



## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد المشتقات الأربعة الأولى للدالة

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 1$$

**الحل:**

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$



## تابع: الاشتقاق:

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 240x^2 + 72x - 48$$

$$\frac{dy^4}{dx^4} = 480x + 72$$



## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** اذا كان  $y = x^3 + 3x + 1$   
**أثبت ان**

$$y^{(3)} + xy'' - 2y' = 0$$

**الحل:**

$$y' = 3x^2 + 3$$

$$y'' = 6x$$

$$y^{(3)} = 6$$



## تابع: الاشتقاق:

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد ان:

$$\begin{aligned} & 6 + x(6x) - 2(3x^2 + 3) \\ &= 6 + 6x^2 - 6x^2 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$



# تمارين

1. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i.  $y = 4x^2 - 3x^4 = 8x - 12x^3$

ii.  $y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x) = (10x^4)(5x^3 + 7x) + (2x^5 - 1)(15x^2 + 7)$

iii.  $y = \sqrt{3}(x^5 - x^{-3}) = \sqrt{3}(5x^4 + 3x^{-4})$

iv.  $y = \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2(2x+1) - 2(2x+1)}{(2x+1)^2}$   
 $= \frac{4x+2 - 4x-2}{(2x+1)^2} = \frac{4}{(2x+1)^2}$



# تمارين

v.  $y = x + 1$   $\underline{= 1}$

مشتقة الاولى \* الثاني + مشتقة الثاني \*

vi.  $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$

vii.  $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4} = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 4}}$

مشتقة المقام \* - البسط الكل على مربع المقام

viii.  $y = \frac{1}{2x + 3} = \frac{-1 \cdot 2}{(2x + 3)^2}$

ix.  $y = (4x^2 + 5x - 2)^8 = 8(4x^2 + 5x - 2)^7 \cdot (8x + 5)$

قيمة الاس \* (الدالة) مرفوعة بقيمة الاس - 1 \* مشتقة ما داخل القوس

$64x + 40(الدالة)^7$



# تمارين

2. أوجد  $\frac{dy}{dx}$  إذا كانت :

i.  $y = u^2 - u$  ,  $u = 4x + 3 = 16x + 3$

ii.  $y = u + \frac{1}{u}$  ,  $u = 5 - 2x = -20 + 8x$

iii.  $y = \frac{1}{u+1}$  ,  $u = x^3 - 2x + 5$





3. أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

i.  $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

ii.  $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

iii.  $y = \frac{1}{x}$

iv.  $y = \frac{1}{3x + 1}$



# المحاضرة الحادية عشرة الجزء الاول

مشتقة الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية



# تابع: الاشتقاق:

## مشتقة الدوال الاسية:

إذا كانت  $y = e^x$  فان :

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

وبشكل عام إذا كانت  $y = e^u$  حيث  $u = f(x)$  فان  $\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$   
**مثال:** إذا كانت  $y = e^{x^2+2x+1}$  فأوجد  $\frac{dy}{dx}$

**الحل:**

صرفها في مشتقة الأس

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x+1} \cdot (2x+2)$$

$x^2 + 2x + 1$   
 $= \underline{\underline{2x + 2}}$



## تابع: الاشتقاق:

بالا

### نتيجة:

إذا كانت  $y = b^x$  فإن :

$$\frac{dy}{dx} = b^x \cdot \ln b$$

وبشكل عام إذا كانت  $y = b^u$  حيث  $u = f(x)$  فإن  $\frac{dy}{dx} = b^u \cdot \ln b \cdot \frac{du}{dx}$  **مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  لكل من الدوال التالية:

1.  $y = 3^x$

2.  $y = 9^{2x^2}$



# تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$1. \frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$$

$$2. \frac{dy}{dx} = 9^{2x^2} \cdot \ln 9 \cdot (4x)$$

الحالة الأولى  
الحالة الثانية  
ولهذا امرنا جيا مشو بالكل



# تابع: الاشتقاق:

## مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

إذا كانت  $y = \ln x$  فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

وبشكل عام إذا كانت  $y = \ln u$  حيث  $u = f(x)$  فإن

**مثال:** إذا كانت  $y = \ln(1 + x^2)$  فأوجد  $\frac{dy}{dx}$

**الحل:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \times 2x = \frac{2x}{1 + x^2}$$

صرفي  $u$

صرفي مشتق  $u$



## تابع: الاشتقاق:

### نتيجة:

إذا كانت  $y = \log_b x$  فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln b}$$

وبشكل عام إذا كانت  $y = \log_b u$  حيث  $u = f(x)$  فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{du}{dx}$$



## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  لكل من الدوال التالية:

1.  $y = \log_2 4x$

2.  $y = \log_2(1 + x^2)$

**الحل:**

1. 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}$$

2. 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \times 2x \times \frac{1}{\ln 2} = \frac{2x}{(1 + x^2) \ln 2}$$





## تابع: الاشتقاق:

### مشتقة الدوال المثلثية:

1. إذا كانت  $y = \sin x$  فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

وبشكل عام إذا كانت  $y = \sin u$  حيث  $u = f(x)$  فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت  $y = \sin 4x$  فأوجد  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \times 4 = 4 \cos 4x$$

الحل: حد في الطريقة  
الصحيحة لكاتب  
الساح



## تابع: الاشتقاق:

2. إذا كانت  $y = \cos x$  فإن :

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

وبشكل عام إذا كانت  $y = \cos u$  حيث  $u = f(x)$  فإن:

مثالها

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت  $y = \cos 5x$  فأوجد  $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x \times 5 = -5 \cos 5x$$

الطريقة الصحيحة  
لكتابة الإجابة



## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  لكل من الدوال التالية:

1.  $y = \cos^2 x = [\cos x] = \cos x \cdot \cos x = 2 \cos x$

2.  $y = \sin x \cos x$

**الحل:**

1.  $\frac{dy}{dx} = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \cos x \sin x$

2.  $y = (\sin x) \times (-\sin x) + (\cos x) \times (\cos x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$



# تابع: الاشتقاق:

## جدول مشتقات بقية الدوال المثلثية:

$$3. \frac{d}{dx} (\tan u) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx} (\sec u) = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5. \frac{d}{dx} (\csc u) = -\csc u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx} (\cot u) = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

للم  
توضيح

حيث  $u = f(x)$



## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  الدوال الآتية:

1.  $y = \tan^2 x = 2 \tan x \sec^2 x$

2.  $y = \cot^3(2x+1)$

3.  $y = \sec(x+1)$

4.  $y = \csc 2x$



## تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$1. \frac{dy}{dx} = 2 \tan x \sec^2 x$$

$$2. \frac{dy}{dx} = 3 \cot^2 (2x + 1) \cdot [-\csc^2 (2x + 1)] \cdot (2)$$

مربعها

$$= -6 \cot^2 (2x + 1) \cdot \csc^2 (2x + 1)$$



## تابع: الاشتقاق:

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \sec(x+1) \cdot \tan(x+1) \cdot (1) \\ = \sec(x+1) \tan(x+1)$$

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = -\csc 2x \cdot \cot 2x \cdot (2) \\ = -2 \csc 2x \cot 2x$$



## تابع: الاشتقاق:

### الاشتقاق الضمني:

لإيجاد  $\frac{dy}{dx}$  من دالة ضمنية (غير صريحة) نعتبر  $y$  دالة لـ  $x$  ونطبق قواعد

الاشتقاق المناسبة.

### ملاحظة:

عندما نفاضل أي حد يحتوي على  $y$  نضرب ناتج التفاضل في  $\frac{dy}{dx}$  ثم نجمع الحدود المحتوية على  $\frac{dy}{dx}$  في طرف ، وننقل الحدود الأخرى في الطرف الثاني.





## تابع: الاشتقاق:

**مثال:** أوجد  $\frac{dy}{dx}$  لكل من الدوال الآتية:

1.  $y^2 + x^2 = 9$

2.  $y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3 = 9$

3.  $x^2y + 3xy^3 = x + 3$



$$1. \quad \frac{d}{dx} (y^2 + x^2) = \frac{d}{dx} (9)$$

$$2y \frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$



$$2. \quad \frac{d}{dx} (y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3) = \frac{d}{dx} (9)$$

تم دمج الحدود  
التي هي  
مع بعضها في صفر

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2x + 9x^2 + 12y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (2y + 12y^2) = -2x - 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 9x^2}{2y + 12y^2}$$

تم ادراج  $\frac{dy}{dx}$  لان  $y$  كان  
طرفي المعادلة و تم  
اشباعه ولهذا تم ضرب  
المعادلة بـ  $\frac{dy}{dx}$



قانون القاطن من التفاضل

$$3. \frac{d}{dx} (x^2 y + 3xy^3) = \frac{d}{dx} (x + 3)$$

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 2x + 3 \left[ x \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^3 \cdot 1 \right] = 1 + 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy + 9xy^2 \frac{dy}{dx} + 3y^3 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} (x^2 + 9xy^2) = 1 - 2xy - 3y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy - 3y^3}{x^2 + 9xy^2}$$



## تابع: الاشتقاق:

### الاشتقاق الجزئي:

إذا كانت لدينا الدالة  $z = f(x, y)$  دالة متغيرين ، إذا ابقينا  $y$  ثابتاً فإن  $z$  دالة في  $x$  فقط ، وعليه نستطيع إيجاد تفاضل  $z$  بالنسبة إلى  $x$  وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة  $z$  بالنسبة إلى  $x$  ويرمز لها بالرمز  $\frac{\partial z}{\partial x}$

