(نظرية الاحتمالات)

١- التعريف النسبي للاحتمالات Rational Probability Definition

عند إجراء تجربة عدد N من المرات وكان A حدثا عشوائيا متعلقا بهده التجربة فإن التكرار النسبي يُعرّف على أنه حاصل قسمة عدد مرات حدوث الحادثة A مقسوما على عدد مرات حدوث التجربة. القانون التالي يوضح ذلك .

عدد حدوث الحادثة A

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N_\Omega}$$

التكرار النسبي لـ A

عدد مرات حدوث التجربة(فراغ العينة)

> الشرح
>
> عند اجراء تجربة خمس مرات على مجموعه من الفواكه . وكانت التفاحة حدثاً عشوائياً متكرر بمعني ان التفاحة خرجت لنا ثلاث مرات من اصل خمس مرات تجارب قمنا بها ففي هذه الحالة نقسم ٣ مرات خروج التفاحة على عدد ٥ مرات وهو المجوع الكلي لتكرار التجربة ففي هذة الحالة ينتج لنا التكرار النسبي للتفاحة.

مثال:

إذا أخذنا التجربة العشوائية رمي قطعة نقود عدة مرات وتسجيل عدد مرات ظهور الحادثة الحصول على صورة H وكررنا التجربة لعدد من المرات سجلت النتائج في الجدول التالي:

عدد الرميات الكلي N	عدد مرات ظهور الصورة H	التكرار النسبي
30	12	$\frac{12}{30}=0.66$
50	50	$\frac{20}{50}=0.4$
80	38	$\frac{38}{80}=0.475$
100	49	$\frac{49}{100}=0.49$
300	150	$\frac{150}{300}=0.5$
500	250	$\frac{250}{500}=0.5$
1000	500	$\frac{500}{1000}=0.5$
1500	750	$\frac{750}{1500}=0.5$

نلاحظ الاتي:

١ – ان التكرار النسبي $f_N(A)$ لحادثة A يأخذ قيمة ثابتة اذا زاد عدد محاولات التجربة عند عدد معين ويكون في العادة كبير وهذا ما نسمية احتمال وقوع الحادثة A

٢ – كلما زاد عدد الرميات N فان التكرار النسبي يختلف اختلافا بسيطا حتى تستقر عند قيمة معينة 0.5 وهذا يوضح لنا تعريف الاحتمال وفق مفهوم التكرار النسبي

التعريف التقليدي للاحتمالات Classical Probability Definition:

لأي حادثة A فإن احتمال حدوثها يمثل نسبة عدد حالات ظهورها إلى عدد حالات ظهور فراغ العينة الكلي أي بمعنى:

عدد الحالات المواتية
و يقصد بها التكرار لـ A

$$P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega}$$

تقسيم

عدد الحالات الممكنة
ويقصد بها التكرار الكلي
(فراغ العينة)

مثال:

رمُي حجر نرد مرد واحدة ، أحسب التالي:

١- احتمال الحصول على رقم 5

٢- احتمال الحصول على رقم زوجي

٣- احتمال الحصول على رقم أكبر من 2

٤- احتمال الحصول على رقم أقل من 7

٥- احتمال الحصول على رقم 7

الحل:

فراغ العينة لهذه التجربة هو : $\Omega= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فيكون بالتالي الحل كما يلي:

-1 $P(A=5)=1/6$ احتمال الحصول على رقم 5 أي ان الحجر رمُي مرة واحدة فقط لذا سنقسم الواحد على عدد المرات التي هي ٦ مرات (فراغ العينة)

-2 $P(A=2,4, 6)=3/6$ يوجد ثلاثة ارقام زوجية في عدد المرات (فراغ العينه) اذا نقسم 3 على 6 العدد الكلي لفراغ العينة

-3 $P(A>2)=4/6$ كم الارقام التي اكبر من 2 بالتأكيد اربعة ارقام وهى (6 – 5 – 4 – 3) لذا سنقسم 4 وهى عدد الارقام على العدد الكلي لفراغ العينة 6

-4 $P(A<7)=6/6=1$ الارقام التي اصغر من 7 عددها 6 ارقام وهى (6-5-4-3-2-1) اذا نقسم العدد 6 على المجموع الكلي لفراغ العينه والذي عدد ارقامة 6 ايضا

-5 $P(A=7)=0/6=0$ احتمال 7 = A لايوجد رقم مع ارقام فراغ العينة يساوي 7 اذا A بصفر وتقسم على 6

ويستنتج من ذلك أن أقل قيمة للاحتمال تساوي الصفر ويقال أن الحدث في هذه الحالة (حدث مستحيل) بينما تساوي واحد إذا كان الحدث مؤكد.

