اسم المقرر
مبادىء الرياضيات (١)

د . ملفي الرشيدي
قسم الأساليب الكميـــة

جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

المحاضرة الأولى

العمليّات الجبريّة

عناصر المحاضرة

- الأعداد
- القيمّة المطلقة
- جمع المقاديرّ الجبريّة
- طرح المقاديرّ الجبريّة

انواع الأعداد

- الأعداد الحقيقية
  - أعداد صحيحة
  - أعداد غير صحيحة

انواع الأعداد

- الأعداد الصحيحة
  - الأعداد الطبيعية
  - الصفر
  - الأعدادالصحيحة السالبة

الأعداد الطبيعّية

- مثل الأعداد (١،٢،٣...) وتسمى الأعداد الصحيحّة الموجبة
- و يمّثل الرقم (١) وحدة قيأس و(٢) هو تكرار وحدة القيأس مرتينّ و هكذا

الأعدأ الصحيحّة السالبة

- وهى الأعداد الطبيعّية مسبوقة بإشارة سالب.
- وهى تعبر عن بعض الظواهر مثل عمليأت سحب من رصيدّك
  بالبنك أو السحب من المخزون أو عمليأت الصرف.
- مثل (.... ٣- ، ٢- ،١-)
- عند إضافة الصفر إلى الفئتينّ السابقتينّ تنتج الأعداد الصحيحّة.

الأعداد الصحيحّة السالبة

- الأعداد غير الصحيحة
  - الأعداد النسبية
  - الأعداد غير النسبية

الأعداد غيرالصحيحّة

- وهى الأعداد النسبيةّ وهي عبارة عن النسبة بينّ عددينّ صحيحينّ ويكّون المقام لا يسّاوي صفر.
- مثل .... ، $\frac{-٣}{٨}$ ، $\frac{٣}{٩}$ ، $\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{٢}{٧}$ √
- وأي عدد لا يمّكن كتابته على الصورة النسبيةّ مثل √2 و 4√6 يسمّى عدد غيرّ نسبي.

القيمّة المطلقة

- القيمّة المطلقة لأي عدد هي قيمّة العدد بدون النظر إلى الإشارة التى سبقت العدد.
- هذا يعّنى أن القيمّة المطلقة هي عدد موجب دائما .
- و يرّمز للقيمّة المطلقة للعدد x ب $|\chi|$

مثال:

- أوجد القيمّة المطلقة للمقاديرّالتاليةّ :

$\frac{١}{٩}$ ، $\frac{-٣}{٤}$ ، ١١ ، -٥

- القيمّة المطلقة للعدد (٥) = |-٥| = ٥
- القيمّة المطلقة للعدد (١١) = |١١| = ١١

العمليأت الجبرية

يوّجد فى الجبر أربع عمليأت أساسيةّ وهي:

- الجمع
- الطرح
- الضرب
- القسمة

جمع المقادير الجبرية

لجمع المقاديرّ فإننا نستخدم العلامة (+) للدلالة على عمليةّ الجمع والتي تمثل عمليةّ إضافة.

مثل:

٢+٥=٧

٧+٤=١١

$\chi^٢ + \chi^٣ = \chi^٥$

يشّترط لجمع أي مقدران جبريأن أن يكّونا من نفس النوع

فمثلا : 2x+5y

لا يمّكن جمعهعم و يظّل المقدار كما هو.

مثال: 3a+8b+9a+2b = 12a+10b

مثال:

أوجد ناتج حاصل جمع المقاديرّ التاليةّ:

7x+5y+9xy , 8x+2y

جمع المقادير الجبرية

الحل:

يمكن ترتيب المقدارن السابقان كما يلي:

$$\begin{array}{r} 7x+5y+9xy \\ 8x+2y \\ \hline 15x+7y+9xy \end{array}$$

نلاحظ من المثال السابق أن كلا من x وy تختلف عن xy لذلك عند الجمع يتّم التعامل مع كل مقدار على حدى.

طرح المقادير الجبرية

لطرح المقاديرّ فإننا نستخدم العلامة (-) للدلالة على عمليةّ الطرح والتي تمثل عمليةّ صرف أو سحب.

مثال:

إذا كان لد يكّ ١٠ ريأّلات وتم شراء حلويأت ب ٦ ريأّلات فإن المتبقى معك يكّون ٤ ريأّلات.

يمّكن التعبيرّ عن ذلك رياّضياً كما يلّي: ١٠-٦=٤

أي أن المقدار المصروف أو المسحوب نضع أمامه إشارة سالب.

لذلك عند إجراء عمليةّ الطرح يتّم تغييرّ إشارة العدد أو المقدار الجبرى المراد طرحه ثم نطبق قاعدة الجمع.

مثال:

أوجد ناتج 5x-3x

الحل: 5x-3x=2x

مثال:

أوجد ناتج 7y-12y

الحل: 7y-12y=5y

نلاحظ أن إشارة المقدار الأكبر هى سالبة لذلك عند الطرح نضع الفرق بينّ المقداران مع أشارة المقدار الأكبر.

مثال:

أوجد ناتج جمع المقاديرّ التاليةّ:

2x+7y , -2x-6y, 8x-3y

2x+7y

الحل: 2x-6y

8x-3y

8x-2y

نلاحظ أن عند جمع مقدارن جبريآن متساويآن فى القيمّة ومختلفان فى الأشارة فإن حاصل جمعهما يسّاوي صفر

مثال:

اوجد حاصل جمع المقاديرّ الجبريةّ التاليةّ:

2x+4y-3z, -4x-5z+2y, 6z+7x-8y

الحل:

نلاحظ أن المقاد يرّ الثالث السابقة غيرّ مرتبة لذلك فاننا عند جمعها لابد من ترتيبّها مع مراعاة كتابة أي مقدار بنفس الأشارة التى هو عليهّا كما يلّى:

2x+4y-3z

-4x+2y-5z

7x-8y+6z

5x-2y-2z

مثال:

اوجد ناتجّ: (4x+2y) - (2x+5y)

الحل:

نلاحظ وجود أشارة سالب أمام القوس الثانى لذلك عند فك القوس لابد من تغييرّ جميعّ اشارات المقاديرّ التى بداخل القوس كما يلّى:

(4x+2y) - (2x+5y) = 4x+2y-2x-5y

= 2x-3y

مثال:

اوجد ناتجّ: $(3x^2-3x+2)-(x^2-3x+11)$

الحل:

$$(3x^2-3x+2)-(x^2-3x+11)$$
$$=3x^2-3x+2-x^2+3x-11$$
$$=2x^2-9$$

مثال:

اوجد ناتجّ:

أطرح المقدار 7x+2y من 6x+5y

الحل: (6x+5y) - (7x+2y)

= 6x+5y - 7x-2y

= -x+3y

= 3y-x

نلاحظ أن المقدار الذى ذكر بعد حرف " من " هو الذى يكّتب اولا .

مثال:

أطرح المقدار $7a^2-5ab+8b^2$ من $3a^2+ab-5b^2$

الحل:

$$(3a^2+ab-5b^2)-(7a^2-5ab+8b^2)$$
$$=3a^2+ab-5b^2-7a^2+5ab-8b^2$$
$$=-4a^2+6ab-13b^2$$

إيجّاد قيمّة المقاديرّ الجبريةّ

و يقّصد به عمليةّ التعويضّ بقيمّة المتغيرّات الموجود ه بالمقدار الجبرى لإيجّاد قيمّة هذا المقدار.