وبنفس الطريقة إذا أبقينا  $x$  ثابتاً فإن  $z$  دالة في  $y$  فقط ، وعليه نستطيع إيجاد تفاضل  $z$  بالنسبة إلى  $y$  وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة  $z$  بالنسبة إلى  $y$  ويرمز لها بالرمز  $\frac{\partial z}{\partial y}$



## تابع: الاشتقاق:

مثال:

أوجد  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  لكل من الدوال الآتية:

1.  $z = xy + x^2y + y^2x$

2.  $z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$



# تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$1. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{matrix} xy + x^2y + y^2x \\ |y + 2xy + y^2| \\ x^1 + x^2 + 2y \end{matrix}}{x^1 + x^2 + 2y}$$

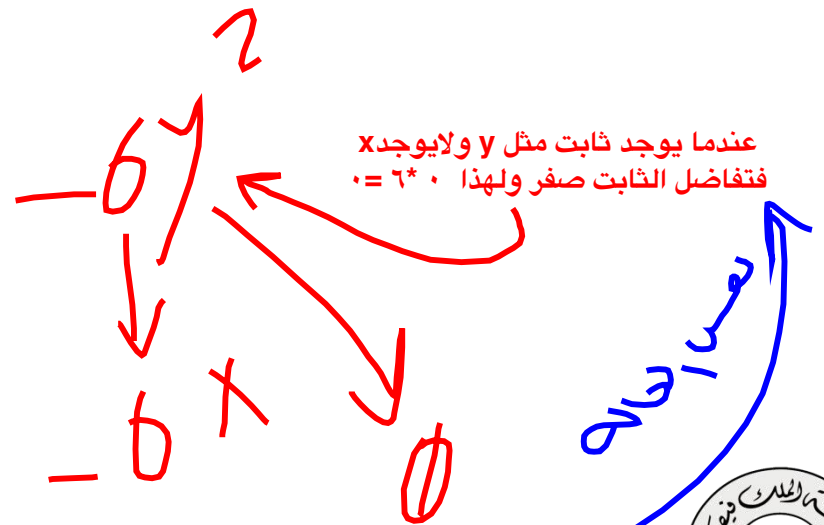
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$$

في حال طلب الاكس مثل المثال اللي بالاحمر  
نثبت ال y ونشتق x فقط ونفس الشيء لو طلب  
الاشتقاق الجزئي لل y نثبت x ونشتق ال y

2.  $2x^2$   
 $2x^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 12y$$



1. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i.  $y = e^{x^2-2x}$

ii.  $y = (2x + 3)e^{-2x}$

iii.  $y = e^{\cos x}$

iv.  $y = \frac{1}{2} (e^{3x} + e^{-3x})$





v.  $y = \log_2 3x$

vi.  $y = 7^{x^3}$

vii.  $y = \ln(\sin x)$

viii.  $y = x^2 e^{2x}$

ix.  $y = e^{2x} \cos 3x$



# تمارين

2. أوجد  $\frac{dy}{dx}$  لكل من الدوال التالية:

i.  $9x^2 + 4y^2 = 40$

ii.  $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$

iii.  $4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6 = 0$

iv.  $5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$



v.  $y = x^2 \sin x$

vi.  $y^2 = x \cos y$

3. إذا كانت  $y^2 - 4x^2 = 5$  فأوجد  $\frac{dy}{dx}$  عند  $x = -1$  و  $y = 3$

4. إذا كانت  $xy^2 + 3y = 27$  فأوجد  $\frac{dy}{dx}$  عند  $x = 2$  و  $y = 3$



# تمارين

5. أوجد  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  إذا كانت :

i.  $z = x^3 - 2xy + y^3$

ii.  $z = 5y^3 + xy - 7y^2$

iii.  $z = xy - \ln xy$

iv.  $z = x \ln y + y \ln x - xe^{xy}$



# المحاضرة الحادية عشرة الجزء الثاني

## تطبيقات التفاضل:



# إيجاد القيم العظمى والصغرى للدالة:

أسلوب المشتقة الثانية:

الخطوات :

- أ- إيجاد المشتقة الأولى للدالة  $( f'(x) )$ .
- ب- نضع  $f'(x) = 0$  لإيجاد قيم  $x$  التي تحقق المعادلة (القيم الحرجة).
- ج- إيجاد المشتقة الثانية للدالة  $( f''(x) )$ .
- د- عند القيمة الحرجة  $x = x_1$  تكون للدالة .....



