



مبادئ الطرق الاحصائية

الدكتور حلال الصياد الدكتور عبد الحميد محمد ربيع

الطبعة الأولى

١٤٠٤ هـ - ١٩٨٣ م

جدة - المملكة العربية السعودية

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

الناشر

تهامة

جدة - المملكة العربية السعودية
ص.ب. ٥٤٥٥ - هاتف ٦٤٤٤٤٤٤

جميع الحقوق لهذه الطبعة محفوظة للناشر

مبادئ الطرق الاحصائية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

«صدق الله العظيم»

(سورة الجن)

مقدمة

هذا هو الكتاب الثاني لطلاب الدراسات الاقتصادية والادارية يتناول مبادئ طرق تحليل البيانات أو ما يسمى بالطرق الإحصائية والاستدلال الإحصائي. ويحتوي على مبادئ نظرية الاحتمالات معروضة بطريقة بسيطة لا تحتاج إلى رياضيات متقدمة. كما يحتوي الكتاب على التوزيعات الاحتمالية ومبادئ العينات وتحليل بيانات العينات الكبيرة والصغيرة مستخدمين فترات الثقة واختبارات الفروض بعرض بسيط.

وقد عملنا على عدم التعرض للمفاهيم الدقيقة للنظريات الإحصائية والتي تحتاج إلى قدر كبير من التحليل الرياضي. كما حرصنا على عرض الموضوعات بطريقة مبسطة تعتمد على إيضاح الطريقة دون التعرض للنظرية مع تقديم عدد كبير من الأمثلة العملية مما يساعد على سهولة فهم واستخدام هذه الموضوعات في الحياة العملية.

ونود أن نقدم الشكر الجزيل إلى عدد كبير من الإخوة الزملاء الذين ساهموا بتزويد المكتبة العربية بعدد غير قليل من الكتب الإحصائية التي استفدنا منها كثيرا.

والله وليّ التوفيق،،

المؤلفان

الباب الأول

مبادئ الاحتمالات

مبادئ الاحتمالات

(١-١) - مقدمة :

تلعب الاحتمالات دورا خاصا في الحياة اليومية وفي كثير من العلوم لأنها تستخدم في قياس عدم التأكد، فكثيرا ما نقابل بعملية اتخاذ قرارات بناء على معلومات ناقصة ونعتمد على الاحتمالات لتساعدنا على الاختيار. فمثلا قد نلغي رحلة خارجية ربنا لها من مدة وذلك لأن احتمال أن يكون الجوردينا احتمال كبير، وكذلك كثيرا ما يهمل الطالب في نهاية العام جزءا من المقرر لأن احتمال أن يأتي في الامتحان احتمال صغير.

وكثيرا ما نتحدث عن احتمال ارتفاع درجة الحرارة في اليوم التالي واحتمال فوز فريق كرة قدم معين على فريق آخر. وأحيانا نجد أننا نعبر عن هذه الاحتمالات بتقدير عددي. كأن نقول أن احتمال سقوط أمطار غدا ٢٠٪ واحتمال وصول طائرة الخطوط البريطانية القادمة من لندن ٩٥٪ وهكذا.

وهذه التقديرات العددية للاحتمالات لا تستند إلى أساس رياضي لكن قد تعتمد على خبرات ومعلومات سابقة عن الطقس وعن تتبع لفترات طويلة وصول طائرة الخطوط البريطانية القادمة من لندن.

وقد يتبادر إلى الذهن الآن أن نبدأ بتعريف الاحتمال، ما هو، وما هي الموضوعات التي تتعلق بنظرية الاحتمالات. ولكن في الواقع ليس من السهل أن نبدأ بوضع تعريف محدد للفظ «احتمال» ولكن إذا رغبتنا في ذلك فيمكننا تحديد مجال نظرية الاحتمالات بالتعريف التالي :

«نظرية الاحتمالات هي فرع من فروع الرياضة التطبيقية يهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر والأشياء». لهذا لا بد لنا من إيضاح كلمة «صدفة - Chance» - هذه الكلمة التي تعودنا على سماعها في حياتنا اليومية ويمكن توضيح مفهومها على النحو التالي :

من المعلوم لدينا أننا إذا ألقينا قطعة من المعدن في الهواء فإنها سوف تسقط على الأرض وهذا شيء «مؤكد» لأنها حقيقة معروفة - ولكن إذا ألقينا قطعة من العملة على طاولة مسطحة فإن القطعة سوف تسقط على سطح الطاولة وسيكون أحد وجهيها إلى أعلى (مع استبعاد أن تستقر قطعة العملة على حرفها) - ولكننا لا نعلم أي الوجهين سيظهر إلى أعلى لأن هذا يعتمد على ما نسميه «بالصدفة» .

كذلك نعرف أن الماء يتحول إلى بخار إذا سخن على النار إلى درجة حرارة ١٠٠ درجة مئوية في ظروف الضغط الجوي العادي — وهذا شيء مؤكد — ولكن عند إلقاء زهرة الطاولة على لوحة مسطحة فإن ما نعرفه هو أن أحد أوجهها الستة سيظهر إلى أعلى ولكن أي وجه من الأوجه الستة سيظهر هذا ما لا نعرفه لأن ذلك يعتمد على ما نسميه «بالصدفة» وهكذا..