مثال:

إذا كان x=2, y=3, z=5

أوجد قيمّة المقدار 3x-7y+9z

الحل: 3x-7y+9z

= ٣(٢)-٧(٣)+٩(٥)

=٦-٢١+٤٥

=٣٠

مثال:

أوجد قيمُة المقدار 3a-4b+6c

إذا كان: c=-١ ، b=-٢ ، a=٣

٣a – ٤b + ٦c

الحل:

=٣ (٣) – ٤ (-٢) ٦ + (-١)

=٩+٨-٦

=١١

مثال:

إذا كان: x=-1 , y=2 , z=-3

أوجد قيمُة المقدار 3xz + 5xy - 2zy

الحل: 3xz + 5xy - 2zy

=٣(-١)(-٣)+٥(-١)(٢) – ٢(-٣)(٢)

=٩-١٠+١٢

=١١

حل تمارين جمع المقادير الجبرية

اولا- أوجد ناتج العمليات التالية:

(1) 8-6+3 = 5

(2) -3+8-11 = -6

(3) 5n+7n-n = 11n

(4) 6m+3n-7m-2n = -m+n = n-m

(5) $6a^2 + 3ab - 4b^2 - 8a^2 - 5ab - 5b^2$

$= -2a^2 - 2ab - 9b^2$

حل تمارين جمع المقادير الجبرية

ثاني - أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

1) 5x2y-z , 2x3y-z , 2x-5y7z

=9x + 5z

2) 4m -5 n 6 k , 10 k -3m 4 n , 2n -2 m -k

=-m+n+15k

3) 2n L m , 4n -m , 7m -3 L

=7m+6n-2L

تمارين

ثالث - أوجد ناتج العمليات التالية:

١) أطرح 9x-2y من 5x-4y

= (5x-4y) – (9x-2y)

= 5x – 4y – 9x + 2y = -4x – 2y

2) أطرح 3a-8b+c من 4a-6b+2c

(4a-6b+2c) – (3a-8b+c)

=4a-6b+2c-3a+8b-c = a+2b+c

حل تمارين جمع المقادير الجبرية

٣) (7m-2n)-(3m + 4n)

= 7m – 2n – 3m – 4n = 4m – 6n

4) (3a-7b) – (2a+5b)+(3a+8b)

= 3a – 7b – 2a -5b + 3a + 8b = 4a – 4b

المحاضرة ٢ /ضرب المقادير الجبرية

عملية الضرب تعرف حسابيا على أنها عدد مرات تكرار الجمع لعدد معين.

فمثلا 6+6+6+6+6 = 6x5 = 30

عند ضرب المقادير الجبرية لا بد من مراعاة قاعدة الإشارات كما فى الجدول التالى:

+	=	+	×	+
−	=	−	×	+
−	=	+	×	−
+	=	−	×	−

أى أنه إذا اتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون "–"

مثال: 3x7=21

-٢ x١١ = -22

-5x-4 =20

7 x 4χ = 28χ

2 χ x – 5y = -10 χy

نلاحظ أن χy هى نفسها χ x y وهى أيضا χ . y

مثال:

أوجد ناتج $2(4x-3y) + 3(7x+9y) - (x-4y)$

الحل:

$2(4x-3y) + 3(7x+9y) - (x-4y)$

$= 8x - 6y + 21x + 27y - x + 4y$

$= 28x + 25y$

مثال:

أوجد ناتج $2a(3-4b) - 4b(5-3a)$

الحل:

$2a(3-4b) - 4b(5-3a)$

$=6a-8ab-20b+12ab$

$= 6a+4ab-20b$

قاعدة هامة:

إذا اتحدت الأساسات فائة عند الضرب تجمع الأساس

مثال : إذا كان المقدار x^5 فأن

x^5

أس

أساس

مثال:

أوجد ناتج $x^5 \times x^3$

الحل: $x^5 \times x^3 = x^{5+3} = x^8$

مثال:

أوجد ناتج $y^4 \times y^{-5} \times y^3$

الحل: $y^4 \times y^{-5} \times y^3 = y^{4-5+3} = y^2$

مثال : أوجد ناتج $3^{-4} \times 3^{-2} \times 3^4 = 3^{-2}$

قاعدة هامة:

أى مقدار أس صفر = ١

مثال : أوجد ناتج $2^{-7} \times 2^5 \times 2^2$

الحل: $2^{-7} \times 2^5 \times 2^2 = 2^0 = 1$

مثال : أوجد ناتج $2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x)$

الحل:

$2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x)$

$= 10x - 6x^2 + 21x - 3 - 15x + 20x^2$

$= 14x^2 + 16x - 3$

مثال : أوجد ناتج $5a(2a+4b)-3(2a-2b)+3b(3a-4b)$

الحل:

$5a(2a+4b)-3(2a-2b)+3b(3a-4b)$

$= 10a^2 + 20ab - 6a + 6b + 9ab - 12b^2$

$= 10a^2 + 29ab - 6a + 6b - 12b^2$

مثال:

أوجد ناتج (2x-y) (3x+4y)

الحل:

$$(2x-y)(3x+4y)$$
$$=6x^2+8xy-3xy-4y^2$$
$$=6x^2+5xy-4y^2$$

مثال : أوجد ناتج (4a+b)(3a-2b)

الحل:

(4a+b)(3a-2b)

$$=12a^2-8ab+3ab-2b^2$$
$$=12a^2-5ab-2b^2$$

مثال : أوجد ناتج $(4m+n)^2$

الحل:

$$(4m+n)^2=(4m+n)(4m+n)$$
$$=16m^2+4mn+4mn+n^2$$
$$=16m^2+8mn+n^2$$

فى التمرين السابق كان من الممكن إيجاد الناتج مباشرة بتطبيق القاعدة التالية:

الحل = مربع المقدار الأول + ٢ x الأول x الثانى + مربع الثانى

مثال : أوجد ناتج $(2x-y)^2$

الحل:

$$(2x-y)^2=4x^2-4xy+y^2$$

مثال : أوجد ناتج (2x-y)²+(3x+y)(2x-y)

الحل:

$(2x-y)^2+(3x+y)(2x-y)$

$=4x^2-4xy+y^2+6x^2-3xy+2xy-y^2$

$=10x^2-5xy$

اولا- أوجد ناتج ما يلى: **4(7x+2y)**

الحل:

3(4a-b)-2(a-5b)+4(a+b)

$Y^4 \times y^{-2} \times y^7 + u^{-4} \times u^{-3} \times u^7$

$3^{-5} \times 3^4 \times 2^{-4} \times 2^5$

7a(3+a)+5(2a-8)-2a(4-3a)

تمارين

ثانيا- اوجد ناتج:

1- (c+3d)(2c-d)
2- $(2g+t)^2$
3- $(3m-2n)^2$
4- $(x+2y)^2+(2x-y)^2$
5- $(a+b)^2+(5a-2b)(3a-b)$

المحاضرة ٣ (حل المعادلات الخطية)

سنتعرض إن شاء الله إلى حل المعادلات:

اولا - المعادلات الخطية فى مجهول واحد

ثانيا- المعادلات الخطية في مجهولين

اولا - المعادلات الخطية فى مجهول واحد

مثال

حل المعادلة التالية $5x = 2x + 12$

الحل

$$5x = 2x + 12$$
$$5x - 2x = 12$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3} = 4$$

مثال: حل المعادلة التالية $4x + 5 = x - 3$

الحل:

$$4x + 5 = x - 3$$
$$4x - x = -3 - 5$$
$$3x = -8$$
$$x = \frac{-8}{3}$$

مثال حل المعادلة التالية

$$2(y+2)+5(3y-7) = 5(3y-11) + 12$$

الحل: يتم فك الأقواس اولا ا كما يلي

$$2(y+2)+5(3y-7) = 5(3y-11) + 12$$
$$2y+4+15y-35 = 15y - 55 + 12$$
$$2y+15y-15y = -55 + 12 - 4 + 35$$
$$2y = -12$$
$$y = \frac{-12}{2} = -6$$