# تابع: القيم العظمى والصغرى :

- i. قيمة صغرى محلية إذا كانت  $f''(x_1) > 0$
- ii. قيمة عظمى محلية إذا كانت  $f''(x_1) < 0$
- iii. ويفشل الاختبار إذا كانت  $f''(x_1) = 0$



## تابع: القيم العظمى والصغرى:

**مثال (1):** إذا كان  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  فما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ لهذه الدالة.

**الحل:**

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow \text{Mod } 3 \rightarrow 5 \rightarrow 3$$

$$3(x^2 - 2x - 3) = 0 \quad \div 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$





# تابع: القيم العظمى والصغرى:

$$(x-3) = 0 \quad \text{إما}$$

$$x = 3 \quad \text{إذاً}$$

$$(x+1) = 0 \quad \text{أو}$$

$$x = -1 \quad \text{إذاً}$$

$$f''(x) = 6x - 6$$



## تابع: القيم العظمى والصغرى:

عند  $x = 3$

$$f''(3) = 6 \times 3 - 6 = 18 - 6 = 12 > 0$$

∴ توجد قيمة صغرى محلية عند  $x = 3$  وهي:

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 + 5 \\ &= 27 - 27 - 27 + 5 = -22 \end{aligned}$$

في حال كانت النتيجة في التعويض عن  $x$  في المستقة الثانية اكبر من صفر وكانت النتيجة في التعويض في الدالة الاساسية اصغر من صفر فتسمى هذه القيمة الصغرى ويكون الناتج في المثال اعلاه ما يسمى احداثيات القيمة الصغرى عند النقطة  $(3, -22)$



## تابع: القيم العظمى والصغرى:

عند  $x = -1$

$$f''(-1) = 6 \times -1 - 6 = -6 - 6 = -12 < 0$$

∴ توجد قيمة عظمى محلية عند  $x = -1$  وهي:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times -1 + 5 \\ &= -1 - 3 + 9 + 5 = 10 \end{aligned}$$

في حال كانت النتيجة في التعويض عن  $x$  في المشتقة الثانية اصغر من صفر وكانت النتيجة في التعويض في الدالة الاساسية اكبر من صفر فتسمى هذه القيمة العظمى ويكون الناتج في المثال اعلاه مايسمى احداثيات القيمة العظمى عند النقطة  $(-1, 10)$



## تابع: القيم العظمى والصغرى:

**مثال (2):** إذا كان  $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 1$  فما هي نقط  
القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ لهذه الدالة.

**الحل:**

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

$$3x^2 - 24x + 45 = 0$$

$$3(x^2 - 8x + 15) = 0 \quad \div 3$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$



# تابع: القيم العظمى والصغرى:

$$(x-3) = 0 \quad \text{إما}$$

$$x = 3 \quad \text{إذاً}$$

$$(x-5) = 0 \quad \text{أو}$$

$$x = 5 \quad \text{إذاً}$$

$$f''(x) = 6x - 24$$



## تابع: القيم العظمى والصغرى:

عند  $x = 3$

$$f''(3) = 6 \times 3 - 24 = 18 - 24 = -6 < 0$$

∴ توجد قيمة عظمى محلية عند  $x = 3$  وهي:

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 12 \times 3^2 + 45 \times 3 + 1 \\ &= 27 - 108 + 135 + 1 = 163 - 108 = 55 \end{aligned}$$



## تابع: القيم العظمى والصغرى:

عند  $x = 5$

$$f''(5) = 6 \times 5 - 24 = 30 - 24 = 6 > 0$$

∴ توجد قيمة صغرى محلية عند  $x = 5$  وهي:

$$\begin{aligned} f(5) &= 5^3 - 12 \times 5^2 + 45 \times 5 + 1 \\ &= 125 - 300 + 225 + 1 = 351 - 300 = 51 \end{aligned}$$



# نقطة الانقلاب ومجالات التقعر:

## تعريف:

تسمى النقطة  $(x_1, f(x_1))$  نقطة انقلاب لمنحنى الدالة  $f$  إذا كان منحنى الدالة مقعراً إلى أسفل مباشرة إلى يسار  $x$  ومقعراً إلى أعلى مباشرة إلى يمين  $x$  أو العكس.

