المحاضرة السادس عشر

الفصل الخامس: التقدير

نظرية (3): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباين غير معلوم فإن فترة 100(1-x)% **ثقة للوسط** μ هي:

$$(\overline{X} - t\left[1-\frac{x}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}} , \overline{X} + t\left[a-\frac{x}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}})$$

حيث S: الانحراف المعياري للعينة.

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي فأعطت $\overline{X} = 17.4$, $S = 2.1$. أوجدفترة 95% ثقة للوسط الحسابي μ؟

الحل: نقوم بعملية التحويل $1 - X = 95\%$

$X = 5\%$

$x/2 = 2.5\%$

$1 - X/2 = 97.5\% = 0.965$

$$(17.4 - 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}} , 17.4 + 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}})$$

(16.24 , 18.56) ← **فترة ثقة للوسط الحسابي للمجتمع** 95%

بإمكاننا استخدام الأسلوب السابق في بناء فترات الثقة للوسط الحسابي لأكثر من مجتمع وذلك بالاستعانة بالنظرية التالية:

نظرية (4): (فترات الثقة للفرق بين وسطين)

إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots X_n$ **عينة عشوائية من مجتمع طبيعي** $N(\mu_1 , س_1^2)$ **، وكانت** $Y_1 , Y_2 , \dots Y_n$ **عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي** $N(\mu_2 , س_2^2)$ مستقل عن الأول ، بحيث كانت $س_1^2$ ، $س_2^2$ معلومتين فإن هذه الثقة 100(1 – X)% للفرق بين الوسطين (M_1 , M_2) هي:

$$[(\overline{X} - \overline{Y})\, Z_{1-X/2} \sqrt{\frac{س_1^2}{n_1} + \frac{س_1^2}{n_2}} , (\overline{X} - \overline{Y})\, Z_{1-X/2} \sqrt{\frac{س_1^2}{n_1} + \frac{س_1^2}{n_2}}$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي $N(M_1 , 25)$ ثم أخذت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع طبيعي $N(M_2 , 40)$ مستقل عن الأول، فإذا أعطيت العينة الأولى وسطاً حسابياً = 32 ، بينما أعطيت العينة الثانية وسطاً حسابياً = 47 أوجد:

أ-فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين $(M_1 – M_2)$؟

ب-فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين $(M_2 – M_1)$؟

الحل: المعطيات:

المجتمع الثاني	المجتمع الأول
$س_2^2 = 40$ $n_2 = 10$ $\overline{Y} = 74$	$س_1^2 = 25$ $n_1 = 9$ $\overline{X} = 32$

المطلوب:- أ- فترة 95% **ثقة للفرق** $M_1 – M_2$؟

$1 – X = 95\% \rightarrow 1 – X/2 = 97\%$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$[(32 – 47) – Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} , (32 – 47) + Z_{0.975} \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}]$$

$$(-15 – 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{4} + 4} , -15 – 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{4} + 4})$$

(-20.1 , -9.9)

$\overline{X} - \overline{Y} = 32 – 47$

$= -15$

ب-فترة ثقة 09% للفرق بين $M_1 – M_2$؟

$1 – X = 90\% \rightarrow 1 – X/2 = 95\%$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$[(74 – 32) – Z_{0.95} \times \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} , (47 – 32) + Z_{0.95} \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}]$$

$$(15 – 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{4} + 4} , 15 + 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{4} + 4})$$

(10.73 , 19.27)

$\overline{X} - \overline{Y} = 15$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$(0.15 – Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}} , 0.15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}})$$

(0.08 , 0.22)

$\overline{P} = 0.15$

نظرية (6): **إذا** كانت $X_1 , X_2 , \ldots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع برنولي $b(1 . P_2)$ وكانت $Y_1 , Y_2 , \ldots Y_n$ عينة عشوائية أخرى **مستقلة** عن الأولى **من** مجتمع برنولي $b(1 . P_2)$ ، فإن فترة $100(1 - X)\%$ ثقة للفرق بين النسبتين $(P_1 - P_2)$ هي:

$$[(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - Z_{1-X/2}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}} , \overline{P}_1 - \overline{P}_2) - Z_{1-X/2}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}]$$

2- تقدير النسبة:

إن تقدير النسبة بفترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع P **ثم** إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لإيجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معينة تحصر نسبة النجاح P بداخلها والنظرية التالية توضح ذلك.

نظرية (5): إذا كان $\overline{P} = X/n$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n **وكان** n كبيراً ، فإن فترة $100(1 - X)\%$ ثقة التقريبية لنسبة النجاح P هي:

$$(\overline{P} - Z_{1-X/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} , (\overline{P} - Z_{1-X/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}})$$

مثال: لإيجاد فترة 95% ثقة لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر، أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد أن من لديهم ضعف في البصر كان 15 طالب. أوجد فترة الثقة المطلوبة؟

الحل: $1 - X = 95\% \rightarrow 1 - X/2 = 975\%$

وأيضاً يجب إيجاد $\overline{P}$: (التقطير النقطي لنسبة النجاح)

$$\overline{P} = \frac{15}{100} = 0.15$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها **100 طالبة من المدرسة (أ) ، ووجد أن 27** طالبة لديهم تسوس في الأسنان ، **ثم أخذت عينة عشوائية أخرى من المدرسة (ب) ووجد أن 21** طالباً لديهم تسوس في الأسنان. **أوجد فترة 95% ثقة للفرق بين (P_2 , P_1)؟**

الحل: (P_1 , P_2) $1- X = 95\% \rightarrow 1 - X/2 = 97.5\%$

$X = 95\%$ – $\overline{P}_1 = \frac{27}{100} = 0.27$	$/2 = 97.5\%$ $\overline{P}_2 = \frac{12}{80} = 0.15$

حسب النظرية السابقة نجد أن:

$$[(0.27 - 0.15) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100} + \frac{0.15(085)}{80}} , (0.27 - 0.15) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100} + \frac{0.15(085)}{80}}]$$

$(0.003 , 0.237)$

$$\overline{P}_1 - \overline{P}_2 = 0.27 - 0.15 = 0.12$$