مثال حل المعادلة التالية

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

الحل: في هذه الحاله حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أى أن

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$
$$3(3x+1) = 5(2x-1)$$
$$9x+3 = 10x - 5$$
$$9x-10x = -5 - 3$$
$$-x = -8$$
$$x = 8$$

مثال حل المعادلة التالية

$$\frac{5x-1}{3} + \frac{4x-7}{2} = \frac{9x-11}{7}$$

الحل: في هذه الحالة لابد من توحيد المقامات اولا ا للطرف الأيمن

$$\frac{5x-1}{3} + \frac{4x-7}{2} = \frac{9x-11}{7}$$
$$\frac{2(5x-1)+(4x-7)}{6} = \frac{9x-11}{7}$$
$$\frac{10x-2+12x-21}{6} = \frac{9x-11}{7}$$
$$\frac{22x-23}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

ثم حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$\frac{22x-23}{6} = \frac{9x-11}{7}$$
$$7(22x-23) = 6(9x-11)$$
$$154x-161 = 54x - 66$$
$$154x-54x = -66 + 161$$
$$100x = 95$$
$$x = \frac{95}{100} = 0.95$$

ثانيا- حل المعادلات الخطية فى مجهولين

مثال حل المعادلات التالية :

$$5x+2y = 12 \quad \rightarrow (1)$$
$$7x-3y = 11 \quad \rightarrow (2)$$

الحل : يتم ضرب المعادلة $7x(1)$ والمعادلة $5x(2)$ وبطرح المعادلتين (4) من معادلة (3)

$$35x+14y = 84 \quad \rightarrow (3)$$
$$-35x-15y = -55 \quad \rightarrow (4)$$
$$29y = 29$$
$$y = \frac{29}{29} = 1$$

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة $Y=1$ ينتج أن

$$5x + 2y = 12$$
$$5x + 2(1) = 12$$
$$5x + 2 = 12$$
$$5x = 12 - 2$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

أى أن الحل هو $x=2$ و $Y=1$

ثانيا- حل المعادلات الخطية فى مجهولين

مثال حل المعادلات التالية :

$$5x+2y = 12 \quad \rightarrow (1)$$
$$7x-3y = 11 \quad \rightarrow (2)$$

الحل : يتم ضرب المعادلة $7x(1)$ والمعادلة $5x(2)$ وبطرح المعادلتين (4) من معادلة (3)

$$35x+14y = 84 \quad \rightarrow (3)$$
$$-35x-15y = -55 \quad \rightarrow (4)$$
$$29y = 29$$
$$y = \frac{29}{29} = 1$$

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة $Y=-1$ ينتج أن

$$3x - 5y = 8$$
$$3x - 5(-1) = 8$$
$$3x + 5 = 8$$
$$3x = 8 - 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

أى أن الحل هو $x=1$ و $Y=-1$

تمارين

حل المعادلات التالية

1 $9y - 3 = 4y + 7$

2 $3(x - 5) + (x + 2) = 4(x-1) + 15$

3 $\frac{4x - 1}{2} = \frac{x + 8}{3}$

4 $\frac{2x + 1}{2} + \frac{x - 1}{5} = \frac{7x-2}{4}$

تمارين

حل المعادلات التالية

5
$$5x - y = 17$$
$$2x + y = 4$$

6
$$3x + 7y = 8$$
$$5x - 3y = 6$$

المحاضرة ٤
تطبيقاتٌ تجاريةٌ واقتصادية

مثال :

انفقت مريم في معرض للكتب ١٢٠ ريال لشراء ٤ كتب ثقافية على حين انفق يوسف ٢٩٠ ريال لشراء ٤ كتب علمية و ٥ كتب ثقافية اذا كانت الكتب الثقافية تباع بالسعر نفسه xوالكتب العلمية تباع بالسعر نفسه yفما سعر الكتاب العلمي ؟

الحل: اولا - إيجاد سعر الكتاب الثقافى $x = \frac{120}{4} = 30$ ريال

ثانيا- إيجاد سعر الكتاب العلمي

$$290 = 5x + 4y$$
$$290 = 5\,(30) + 4y$$
$$290 = 150 + 4y$$
$$290 - 150 = 4y$$
$$4y = 140$$
$$y = \frac{140}{4} = 35 \text{ ريال}$$

مثال

بستان يحّوي ١٩٧ شجرة من الليمّون ، البرتقال ، الرمان والتفاح . عدد اشجار الليمّون يساّوي ٦ اضعاف عدد اشجار البرتقال . عدد اشجار البرتقال يساّوي ثلث اشجار الرمان . عدد اشجار الرمان اقل من عدد اشجار التفاح بشجرتينّ . كم شجرة يوّجد من كل نوع ؟

الحل: نفرض أن عدد اشجار التفاح هى X

ومنها يكون عدد اشجار الرمان هى

ويكون عدد اشجار البرتقال هى $\frac{1}{3}(X-2)$

عدد اشجار الليمون هى $6x\frac{1}{3}(x-2) = 2(x-2) = 2x-4$

مجموع عدد الاشجار هو ١٩٧ لذلك يكون

$$(2x-4)+\frac{1}{3}(x-2)+(x-2)+x=197$$
$$2x-4+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+x-2+x=197$$
$$4\frac{1}{3}x - 6\frac{2}{3}=197$$
$$\frac{13x-20}{3}=197$$
$$13x-20=591$$
$$13x= 591 + 20 = 611$$
$$x= \frac{611}{13} = 47$$

عدد أشجار التفاح = ٤٧ شجرة

عدد اشجار الرمان = $45=47-2=x-2$ شجرة

عدد اشجار البرتقال = $15=\frac{1}{3}x45=\frac{1}{3}(x-2)$ شجرة

عدد اشجار الليمون = $90 = 2(47) - 4 = 2x - 4$ شجرة

أو عدد اشجار الليمون = $90 = 6 \times 15$ شجرة

للتأكد من الحل فأن $47+45+15+90 = 197$

نقطة التوازن للسوق

هى النقطة التى يكون عنها دالة الطلب = دالة العرض

$S(x) = D(x)$

ويطلق على الكمية المطلوبه او المعروضه عندها بكمية التوازن

وإيضا السعر عند هذة النقطة يطلق علية سعر التوازن P

مثال:

اذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد من خلال العلاقة التالية:

$P=180 - 3x$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال: $P= 5x + 20$

المطلوب :

تحديد كمية وسعر التوازن؟

الحل

عند التوازن دالة الطلب = دالة العرض

$180-3x = 5x+20$

$180-20 = 5x+3x$

$160 = 8x$

$X= \frac{160}{8} = 20$

أى أن كمية التوازن هى ٢٠ وحدة.

لتحديد سعر التوازن يتم التعويض فى أى من دالتى الطلب أو العرض كما يلى:

$P=180-3x$

$P=180-3(20)$

$P=180-60$

$P=120$ ريال

أو $P= 5x+20$

$P= 5(20)+20$

$P=120$ ريال

نقطة التعادل

عند دراسة تحليل الايرادات والتكاليف فأننا نحدد نقطة التعادل وهى النقطة التى تتساوى عندها الايرادات مع التكاليف.

أى أن الإيراد الكلى = التكاليف الكلية

$C(x) = R(x)$

تشير x إلى عدد الوحدات المنتجة والمباعه

حل المعادلات التالية

الايراد الكلى $R(x)$

ويتحدد من خلال الايراد الكلى = سعر البيع x عدد الوحدات

التكاليف الكلية $C(x)$

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة

التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة x عدد الوحدات

تحديد الربح الكلى

الربح الكلى = الايراد الكلى – التكاليف الكلية

$P(x) = R(x) - C(x)$

عند التعادل

الربح الكلى = صفر

$P(x) = 0$

مثال:

إذا كان التكلفة المتغيرة لإنتاج وحدة واحدة من احد المنتجات هى ٥ ريال و التكاليفُ الثابتة هى ١٠٠٠٠٠ ريال و سعر بيعِّ الوحدة الواحدة هو ٩ ريال.