## تحديد مجالات التقعر ونقطة الانقلاب:

1. نوجد  $f''(x)$
2. نوجد النقاط الحرجة للمشتقة الثانية (  $f''(x) = 0$  )
3. نضع القيم على خط الأعداد





## نقطة الانقلاب:

4. نحدد إشارة  $f''(x)$  حول النقاط الحرجة ويكون المنحنى:

- مقعرا نحو الأعلى إذا كان  $f''(x) > 0$

- مقعرا نحو الأسفل إذا كان  $f''(x) < 0$

5. إذا حصل التغير في التقعر قبل وبعد نقطة حرجة  $x_1$  مثلا إذا

توجد نقطة انقلاب وهي  $(x_1, f(x_1))$



# تابع: نقطة الانقلاب:

مثال (1):

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

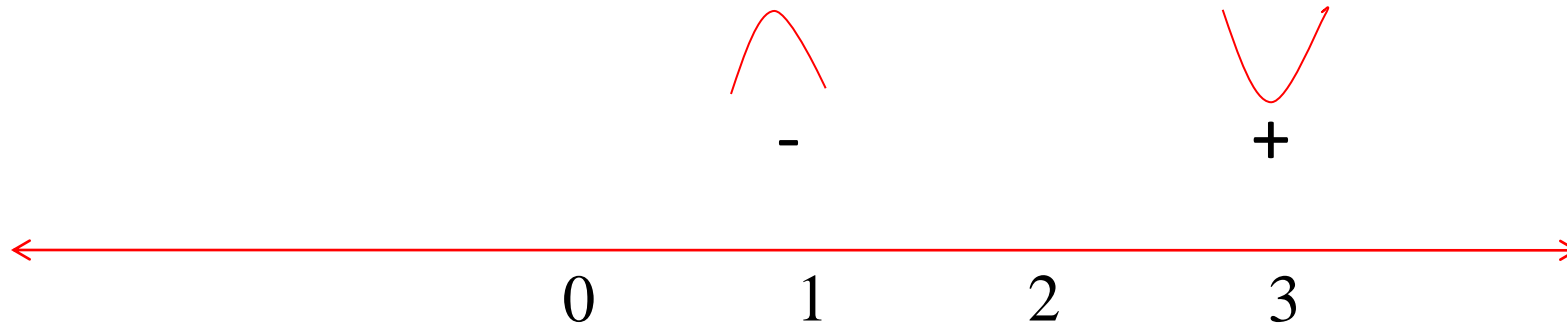
نعوض بالالة في نمط ال tabel وبعد كذا بتطلع لنا التالي :

	x	f(x)
1	2	7

نقطة الانقلاب (2, 7)



## تابع: الحل:



$$f''(1) = 6(1) - 12 = 6 - 12 = -6$$

$$f''(3) = 6(3) - 12 = 18 - 12 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد 2 إذا توجد نقطة انقلاب عند  $x=2$  وهي  $(2, f(2))$

$$f(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 9 \times 2 + 5$$

$$= 8 - 24 + 18 + 5 = 7$$

نقطة الانقلاب هي  $(2,7)$



## تابع: نقطة الانقلاب:

مثال (2):

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

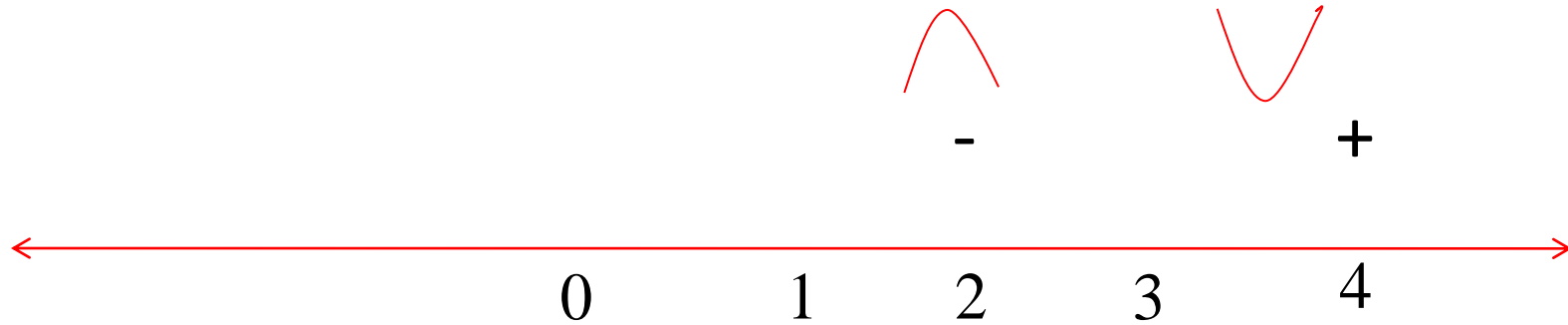
$$6x - 18 = 0$$

$$6x = 18$$

$$x = \frac{18}{6} = 3$$



## تابع: الحل:



$$f''(2) = 6(2) - 18 = 12 - 18 = -6$$

$$f''(4) = 6(4) - 18 = 24 - 18 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد 2 إذا توجد نقطة انقلاب عند  $x=2$  وهي  $(3, f(3))$

$$\begin{aligned} f(2) &= 3^3 - 9 \times 3^2 + 24 \times 3 \\ &= 27 - 81 + 72 = 18 \end{aligned}$$