سؤال/اذا اعطيت فراغ العينة التالي $\Omega= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فأجب على الفقرتين (أ – ب).مع التعليل؟

الفقرة أ: احتمال الحصول على رقم اقل من 7 للحادثة A يعني ان :

١ – الحدث مستحيل.

٢ – الحدث مؤكد.

الاجابة :

يعتبر الحدث مؤكدا لأن رقم 6 في فراغ العينة هو اكبر رقم في عدد التكرارات . والمطلوب في السؤال الحصول على رقم اقل من 7 للحادثة A . اذا 6 هو الرقم الاقل من 7 ففي هذه الحالة نقسم $\frac{6}{6}$ ليعطينا 1 فأذا كان الحدث يساوي 1 فتعتبر الحادثة مؤكدة

الفقرة ب: احتمال الحصول على رقم 7 للحادثة A يعني ان :

٣– الحدث مستحيل.

٤– الحدث مؤكد.

الاجابة :

يعتبر الحدث مستحيل لأنهُ لايوجد رقم 7 في فراغ العينة ففي هذه الحالة نقسم $\frac{0}{6}$ ليعطينا صفر فأذا كان صفر فيعتبر حدثاً مستحيل

مثال اخر:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الأجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الاول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

١ – أن يكون أعزب

٢ – أن يكون متزوجا

٣– أن يكون من القسم الأول

٤– أن يكون من القسم الأول أو الثاني

٥–أن يكون من القسم الأول وأعزب

١- نفرض أن الحادثة A أن يكون العامل أعزب أي A = {أن يكون العامل أعزب} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(A) = \frac{23 \quad \text{عدد العمال العزاب}}{50 \quad \text{عدد العمال الكلي}} = 0.46$$

٢- نفرض أن الحادثة B أن يكون العامل متزوج أي أن B = {أن يكون العامل متزوج} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(B) = \frac{27 \quad \text{عدد العمال المتزوجين}}{50 \quad \text{عدد العمال الكلي}} = 0.54$$

٣- نفرض أن الحادثة C أن يكون العامل من القسم الأول أي أن C = {أن يكون العامل من القسم الأول} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(C) = \frac{12 \quad \text{عدد عمال القسم الاول}}{50 \quad \text{عدد العمال الكلي}} = 0.24$$

٤- نفرض أن الحادثة D أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني أي أن D = {أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني} فيكون الإحتمال المطلوب

$$P(D) = \frac{34 = (12 + 22) \quad \text{عدد عمال القسم الأول والثاني}}{50 \quad \text{عدد العمال الكلي}} = 0.68$$

٥- نفرض أن الحادثة E أن يكون العامل من القسم الأول و أعزب أي أن E = {أن يكون العامل من القسم الأول وأعزب} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(E) = \frac{\text{5 عدد عمال القسم الاول وعزاب}}{\text{50 عدد العمال الكلي}} = 0.1$$

١- تُجمع الاحتمالات في حالتين :

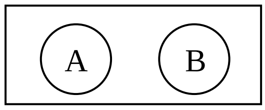
أ- في حالة كون الحوادث متنافية **ب- في حالة كون الحوادث غير متنافية**

اولاً: في حالة كون الحوادث متنافية: إذا كانت الحوادث A1 , A2 , A3 .... حوادث متنافية بمعنى أن حدوث أحدها يؤدي إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معاً يكون معدوماً فإن احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث فإذا كان B ، A حادثين متنافيين .