أوجد :

عدد الوحدات الذى حّقق التعادل؟

عدد الوحدات الذى يحّقق ربح قدره ٢٠٠٠٠ ريال ؟

الحل:

تحديد دالة التكاليف الكلية:

التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة x عدد الوحدات

التكاليف المتغيرة = ٥x

التكاليف الثابتة = ١٠٠٠٠٠

التكاليف الكلية هى $C(x)=5x+100000$

تحديد الإيراد الكلى:

الايراد الكلى = سعر البيع x عدد الوحدات

$R(x)= 9x$

الربح الكلى = الايراد الكلى – التكاليف الكلية

$P(x)=R(x)- C(x)$

$=9x - (5x+100000)$

$=9x - 5x - 100000$

$=4x - 100000$

عند التعادل

الربح الكلى = صفر

$P(x)= 4x - 100000 = 0$

$4x=100000$

$X = \frac{100000}{4} = 25000$ وحدة

عدد الوحدات الذى يحقق ربح قدرة ٢٠٠٠٠ ريال

الربح الكلى = ٢٠٠٠٠

$P(x)= 4x - 100000 = 20000$

$4x=100000 + 100000 = 120000$

$X = \frac{120000}{4} = 30000$ وحدة

تمارين

١- سار محمد بسيارة تبلغ سرعتها ٦٠ كم / ساعة فوصل الى المكان المحدد في الساعة السادسة مساء ا وعندما ساربسرعة ٩٠ كم / ساعة من نفس نقطة البدايةٍ وصل الى المكان المحدد نفسه الساعة الرابعة مساء ا

فهل يمّكنك معرفة السرعة التي يجّب أن يصّل بها الى نفس المكان المحدد في تمام الساعة الخامسة مساء ا ؟؟

تمارين

٢- اشترى محمود بضاعة بمبلغ ٣٤٥٠ ريال فباعها بمبلغ ٥٠٠٠ ريال حدد نسبة الربح التى حققها؟

٣ - إذا كان سعر بيع الوحدة من احد المنتجات ٤٠ ريال و التكلفة المتغيرة للوحدة ٢٥ ريال والتكاليف الثابتة هى ٧٥٠٠٠ ريال.

حدد عدد الوحدات التى تحقق التعادل و ماهى الارباح الناتجة من بيع وانتاج ٤٠٠٠ وحدة؟ وما هى عدد الوحدات التى يجب بيعها لتحقيق ارباح قدرها ١٠٠٠٠ ريال؟

تمارين

٤ - اذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد من خلال العلاقة التالية:

$P= 145 - 4x$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال:

$P= 2x + 13$

المطلوب :

تحديد كمية وسعر التوازن؟

تمارين

5- رجل لديه اربع اولاد هم عبدالله و زينب و محمد و نور فإذا كان عمر نور ربع عمر محمد و عمر عبد الله هو مجموع عمر نور و محمد و زينب يزيد عن عمر محمد بعاميين. فأذا كان مجموع أعمار الأولاد ٥٨ حدد عمر كلاا منهم ؟

المحاضرة ٥/ تحليلٌ المقاديرٌ الجبريةٌ

يقصد بتحليلٌ المقدار الجبري هو إيجّاد المكونات الأساسيةٌ لهذا المقدار

طرق تحليلٌ المقاديرٌ الجبريةٌ

هناك العديدٌ من الطرق لتحليلٌ المقدار الجبري منها :

- **العامل المشترك**
- **الفرق بينٌ المربعينٌ**
- **الفرق بين المكعبينٌ**
- **مجموع المكعبين**
- **تحليلٌ المقدار الثلاثي**

اولا- العامل المشترك

وهو يعٌني المقدار الموجود في جميعٌ عناصر المقدار الجبري

مثال : حلل المقدار $5xy + x^2$

الحل: $5xy + x^2 = x(5y+x)$

مثال : حلل المقدار $9ab + 3bc$

الحل:

$9ab + 3bc = 3b(3a+c)$

مثال : حلل المقدار $2y^2 - 8y + 18y^7$

الحل:

$2y^2 - 8y + 18y^7$

$2y(y-4+9y^6)$

مثال : حلل المقدار $24x^3y - 15xy^3$

الحل:

$24x^3y - 15xy^3$

$= 3xy\ (8x^2 - 5y^2)$

ثانيا - الفرق بينٌ المربعينٌ

إذا كان لدينا مقدران مربعان وبينهما اشارة سالب يطلق على هذا المقدار الفرق بين المربعين مثل $x^2 - y^2$

يمٌكن تحليلٌ الفرق بينٌ المربعينٌ كما يلٌي

= (الجذر التربيعٌي الأول – الجذر التربيعٌي الثانى) (الجذر التربيعٌي الأول + الجذر التربيعٌي الثانى)

أي أن $X^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

مثال : حلل المقدار $25x^2 - y^2$

الحل: $25x^2 - y^2 = (5x-y)(5x+y)$

مثال : حل المقدار $64x^3 - 4xy^2$

الحل:

$64x^3 - 4xy^2$

$= 4x(16x^2 - y^2)$

$= 4x(4x - y)\ (4x+y)$

مثال : حل المقدار $48x^2y - 75y^3$

الحل:

$48x^2y - 75y^3$

$= 3y(16x^2 - 25y^2)$

$= 3y(4x - 5y)(4x+5y)$

مثال : حل المقدار $169x^5\ y - 144xy^5$

الحل:

$169x^5\ y - 144xy^5$

$= xy\ (169x^4 - 144y^4$

$= xy\ (13x^2 - 12y^2)(13x^2+12y^2)$

ثالثا - الفرق بين المكعبين

- يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة سالب الفرق بين المكعبين مثل $x^3 - y^3$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلي قوسين أحدهما صغير والأخر كبير كما يلي

(جذر الأول-جذر الثاني) (مربع الأول +جذرالأول*جذر الثاني+مربع الثاني)

أى أن : $X^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

مثال : حل المقدار $8a^3 - 125b^3$

الحل:

$8a^3 - 125b^3$

$= (2a-5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)$

مثال : حل المقدار $27x^3 - 216y^3$

الحل:

$27x^3 - 216y^3$

$= (3x-6y)(9x^2 + 18xy + 36y^2)$

$= 3(x-2y)9(x^2 + 2xy + 4y^2)$

$= 27(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

حل أخر لتحليل المقدار $27x^3 - 216y^3$

يمكن اخذ عامل مشترك من البداية ٢٧ ويكون الحل كما يلي:

الحل:

$27x^3 - 216y^3$

$= 27(x^3-8y^3)$

$= 27(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

رابعا - مجموع المكعبين

يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة موجب مجموع المكعبين: $x^3 + y^3$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلي قوسين أحدهما صغير والأخر كبير كما يلي

(جذر الأول+جذر الثاني) (مربع الأول- جذرالأول*جذر الثاني+مربع الثاني)

أى أن :

$X^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

مثال : حل المقدار $64x^3 + 125y^3$

الحل:

$$64x^3 + 125y^3$$
$$= (4x+5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

مثال : حل المقدار $24bc^4 + 81b^4c$

الحل:

$$24bc^4 + 81b^4c$$
$$= 3bc(8c^3 + 27b^3)$$
$$= 3bc(2c + 3b) + (4c^2 - 6bc + 9b^2)$$

التمارينّ

حل المقاديرّ التاليةّ :

1 $X^3 + 5x^2 - 7x^5$

2 $25g^3h^2 + 75g^5h^7$

3 $48L^3 - 75Ld^2$

4 $18u^3v^3 - 50uv^5$

التمارينّ

حل المقاديرّ التاليةّ :