نقطة الانقلاب هي  $(3,18)$



# تمارين:

1- ما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ للدوال التالية:

i.  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$       16 , 20

ii.  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$       -1 , 3

iii.  $f(x) = x^2 + 2x + 18$       17



## تمارين:

2- أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

$$\left( \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

3- أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة  $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

$$(4, 16)$$



# المحاضرة الثانية عشرة

## التكامل





# التكامل:

## التكامل غير المحدد:

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وتسمى عملية ايجاد  $y$  إذا علمت  $y'$  بعملية التكامل . ويستعمل الرمز  $\int$  للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل . فإذا كانت  $f$  دالة للمتغير  $x$ ، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل  $\int f(x) dx$  ، حيث الرمز  $\int$  يدل على عملية التكامل غير المحدد وان  $dx$  تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير المستقل  $x$  .



# تابع: التكامل:

## قواعد التكامل:

1.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$  حيث  $c$  ثابت التكامل

2.  $\int k dx = kx + c$  حيث  $k$  أي عدد حقيقي

3.  $\int dx = x + c$



## تابع: التكامل:

دوره 7 كاحارج العوك  
و دهره راني تكامل  
 $\int f(x)$

$$4. \int [kf(x)]dx = k \int f(x) dx$$

حيث  $k$  أي عدد حقيقي

$$5. \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$6. \int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$



تابع: التكامل:

$$7. \int e^x dx = e^x + c$$

مسا

$$8. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, x \neq 0$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + c$$



تابع: التكامل:

دائماً عكس إشارة بعض

$$10. \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$11. \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$12. \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$



$$13. \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$14. \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$



# تابع: التكامل:

أمثلة:

$$1. \int 5dx = 5x + c$$

$$2. \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$3. \int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$$

$$4. \int (7x + 3) dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + c$$

الإشارة هنا  
بمعدل ١٥٠٠٠٠



# تابع: التكامل:

$$5. \int (3 \sin x + 2x) dx = -3 \cos x + \frac{2x^2}{2} + c$$
$$= -3 \cos x + x^2 + c$$

$$6. \int (x^{\frac{1}{2}} + 4) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + c$$
$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$$





الجابون 17

$$7. \int (4e^x + x^{-1}) dx = \int \left( 4e^x + \frac{1}{x} \right) dx = 4e^x + \ln|x| + c$$

نص الجاهه كمانه الواجه  
ولا نيسا  $\frac{1}{x} = x^{-1}$

$$8. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

اجاده كمانه الواجه

$$= \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$



تابع: التكامل:

من كتابه الدالة

$$\frac{t^2}{t^4} - \frac{2t^4}{t^4} = t^{2-4} - 2t^{4-4} = t^{-2} - 2$$

9.  $\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt = \int (t^{-2} - 2) dt$

$$= \frac{t^{-2+1}}{-2+1} - 2t + c = -t^{-1} - 2t + c$$

or  $\frac{1}{t}$

10.  $\int (x + \sec^2 x) dx = \frac{x^2}{2} + \tan x + c$



تابع: التكامل:

$-7 \cdot \frac{1}{x}$

$$11. \int \left( \frac{x^3 + 2x - 7}{x} \right) dx = \int \left( x^2 + 2 - \frac{7}{x} \right) dx$$

$\checkmark$

$$= \frac{1}{3} x^3 + 2x - 7 \ln|x| + c$$

or

$$\frac{x^3}{3}$$

الفاصل



1. أوجد ناتج التكاملات الآتية:

i.  $\int (5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6) dx$

ii.  $\int (x^{1/2} - 3x^{2/3} + 5x^{-1/2}) dx$

iii.  $\int 2x dx$



v.  $\int (3 \cos x + 2x) dx$

vi.  $\int (\sec^2 x - 1) dx$

vii.  $\int -2e^x dx$

viii.  $\int \frac{x^5 + 2}{x^3} dx$



# المحاضرة الثالثة عشر

التكامل بالتعويض

وحل المعادلات التفاضلية



# التكامل بالتعويض:

إذا كانت  $f(g(x)) = F'(g(x))$  بفرض  $\frac{d}{dx}[F(g(x))] = f(g(x))g'(x)$  فان

$$\int f(g(x)).g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

يمكن ايجاد التكامل أعلاه باتباع الخطوات التالية

$$u = g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$$

بفرض ان

إذا

$$\int f(g(x)).g'(x) dx = \int f(u)du = F(u) + c$$



## أمثلة: أوجد التكاملات التالية:

1.  $\int (x^2 + 1)^{50} \cdot 2x dx$

الحل:

$$u = x^2 + 1$$

$$du = 2x dx$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)^{50} \cdot 2x dx &= \int u^{50} du = \frac{u^{51}}{51} + c \\ &= \frac{1}{51} (x^2 + 1)^{51} + c \end{aligned}$$