فإن P (A أو B) = P(A) + P(B) P تعنى احتمال

يرمز أيضاً لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز حوادث متنافية U

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



حوادث متنافية

مثال:

رمي حجر نرد مرة واحدة ، احسب:

١- احتمال الحصول على رقم ٥ أو ٦

٢- احتمال الحصول على رقم زوجي

الحل:

١- احتمال الحصول على رقم ٥ أو ٦ حادثتان متنافيتان ، أي أن:

A = {الحصول على الرقم ٥}

أو

B = {الحصول على الرقم ٦}

فإن:

$$P(A1 \cup A2) = (1/6) + (1/6) = 1/3$$

٢- احتمال الحصول على رقم زوجي يعني الحصول على رقم ٢ أو رقم ٤ أو رقم ٦ وكلها حوادث متنافية، أي أن:

A1= {الحصول على الرقم ٢}

و

A2 = {الحصول على الرقم ٤}

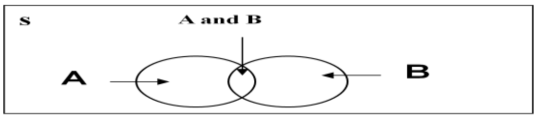
و

A3 = {الحصول على الرقم ٦}

فإن:

$$P(A1 \cup A2 \cup A3) = (1/6) + (1/6) + (1/6) = 1/2$$

ثانياً: في حالة كون الحوادث غير متنافية: عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحادث (A أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد كما يتضح من الشكل التالي



حوادث غير متنافية

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الأجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الاول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

١- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثالث

٢- احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول

٣- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب

الحل :

نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الثاني أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الثاني}

فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(A1)=12/50$$
$$P(A2)=22/50$$
$$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2) = (12/50)+(22/50) = 34/50 = 0.68$$

- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل متزوجا أي أن A1 = {أن يكون العامل متزوج}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(A1)=27/50$$
$$P(A2)=12/50$$
$$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (27/50)+(12/50)-(7/50) = 32/50 = 0.64$$

- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الثالث أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل أعزب أي أن A2 = {أن يكون العامل أعزب}

فيكون الإحتمال المطلوب:

$$P(A1)=16/50$$
$$P(A2)=23/50$$
$$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (16/50)+(23/50)-(10/50) = 29/50 = 0.58$$

- <u>الاحتمال الشرطي</u>

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان P: (A2) لا يساوي الصفر فأن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطي بالمعادلة التالية:

تعنى بشرط

$$P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ A1 , A2 على احتمال الحادث A2

مثال:

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر ألإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:

نفرض أن A1 = {نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}

A2 = {نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}

وبذلك يكون:

$P(A2)=0.64$

$P(A1 \cap A2)=0.32$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب $P(A1 | A2)$ وبتطبيق العلاقة :

$$P(A1 | A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الأجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الاول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

١ – احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟

٢ – احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟

٣ – الحل:

نفرض أن A1={أن يكون العامل من القسم الأول}

A2={أن يكون العامل متزوج}

B3={أن يكون العامل من القسم الثالث}

B4={أن يكون العامل أعزب}

فيكون بالتالي:

١ – احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج}}{\text{احتمال أن يكون متزوج}}$$

احتمال ان يكون العامل من القسم الاول بشرط انه متزوج $\mathbf{P\ (A1 \mid A2)\ =}\ \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}\ \mathbf{= 0.259}$

٢ – احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون من القسم الثالث وأعزب}}{\text{احتمال أن يكون من القسم الثالث}}$$

$$\mathbf{P\ (B1 \mid B2)\ =}\ \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16}\ \mathbf{= 0.625}$$

مثال اخر

تم تصنيف مائة شخص وفقاً للجنس ووفقاً للاصابة بمرض عمى الالوان . الجدول التالي يوضح ذلك .

الجنس / الاصابة	مصاب بعمى الالوان	غير مصاب بعمى الالوان	المجموع
ذكر	5	7	12
انثى	8	14	22
المجموع	3	97	100

افرض ان الحادثة A تمثل الشخص المصاب بعمى الالوان . وان الحادثة B تمثل الشخص الذكر. فأحسب التالي

١ – احتمال ان يكون الشخص مصاب بعمى الالوان وذكر أي ان(P(A| B

٢ – احتمال ان يكون الشخص ذكر بشرط ان يكون هذا الشخص مصاب بعمى الالوان أي ان (P (B|A

الحل

$$\mathbf{P(A \mid B) =} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{2}{60} = 0.33$$

$$\mathbf{P(B \mid A) =} \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{3}{100}} = \frac{2}{3} = \mathbf{0.66}$$