1 $27a^3 - x^3$

2 $72c^5d^3 - 242c^3d^5$

3 $X^3 - 64$

4 $125 + 8r^3$

5 $250x^2y^5 + 2x^5y^2$

المحاضرة ٦/ حل المعادلات من الدرجة الثانية في مجهول واحد

تكون صورة المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد هى

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ويمكن حلها باستخدام التحليل أو باستخدام القانون كما يلى

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

الحل: يتم تحليل المقدار الثلاثي كما يلي

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x-2)(x-5) = 0$$
$$\begin{cases} x-2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$$

حل أخر باستخدام القانون

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$a = 1 \quad b = -7 \quad c = 10$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$
$$x = \frac{7+3}{2} = 5 \qquad x = \frac{7-3}{2} = 2$$

مثال : حل المعادلة التالية

$$x^2 - 2x = 24$$

الحل: لابد أن نجعل المعادلة تساوى صفر

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

وبالتحليل

$$(x+4)(x-6) = 0$$
$$\begin{cases} x+4=0 \rightarrow x=-4 \\ x-6=0 \rightarrow x=6 \end{cases}$$

حل أخر باستخدام القانون

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = -24$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-24)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2+10}{2} = 6 \qquad x = \frac{2-10}{2} = -4$$

مثال:

حل المعادلة $12x^2 + 4x = 33$

الحل $12x^2 + 4x - 33 = 0$

الحل باستخدام القانون

$$12x^2 + 4x - 33 = 0$$

$$a = 12 \qquad b = 4 \qquad c = -33$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(12)(-33)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{-4+40}{24} = 1.5 \qquad x = \frac{-4-40}{24} = 1.833$$

تمارين

حل المعادلات التالية:

$$1- \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$2- \quad x^2 + 4x = 32$$

$$3- \quad 2x^2 - 17x + 8 = 0$$

تطبيقات تجارية و اقتصادية

مثال:

إذا كانت دالة العرض لأحد المنتجات هى $p = S(x) = x^2 + 14$

وكانت دالة الطلب هى $p = D(x) = 174 - 6x$

المطلوب: حدد كمية وسعر التوازن؟

الحل:

عند التوازن

دالة الطلب = دالة العرض

$$p = D(x) = S(x)$$

$$174 - 6x = x^2 + 14$$

$$x^2 + 6x + 14 - 174 = 0$$

$$x^2 + 6x - 160 = 0$$

$$(x - 10)(x + 16) = 0$$

$x + 16 = 0 \quad \rightarrow x = -16$ مرفوض

$x - 10 = 0 \quad \rightarrow x = 10$ كمية التوازن

تحديد سعر التوازن بالتعويض فى دالة العرض

$$p = x^2 + 14$$

$$p = (10)^2 + 14 = 114$$

او بالتعويض فى دالة الطلب

$$p = 174 - 6x$$

$$p = 174 - 6(10) = 114$$

المحاضرة ٧/ الأسس واللوغاريتمات

سبق وان درسنا قاعدة هامة:

١. إذا اتحدت الأساسات فأنه عند الضرب تجمع الأسس

٢. عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس.

مثال: أختصر المقدار التالى: $\dfrac{z^5 n^3 z^4}{n^2 z^2 n^3}$

الحل:

$$\frac{z^5 n^3 z^4}{n^2 z^2 n^3} = \frac{z^9 n^3}{z^2 n^5} = z^{9-2} n^{3-5} = z^7 n^{-2}$$

قاعدة هامة :

$$(x^n)^m = x^{n\times m}$$

مثال :

$$(2^5)^3 = 2^{3\times 5} = 2^{15}$$

مثال: اختصر

$$(x^5)^{-1} = x^{5\times -1} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

مثال: اختصر المقدار $\left(\dfrac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3$

الحل:

$$\left(\frac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3 = \frac{2^3a^3b^9}{3^3b^3a^6} = \frac{8}{27}a^{3-6}b^{9-3}$$

$$= \frac{8}{27}a^{-3}b^6 = \frac{8b^6}{27a^3}$$

الحل مثال: اختصر المقدار $\sqrt[3]{27x^9}$

الحل:

$$\sqrt[3]{27x^9} = 27^{\frac{1}{3}}x^{\frac{9}{3}} = 3x^3$$

مثال: اختصر المقدار $\sqrt{\dfrac{75m^3n}{3mn^3}}$

الحل:

$$\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}} = \sqrt{25m^2n^{-2}} = 5mn^{-1} = \frac{5m}{n}$$

تمارين

مثال: حل المعادلة التالية:

$$(x-1)^2 = 64$$

الحل:

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{64}$$

$$x-1=8$$

$$x=8+1=9$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}} = 2$$

الحل

$$\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}} = 2$$

بتكعيب الطرفين

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x+42}{3}}\right)^3 = (2)^3$$

$$\frac{x+42}{3} = 8$$

$$x+42 = 8x$$

$$42 = 8x - x$$

$$42 = 7x$$

$$x = \frac{42}{7} = 6$$

تمارين

اختصر المقادير التالية:

$$1- \quad \left(\frac{2xy}{5xy^2}\right)^2$$

$$2- \quad \sqrt[3]{64L^9 f^{-6}}$$

تمارين

$$3- \quad \frac{25d^7w^2}{5d^2w}$$

$$4- \quad \sqrt[3]{\frac{128x^5y^7}{2x^{-1}y}}$$

اللوغاريتمات

هي قوة الأس المرفوع لأساس معين

$$10^3 = 1000$$

لذلك يكون

$$\log_{10} 1000 = 3$$

الأساس الأس

وكذلك $32 = 2^5$

$$\log_2 32 = 5$$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_5 a = 3$

الحل:

$$\log_5 a = 3$$

$$a = 5^3 = 125$$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_2 x = 7$

الحل:

$$\log_2 x = 7$$

$$x = 2^7 = 128$$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_x 64 = 2$

الحل:

$$\log_x 64 = 2$$

$$64 = x^2$$

$$x = \sqrt{64} = 8$$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_a 256 = 4$

الحل:

$$\log_a 256 = 4$$

$$256 = a^4$$

$$a = 256^{\frac{1}{4}} = 4$$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_a 256 = 4$

الحل:

$$\log_a 256 = 4$$

$$256 = a^4$$

$$a = 256^{\frac{1}{4}} = 4$$

تمارين

أوجد قيمة المجهول فيما يلى :

$$1- \quad \log_3 9 = t$$

$$2- \quad \log_a 81 = 2$$

$$3- \quad \log_5 125 = k$$

تمارين

أوجد قيمة المجهول فيما يلى :

$$4- \quad \log_{49} x = \frac{3}{2}$$

$$5- \quad \log_{81} r = \frac{3}{4}$$

$$6- \quad \log_{121} x = \frac{1}{2}$$

$$7- \quad \log_{625} 125 = g$$

قوانين اللوغاريتمات

$$\log x^n = n\log x$$

مثال:

$$\log 5^4 = 4\log 5$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2$$

قوانين اللوغاريتمات

$$\log(x \times y) = \log x + \log y$$

مثال:

$$\log 20 = \log(5\times 4) = \log 5 + \log 4$$

$$\log 42 = \log(6\times 7) = \log 6 + \log 7$$

قوانين اللوغاريتمات

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

مثال:

$$\log\left(\frac{35}{2}\right) = \log 35 - \log 2$$

$$= \log(7\times 5) - \log 2$$

$$= \log 7 + \log 5 - \log 2$$

- هام جدا :

$$\log_a a = 1$$

$$\log_5 5 = 1 \qquad \log_7 7 = 1 \qquad \log 10 = 1$$

إذا لم يكتب الأساس تحت اللوغاريتم يكون ١٠

مثال: أوجد قيمة المقدار

$$\log 2 - \log 10 + \log 5 + 2\log\sqrt{10} - \log 16 + \log 4^2$$

الحل:

$$= \log 2 - 1 + \log 5 + 2\log 10^{\frac{1}{2}} - \log 4^2 + \log 4^2$$

$$= \log(2\times 5) - 1 + 2\times\frac{1}{2}\log 10$$

$$= \log 10 - 1 + \log 10$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1$$