## تابع: التكامل:

$$2. \int (x^2 + 1)^3 x dx$$

الحل:

$$u = x^2 + 1$$

$$du = 2x dx$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)^3 x dx &= \frac{1}{2} \int 2(x^2 + 1)^3 x dx = \frac{1}{2} \int u^3 du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^4}{4} + c \\ &= \frac{1}{8} (x^2 + 1)^4 + c \end{aligned}$$



## تابع: التكامل:

$$3. \int \sin x \cos x dx$$

الحل:

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int u du = \frac{u^2}{2} + c \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x + c \end{aligned}$$



## تابع: التكامل:

$$4. \int x \cos(x^2) dx$$

الحل:

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\begin{aligned} \int x \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + c \\ &= \frac{1}{2} \sin(x^2) + c \end{aligned}$$



## تابع: التكامل:

$$5. \int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

$$u = 1 + x^4$$
$$du = 4x^3 dx$$

الحل:

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+x^4} 4x^3 dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{4} \ln|1+x^4| + c$$



## تابع: التكامل:

$$6. \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

الحل:

$$u = 1 + x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{1+x^2} dx &= \int \frac{1}{1+x^2} 2x dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c \\ &= \ln|1+x^2| + c \end{aligned}$$



## تابع: التكامل:

$$7. \int e^{\sin x} \cos x \, dx$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x \, dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int e^{\sin x} \cos x \, dx &= \int e^u \, du = e^u + c \\ &= e^{\sin x} + c \end{aligned}$$



## تابع: التكامل:

$$8. \int x e^{x^2} dx$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} + c \end{aligned}$$



## تابع: التكامل:

$$9. \int x^2 e^{3x^3} dx$$

الحل:

$$u = 3x^3$$

$$du = 9x^2 dx$$

$$\int x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9} \int 9x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9} \int e^u du = \frac{1}{9} e^u + c$$

$$= \frac{1}{9} e^{3x^3} + c$$





# تابع: التكامل:

## حل المعادلات التفاضلية:

مثال:

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-2} \quad \text{حل المعادلة التفاضلية}$$

الحل:

نفصل المتغيرين  $x$ ،  $y$  عن بعضهما بحيث يصبح تفاضل كل منهما مضروباً في دالة لذلك المتغير فقط، كما نبين أدناه.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-2} = \frac{x}{y^2}$$

$$y^2 dy = x dx$$



# تابع: التكامل:

بإجراء التكامل للطرفين

$$\int y^2 dy = \int x dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c$$



## تابع: التكامل:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 y^3$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 y^3 = \frac{4x^3}{y^{-3}}$$

$$y^{-3} dy = 4x^3 dx$$



## تابع: التكامل:

$$\int y^{-3} dy = \int 4x^3 dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{4x^4}{4} + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x^4 + c$$



# تمارين

1. أوجد التكاملات التالية:

i.  $\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos u \, du = \frac{1}{3} \sin 3x + C$    
  $u = 3x, \, du = 3$

ii.  $\int (\sec^2 2x - 1) \, dx = \int \sec^2 2x \, dx - \int dx$

iii.  $\int e^{2x} \, dx$    
  $u = 2x, \, du = 2$

iv.  $\int \frac{x^2 \, dx}{x^3 + 1}, \, x \neq -1$

$\frac{1}{x^3 + 1} x^2 \, dx = \frac{1}{x^3 + 1} x^2 \, dx = \frac{1}{x^3 + 1} \cdot \frac{1}{3} \int x^3 + 1 \cdot x^2 \, dx$    
  $u = x^3 + 1, \, du = 3x^2$    
  $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C$



# تمارين

الحلول والاحكامه  
الدرجة ابرقار

2. حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

لا يوجد  $y$  مفردا  
نجد المعامل  $2x+3$

i.  $\frac{dy}{dx} = 2x + 3 = \frac{2x+3}{1} =$

ii.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

iii.  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy} = (xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}} = y^{-\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$



# المحاضرة الرابعة عشر

## التكامل المحدد



# التكامل المحدد:

إذا كانت  $g(x)$  دالة بحيث  $g'(x) = f(x)$  فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدد للدالة  $f(x)$  على الفترة  $[a, b]$  و  
يسمى  $a$  بالحد الأدنى و  $b$  بالحد الأعلى أو يسميان معاً بحدي  
التكامل.