تمارين

أوجد قيمة المقدار

$$\log_7 125 + \log_7 64 - 3\log_7 20 + \log_7 49$$

أوجد قيمة المقدار

$$\frac{1}{2}\log_5 625 - \log_5 35 + \log_5 14 - \log_5 10$$

المحاضرة ٨/ التباديل

وهي تشير إلى عدد طرق ترتيب الأشياء. ويرمز لها بالرمز P فأذا كان لدينا n من الأشياء نريد ترتيبها r من الترتيبات فأن

عدد طرق الترتيب هي ${}_nP_r$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

- مثال: اوجد قيمة ${}_5P_2$

$${}_5P_2 = 5\times 4 = 20$$

- مثال: اوجد قيمة ${}_6P_3$

$${}_6P_3 = 6\times 5\times 4 = 120$$

• لاحظ أن $_nP_n = n!$

أى أن $_3P_3 = 3! = 3\times2\times1$

كما أن $_5P_5 = 5! = 5\times4\times3\times2\times1$

• مثال أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة $_6P_2$ هى

أ 12 ب 30 ج 36 د 15

الحل $_6P_2 = 6\times5 = 30$

الإجابة هى ب

• مثال أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة $_6P_6$ هى

أ 36 ب 6^2 ج $6!$ د 256

الحل $_6P_6 = 6!$

الإجابة هى ج

مثال: أتفقت ٦ فرق رياضية على تكوين دورى خاص بها احسب عدد المباريات التى يتم لعبها؟

الحل:

عدد المباريات

عدد المباريات= $_6P_2 = 6\times5 = 30$ مباراة

• مثال:

بكم طريقة يمكن جلوس ٤ اشخاص على ٥ كراسى ؟

الحل:

عدد الطرق= $_5P_4 = 5\times4\times3\times2 = 120$ طريقة

التوافيق

وتشير إلى عدد طرق الاختيار. ويرمز لها بالرمز C

فأذا كان لدينا n من الأشياء ونريد أن نختار منها عدد r فأن عدد طرق الاختيار هى ق . حيث أن

$_nC_r$

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)_r}{r(r-1)(r-2)...3\times2\times1}$$

• مثال: اوجد قيمة $5C2$ ؟

الحل:

$$5C2 = \frac{5\times4}{2\times1} = \frac{20}{2} = 10$$

• مثال: اوجد قيمة $7C4$ ؟

الحل:

$$7C4 = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} = 35$$

هام جداً

$$nCn = 1$$

أى أن $12C12 = 1$ $8C8 = 1$ $6C6 = 1$

$$nC0 = 1$$

أى أن $10C0 = 1$ $7C0 = 1$ $4C0 = 1$

$$nC1 = n$$

أى أن $7C1 = 7$ $11C1 = 11$ $5C1 = 5$

مثال: إدارة بها ١٢ موظف نريد أن نختار منهم ٣ لتكوين لجنة أحسب عدد طرق الاختيار؟

الحل:

عدد طرق الاختيار

$$12C3 = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$$

مثال: بفرض فى المثال السابق إذا نص على أن مدير الأدارة لابد من اختياره أحسب عدد طرق الاختيار ؟

الحل:

عدد طرق الاختيار =

$$11C2 = \frac{11\times10}{2\times1} = 55$$

تمارين

ثانيا - أوجد قيمة

$8P2$ $5P3$ $7P4$ $3!$ $4P4$

$8C2$ $9P3$ $7C4$ $6C6$ $6C0$

$9C1$

تمارين

ثالثا -

١ - اتفقت ١٠ فرق رياضية على تكوين دورى فيما بينها أوجد عدد المباريات التى يمكن لعبها؟

٢ - إدارة بها ١٥ موظف نريد تكوين منهم لجنة مكونه من ثلاثة اوجد عدد طرق الاختيار ؟

٣ - فى السؤال السابق إذا كان لابد من وجود مدير الإدارة ضمن أعضاء اللجنة أحسب عدد طرق الاختيار ؟

المحاضرة ٩/ نظرية ذات الحدين

مثال:

أوجد مفكوك $(x+3)^2$ ؟

الحل:

سبق وأن درسنا أنه يمكن فك هذا المقدار باستخدام قاعدة الضرب

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

مثال:

أوجد مفكوك $(x+3)^3$ ؟

نلاحظ هنا أن الأس ليس ٢ وإنما هو ٣ لذلك لا تصلح القاعدة السابقة و يتم إجراء الضرب للقوس في نفسه ثلاث مرات أونطبق القاعدة ثم نضرب الناتج في القوس نفسه مرة أخرى

وفى حالة الأس أكبر من هذا يكون الأمر أطول وأصعب لذا جاءت نظرية ذات الحدين لتحل لنا هذه المشكلة كما يتضح مما يلى:

نظرية ذات الحدين

$$(x+a)^n = nC0a^0x^n + nC1a^1x^{n-1} + nC2a^2x^{n-2} + \ldots + nCna^nx^0$$

مثال:

أوجد مفكوك $(x+3)^3$ ؟

قيمة

$$\begin{aligned}(x+3)^3 &= 3C0(3)^0x^3\\ &+3C1(3)^1x^2\\ &+3C2(3)^2x^1\\ &+3C3(3)^3x^0\\ (x+3)^3 &= x^3+9x^2+27x+27\end{aligned}$$

نظرية ذات الحدين

الحد العام لنظرية ذات الحدين هو قيمة

$$H_{r+1} = ncr(socond\ term)^r(first\ term)^{n-r}$$

دائما r أقل من رتبة الحد بمقدار واحد

مثال

أوجد مفكوك $(x+3)^9$ ؟

الحل $H_{r+1} = ncr(socand\ term)^r(first\ term)^{n-r}$

نجد أننا نريد H_5 لذلك $r=4$ $n=9$

$$H_5 = 9c4(3)^4(x)^5 = 126\times 81x^5 = 10206x^5$$

مثال

أوجد الحد الرابع فى مفكوك $(2x-5y)^7$ ؟

$$H_{r+1} = ncr(socond\ term)^r(first\ term)^{n-r}$$

نجد أننا نريد H_4 لذلك $r=3$ $n=7$

$$H_4 = 7c3(-5y)^3(2x)^4 = 35\times -125y^3\times 16x^4$$
$$= -70000x^4y^3$$

الحد الأوسط

يتوقف الحد الأوسط على الأس اذا كان فردى أو زوجى:

الأس زوجى يكون رتبة الحد الأوسط = $\frac{n+2}{2}$

أما اذا كان لدينا الأس فردى يوجد حدان أوسطان رتبتهما هى

$\frac{n+1}{2}$ و $\frac{n+3}{2}$

الحد الأوسط

مثال: أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(x-2)^{10}$ ؟

الحل

رتبة الحد الوسط هى $\frac{10+2}{2} = 6$

نجد أننا نريد H_6 لذلك $r=5$ $n=10$

$$H_6 = 10C5(-2)^5(x)^5 = 252\times -32\times x^5$$
$$= -8064x^5$$

تمارين

1- أوجد الحد السادس فى مفكوك $(x+4)^{12}$ ؟

٢ - أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(5x+y)^8$ ؟

؟

٣ - أوجد مفكوك المقدار x^2 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2$

$(5x-2y)^4$

المحاضرة ١٠/ الدالة الاسية:

أي دالة من النوع $y=a^x$ تسمى دالة أسية .

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس ، x: الأس.

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية $(-\infty,\infty)$ ، ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية الموجبة $(0,\infty)$ أي. $f:R\to R^+$

أمثلة:

$$f(x)=2^x\ ,\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\ ,\ f(x)=e^x\ ,\ f(x)=e^{5x+2}$$

الدالة اللوغاريتمية:

إذا كان $a>0$ ، $a\neq 1$ فان الدالة الاسية $y=a^x$ لها معكوس يرمز لها بالرمز $x=\log_a y$ تسمى الدالة اللوغاريتمية ، حيث $\log_a y$ وتقرأ لوغاريتم y للأساس a .

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية الموجبة $(0,\infty)$ ، ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية $(-\infty,\infty)$. أي $f: R^+ \longrightarrow R$

أمثلة:

$$f(x)=\log_2 x,\ f(x)=\log_4(2x+4)$$

اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية:

يعتبر العددان e 10 (حيث e عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس للوغاريتمات. واللوغاريتمات للأساس e تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$.

أمثلة: $f(x)=\ln x^5,\ f(x)=\ln(x^2+2x)$

تسمى اللوغاريتمات للأساس 10 باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز $\log x$ بدلا عن $\log_{10} x$.

أمثلة:

$$f(x)=\log x,\ f(x)=\log(x^2-1),\ f(x)=\log(2x-3)$$

تابع: الدالة اللوغاريتمية:

قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من x ، y ، b عدداً حقيقياً موجباً ، b≠1 ، وكان n عدد حقيقياً فان:

1. $\log_b(xy)=\log_b x+\log_b y$
2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right)=\log_b x-\log_b y$
3. $\log_b(x^n)=n\log_b x$
4. $\log_b(b^x)=x$
5. $\log_b b=1$, $\log_b 1=0$

الدوال المثلثية:

هناك دالتان أساسيتان هما:

$(i)\quad y=\sin x$

$(ii)\quad y=\cos x$

وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:

الدوال النسبية:

إذا كان h(x) ، g(x) كثيري حدود فان $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ تسمى دالة نسبية بشرط g(x)≠0 ومجالها هو كافة الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام.

أمثلة:

1. $f(x)=\frac{x+7}{x+5}$
2. $f(x)=\frac{1}{x^2}$
3. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الصريحة:

هي الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة y=f(x) ، أي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في الطرف الآخر.

أمثلة:

1. $y=2x+3$
2. $y=x$
3. $y=x^2+2x-3$

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الضمنية:

هي التي يمكن كتابتها في الصورة f(x,y)=k، حيث k قيمة ثابتة.

أمثلة:

1. $x^2+y^2=25$
2. $x^2+y^2+xy+2x-4y+5=0$
3. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة زوجية إذا كانت f(-x)= f(x)

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \\ &= (-x)(-x) \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

اذاً الدالة زوجية

تابع : الدوال الزوجية والفردية:

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2+x$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$f(-x)=(-x)^2+(-x)$$
$$=(-x)(-x)+(-x)$$
$$=x^2-x$$
$$\neq f(x)$$

اذاً ليست زوجية.

تابع : الدوال الزوجية والفردية:

الدالة الفردية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة فردية إذا كانت f(-x)= -f(x)

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^3+x$ دالة فردية ؟

الحل:

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)$$
$$=(-x)(-x)(-x)+(-x)$$
$$=-x^3-x=-(x^3+x)$$
$$=-f(x)$$

اذاً الدالة فردية.

تطبيقات اقتصادية:

١- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز p .

تابع : تطبيقات اقتصادية:

مثال:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D=25-5P$

فأوجد

١. الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P=3$.

٢. سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D=18$.

تمارين:

١. هل الدالة $f(x)=3x^2-4x$ دالة زوجية؟

٢. هل الدالة $f(x)=3x^3-4x$ دالة فردية ؟

٣. هل الدالة $f(x)=2x^2+x$ دالة فردية ؟

٤. هل الدالة $f(x)=x^3-4$ دالة زوجية ؟

٥. هل الدالة $f(x)=x^3-x$ زوجية أم فردية أم غير ذلك؟

تمارين:

٩. إذا دالة العرض على سلعة معينة: $Q_S=4P-5$ فأوجد

أ) Q_S إذا كانت $P=5$.

ب) P إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_S=7$.

المحاضرة ١١/ الاشتقاق:

متوسط التغير:

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

اذاً $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث $x_2=x_1+\Delta x$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من 1 إلى 1.5

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1.5$$
$$f(1)=1^2+2=1+2=3$$
$$f(1.5)=(1.5)^2+2=2.25+2=4.25$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4.25-3}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تتغير x من 1 إلى 2

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=2$$

$$f(1)=3\times1+2=3+2=5$$

$$f(2)=3\times2+2=6+2=8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{8-5}{2-1}=\frac{3}{1}=3$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من 2 إلى 4

الحل:

$$x_1=2 \quad , \quad x_2=4$$

$$f(2)=2^2+2=4+2=6$$

$$f(4)=4^2+2=16+2=18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{18-6}{4-2}=\frac{12}{2}=6$$

تابع: الاشتقاق:

تعريف المشتقة الأولى:

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت) تسمى المشتقة الاولى للدالة $y=f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad ، \quad y' \quad ، \quad \frac{dy}{dx} \quad ، \quad f'(x)$$

إذا

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل(المبادئ الأولية للتفاضل)

تابع: الاشتقاق:

جبر الاشتقاق:

١. إذا كانت $y=x^n$ حيث n عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y=x^5$

II. $y=x^{-3}$

III. $y=x^{\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $\frac{dy}{dx}=5x^4$

II. $\frac{dy}{dx}=-3x^{-4}$

III. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

٢. إذا كانت $y=c$ حيث c كمية ثابتة فان :

$$\frac{dy}{dx}=0$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y=5$

II. $y=-10$

III. $y=\frac{3}{4}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $\frac{dy}{dx}=0$

II. $\frac{dy}{dx}=0$

III. $\frac{dy}{dx}=0$

تابع: الاشتقاق:

٣. إذا كانت $y=cx^n$ حيث C عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx}=n.c\,x^{n-1}$$

مثال:أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y=3x^4$

II. $y=-2x^7$

III. $y=16x^{\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $\frac{dy}{dx}=12x^3$

II. $\frac{dy}{dx}=-14x^6$

III. $\frac{dy}{dx}=8x^{-\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

٤. إذا كانت $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n-1)ax^{n-2}+na_nx^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y=3x^4+5x^3-2x^2+7x+20$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=12x^3+15x^2-4x+7$$

تابع: الاشتقاق:

٥. إذا كانت $y=[f(x)]^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=n[f(x)]^{n-1}.\ f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\left(2x^2+5\right)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=8\left(2x^2+5\right)^7.\ 4x=32x\left(2x^2+5\right)^7$$

تابع: الاشتقاق:

٦. إذا كانت $y=(f(x).g(x))$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=f(x).g'(x)+g(x).f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=(x-1)(3x-2)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=(x-1)(3)+(3x-2)(1)$$
$$=3x-3+3x-2$$
$$=6x-5$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y=x^4+5x^3-4x+1$

الحل:

$$y'=4x^3+15x^2-4$$
$$y''=12x^2+30x$$
$$y'''=24x+30$$

تمارين

١. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y=4x^2-3x^4$

ii. $y=(2x^5-1)(5x^3+7x)$

iii. $y=\sqrt{3}\left(x^5-x^{-3}\right)$

iv. $y=\frac{2x-1}{2x+1}$

تمارين

v. $y=x+1$

vi. $y=(x^2+2x+3)(x^2+1)$

vii. $y=\sqrt[5]{3x^2+4}$

viii. $y=\frac{1}{2x+3}$

ix. $y=(4x^2+5x-2)^8$

تمارين

٢. أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

i. $y=u^2-u \quad , \quad u=4x+3$

ii. $y=u+\frac{1}{u} \quad , \quad u=5-2x$

iii. $y=\frac{1}{u+1} \quad , \quad u=x^3-2x++5$

تمارين

٣. أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

ii. $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

iii. $y = \frac{1}{x}$

iv. $y = \frac{1}{3x+1}$

المحاضرة ١٢/ التكامل:

التكامل غير المحدد:

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وتسمى عملية ايجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل . ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x)\,dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير المستقل x .