## تابع: التكامل المحدد:

مثال:

$$\int_1^3 x^3 dx \quad \text{أوجد}$$

الحل:

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81-1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$



# تابع: التكامل المحدد:

## بعض خواص التكامل المحدد:

$$1. \int_a^b [kf(x)]dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$3. \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$4. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$5. \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



# تابع: التكامل المحدد:

## أمثلة:

أوجد التكاملات التالية:

$$1. \int_0^3 2 dx$$

## الحل:

$$\int_0^3 2 dx = [2x]_0^3 = 2 \times 3 - 0 = 6$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$2. \int_0^2 (x + 6) dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x + 6) dx &= \left[ \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^2 \\ &= \left[ \frac{2^2}{2} + 6(2) \right] - 0 \\ &= 2 + 12 = 14 \end{aligned}$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$3. \int_1^3 (3x^2 - 4x - 5) dx$$

الحل:  
التكامل

$$\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5) dx = [x^3 - 2x^2 - 5x]_1^3$$

$$= [3^3 - 2(3)^2 - 5(3)] - [1^3 - 2(1)^2 - 5(1)]$$

$$= [27 - 18 - 15] - [1 - 2 - 5]$$

$$= -6 + 6 = 0$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$4. \int_{-2}^2 (5x + 4) dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (5x + 4) dx &= \left[ \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_{-2}^2 \\ &= \left[ \frac{5(2)^2}{2} + 4(2) \right] - \left[ \frac{5(-2)^2}{2} + 4(-2) \right] \\ &= [10 + 8] - [10 - 8] \\ &= 18 - 2 = 16 \end{aligned}$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$5. \int_0^2 (3x^2 + e^x) dx$$

الحل:  
الاجابة

$$\begin{aligned} \int_0^2 (3x^2 + e^x) dx &= [x^3 + e^x]_0^2 \\ &= [2^3 + e^2] - [0^3 + e^0] \\ &= [8 + e^2] - [1] \\ &= 8 + e^2 - 1 = 7 + e^2 \end{aligned}$$





## تابع: التكامل المحدد:

$$6. \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

الحل:  
التكامل

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2$$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2 - 0 = \ln 2$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$7. \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

الحل:  
الاصول الى

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\ &= -(-1) + 1 = 2 \end{aligned}$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$8. \int_0^2 (2x + 1)^3 dx$$

الحل:

$$u = 2x + 1$$

$$du = 2 dx$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow u = 5$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x+1)^3 dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 2(2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_1^5 u^3 du \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{u^4}{4} \right]_1^5 = \frac{1}{8} [5^4 - 1^4] \\ &= \frac{1}{8} \times 624 = 78\end{aligned}$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$9. \int_{-1}^2 2(x^2 - 1)^4 x dx$$

الحل:

$$u = x^2 - 1$$

$$du = 2x dx$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow u = 3$$



## تابع: التكامل المحدد:

$$\int_{-1}^2 2(x^2 - 1)^4 x dx = \int_0^3 u^4 du$$
$$\left[ \frac{u^5}{5} \right]_0^3 = [3^5 - 0^5]$$
$$= \frac{243}{5}$$



## تابع: التكامل المحدد :

10. إذا كان  $\int_2^3 f(x)dx = 5$  ،  $\int_3^4 f(x)dx = 10$  ، فأوجد

i.  $\int_2^4 f(x)dx$   $\overset{5}{\text{15}}$

ii.  $\int_2^2 f(x)dx = 0$

iii.  $\int_4^3 f(x)dx$   $\overset{-10}{-10}$

iv.  $\int_2^3 6f(x)dx$   $\overset{30}{30}$



## تابع: التكامل المحدد :

الحل:

$$i. \int_2^4 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$
$$= 5 + 10 = 15$$

$$ii. \int_2^2 f(x)dx = 0$$





## تابع: التكامل المحدد :

$$iii. \int_4^3 f(x)dx = -\int_3^4 f(x)dx = -10$$

$$iv. \int_2^3 6f(x)dx = 6\int_2^3 f(x)dx = 6 \times 5 = 30$$



# تمارين:

1. أوجد التكاملات التالية:

i.  $\int_0^2 (5x^3 - 3x + 6) dx = 26$

ii.  $\int_{-2}^3 7 dx = 35$

iii.  $\int_4^4 (x - 16) dx = 0$



# تابع: تمارين:

iv.  $\int_{-2}^4 \left( \frac{1}{2}x^2 + 3 \right)^3 x dx$   $3\sqrt{04}$

v.  $\int_{-1}^2 (x^3 + 1)^2 dx = \frac{40\sqrt{14}}{14}$

vi.  $\int_0^{\pi=180} \cos x dx$

	$\emptyset$	$\pi$
Sin	$\emptyset$	$\emptyset$
cos	1	-1
Tan	$\emptyset$	$\emptyset$



## تابع: تمارين:

$$vii. \int_{-2}^3 (6x^2 - 5) dx$$

$$viii. \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}} dx$$

$$ix. \int_0^{\pi} \sec^2 x dx$$





مَشَقَّةٌ  
بِحَمْدِ اللَّهِ