تابع: التكامل:

قواعد التكامل:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \,, n \neq -1$ حيث c ثابت التكامل

2. $\int k\, dx = kx + c$ حيث k أي عدد حقيقي

3. $\int dx = x + c$

تابع: التكامل:

4. $\int [kf(x)]dx = k\int f(x)\,dx$ حيث k أي عدد حقيقي

5. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

6. $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

تابع: التكامل:

7. $\int e^x dx = e^x + c$

8. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \,, x \neq 0$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

تابع: التكامل:

أمثلة:

1. $\int 5dx = 5x + c$

2. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$

3. $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$

4. $\int (7x+3)dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + c$

تابع: التكامل:

6. $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 4x + c$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$

المحاضرة ١٣ / المتواليات

المتواليات

سيتم تدريس:

١- المتواليات العددية (الحسابية)

٢- المتواليات الهندسية

اولاً- المتواليات العددية

يطلق على متسلسلة الأعداد التي يكون الفرق فيها بين أى حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت المتوالية العددية.

فمثلاً $2,5,8,\ldots.$

يطلق عليها المتوالية العددية حيث أن

$$8-5=3$$
$$5-2=3$$

الفرق الثابت يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز d

الرموز المستخدمة:

a الحد الأول

d أساس المتوالية (الفرق الثابت)

L الحد الأخير

H_n الحد العام

S_n مجموع المتوالية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n=a+(n-1)d$$

مجموع المتوالية يمكن إيجاده بطريقتين:

١- بمعلوميه الحد الأخير

$$S_n=\frac{n}{2}(a+L)$$

٢- بمعلوميه أساس المتوالية

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

مثال

فى المتوالية التالية $3,7,11,\ldots$

أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الخامس ؟

٤- الحد التاسع ؟

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل

بما أن $7-3=4$ $11-7=4$

أذن الفرق مقدار ثابت

١- نوع المتوالية : متوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d=4$

٣- الحد الخامس

$$H_n=a+(n-1)d$$
$$H_5=a+4d$$
$$H_5=3+4(4)=19$$

٤- الحد التاسع من المتوالية

$$H_9=a+8d$$
$$H_9=3+4(8)=35$$

٥-مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$
$$S_{10}=\frac{10}{2}(2\times3+9\times4)=5(6+36)=210$$

مثال

متوالية حدودها $70,65,60,\ldots,25$

١- حدد نوع المتوالية

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد السادس ؟

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

٥- عدد حدود المتوالية ؟

الحل:

١- بما أن $60-65=-5$ $70-65=-5$

أذن الفرق مقدار ثابت أى أن المتوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d=-5$

٣- الحد السادس

$$H_6=a+5d$$
$$=70+5(-5)=45$$

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times 70 + 9 \times -5)$$

$$= 5(140 - 45) = 5 \times 95 = 475$$

المتوالية الهندسية

يطلق علي متسلسلة الأعداد التى يكون خارج قسمة أى حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت بالمتوالية الهندسية.

الرموز المستخدمة

a الحد الأول

r أساس المتوالية

S_n مجموع n من الحدود

S_∞ مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a\ r^{n-1}$$

مجموع عدد معين من الحدود

$$S_n = \frac{a\ (r^n - 1)}{r - 1}$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

مثال: فى المتوالية $4,8,16,\ldots$ أوجد الحد العاشر ومجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل:

نجد أن $\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$

أذن المتوالية هندسية وأساسها $r = 2$

الحد العاشر $H_{10} = a\ r^9$

$$= 4(2)^9 = 2048$$

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية هو

$$S_n = \frac{a\ (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{10} = \frac{4(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 4092$$

مثال متوالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها 3- أوجد الحد السادس ومجموع الثمان حدود الأولى منها؟

الحل:

$a = 5$ $\quad$ $r = -3$

الحد السادس

$$H_6 = ar^5$$

$$= 5(-3)^5 = -1215$$

مجموع الثمان حدود الأولى من المتوالية هو

$$S_n = \frac{a\ (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_8 = \frac{5((-3)^8 - 1)}{-3 - 1} = -8200$$

المحاضرة ١٤ / المحددات و المصفوفات

أولاً- المحددات

المحدد من الرتبة الثانية يكون على الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة المحدد

$$= (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد =

$$= (5\times 8)-(3\times 7)$$
$$= 40-21 = 19$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد =

$$= (-3\times 4)-(-1\times 6)$$
$$= -12+6 = -6$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد

$$= (-12\times -2)-(4\times -3)$$
$$= 24+12 = 36$$

استخدام المحددات فى حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

$$5x+2y=19$$
$$4x-y=10$$

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتى كلاً من x , y يتم حساب Δ , Δ_x, Δ_y كما يلى :

Δ ويحتوى على معاملات x , y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (5\times -1)-(2\times 4)$$
$$= -5-8 = -13$$

Δ_x ويتم أستبدال معاملات x بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = (19\times -1)-(2\times 10)$$
$$= -19-20 = -39$$

Δ_y ويتم أستبدال معاملات y بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = (5\times 10)-(19\times 4)$$
$$= 50-76 = -26$$

وبالتالى يمكن الحصول على قيمة x, y كما يلى :

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2 \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3$$

المحددات من الرتبة الثالثة

مثال أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول كما يلى: قيمة المحدد =

$$= 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 2(36-8)+5(54+3)+7(48+12)$$
$$= 2(28)+5(57)+7(60)$$

ثانياً- المصفوفات

يتم التركيز على العمليات الجبرية للمصفوفات كما يلى :

إذا كان

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad , h\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

أوجد

1- g' , h'

2 $g+h$

3- $2g+h$

4- gh

الحل: يمكن الحصول على $g^{\backprime}, h^{\backprime}$ بتبديل الصفوف لأعمدة والأعمدة إلى صفوف كما يلي:

$$g=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -4 & 6\end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}$$

$$g^{\backprime}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 7 & 6\end{bmatrix} \qquad h^{\backprime}=\begin{bmatrix}3 & 7\\ -1 & 12\end{bmatrix}$$

٢- $g+h$ يتم جمع كل رقم مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة الأخرى كما يلى

$$g+h=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 3 & 18\end{bmatrix}$$

الحل:

٣- $2g+h$ يتم ضرب كل عنصر فى $g\times 2$ ثم جمع الناتج مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة h كما يلى

$$2g+h=\begin{bmatrix}10 & 14\\ -8 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 13\\ -1 & 24\end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

٤- gh يتم ضرب عناصر الصفوف فى المصفوفة g x عناصر أعمدة المصفوفة h ثم جمع الناتج كما يلي

$$g=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -4 & 6\end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}$$

$$gh=\begin{bmatrix}5\times 3+7\times 7 & 5\times -1+7\times 12\\ -4\times 3+6\times 7 & -4\times -1+6\times 12\end{bmatrix}$$

$$gh=\begin{bmatrix}64 & 79\\ 30 & 76\end{bmatrix}$$