مما سبق يمكننا استنباط الفرق بين لفظ «مؤكد» ولفظ «صدفة» — فالشيء المؤكد يعتمد على عدة ظروف معينة معروفة لدينا تماما إذا تحققت هذه الظروف حدث هذا الشيء، فكما سبق أن قلنا إنه في ظروف الضغط الجوي العادي إذا تم تسخين الماء إلى ١٠٠ درجة مئوية فإنه يتحول إلى بخار — وفي هذه الحالة الظروف معروفة لنا تماما لهذا نقول إن تحول الماء إلى بخار إذا تحققت هذه الظروف يعتبر شيئا مؤكدا. ولكن في حالة قطعة العملة أو زهرة الطاولة فإن الوجه العلوي الذي يظهر بعد الإلقاء يعتمد على ظروف كثيرة بعضها معروف لنا وبعضه نجهله تماما — فظهور وجه معين يعتمد على طريقة الإلقاء وقوته ونقطة الاصطدام الأولى بالطاولة وغير ذلك من الحقائق التي نجهلها تماما والتي تتسبب في ظهور ذلك الوجه دون الآخر. من هذه الأمثلة يمكن أن نفرق بين لفظي «مؤكد» و«صدفة» فالأول يدل على شيء معلوم لدينا كل الظروف التي تؤدي إلى حدوثه أما الثاني فإما يدل على شيء غير معلوم لدينا تماما كل ما يؤدي إلى حدوثه من ظروف.

(٢-١) — مفهوم الاحتمال :

إن لفظ صدفة الذي عرفناه في البند السابق وثيق الصلة بلفظ احتمال «Probability» وكلمة «احتمال» هي كلمة شائعة في لغتنا اليومية ودائما نستعملها عندما نتكلم عن شيء يتحكم في حدوثه عوامل الصدفة. فمثلا عندما نقول «يحتمل أن تمطر السماء اليوم» نقول هذه العبارة إذا كانت السماء ملبدة بالغيوم وكان الجو مائلا إلى البرودة لأن هذه «بعض الظروف» التي تؤدي إلى سقوط المطر وليست بالطبع هي كل الظروف وإلا لكان من المؤكد سقوط المطر ولكن يوجد بها بالإضافة إلى هذه الظروف عدة ظروف أخرى لا نعرفها تماما إذا توفرت كلها سقط المطر أما إذا لم تتوافر كلها فلن تسقط أمطار.

كذلك يمكن النظر إلى الاحتمالات على أنها أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة نتائج التجارب أو المحاولات العشوائية. وتسمى التجربة أو المحاولة عشوائية إذا كانت نتائجها غير مؤكدة أي لا نستطيع التنبؤ بها.

فمثلا، إذا ألقيت قطعة معدنية من النقود فإننا لا نستطيع أن نتنبأ إذا كان السطح العلوي لها سيظهر صورة أو كتابة، إذا فهذه محاولة أو تجربة عشوائية. كذلك عند سحب ورقة عشوائية من مجموعة أوراق اللعب المحكمة الخلط (الكوتشينة) فإننا لا نعلم إذا كانت الورقة المسحوبة ستظهر صورة أو عددا، إذا فهي محاولة عشوائية. كذلك إذا كانت هناك حالة ولادة فلا نستطيع التنبؤ عما إذا كان المولود ذكرا أو أنثى. إذا فهذه تجربة عشوائية.

وعلى العموم فإن نتائج التجارب تنقسم إلى ثلاثة أنواع من وجهة نظر الاحتمالات هي كما يلي :

(أ) نتائج أو حوادث مؤكدة :

وهي نتائج لا بد من وقوعها أو حدوثها.

مثال (١) : إذا ألقيت تفاعحة في الهواء فإننا نعلم أنها لا بد وأن تسقط على الأرض . هنا التجربة هي إلقاء التفاعحة في الهواء ، والنتيجة هي سقوط التفاعحة على الأرض .

مثال (٢) : إذا كان لدينا صندوق به ٨ كرات بيضاء اللون ، سحبت منه كرة واحدة فلا بد أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء .

هنا التجربة هي سحب كرة من الصندوق ، والنتيجة أن الكرة بيضاء : إذا فهذه نتيجة مؤكدة .

وإذا كانت الحادثة مؤكدة الوقوع فإنه يقال إن احتمال وقوعها يساوي واحد .

أي أن احتمال سقوط التفاعحة (في المثال ١) = ١

وكذلك احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء في (المثال ٢) = ١

(ب) نتائج أو حوادث مستحيلة :

وهي تلك النتائج أو الحوادث المستحيل وقوعها .

مثال (٣) : هل يمكن سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء ؟

التجربة هنا هي سحب كرة من الصندوق ، والنتيجة المطلوبة أن تكون الكرة حمراء ، إذاً فهذه حادثة مستحيلة .

مثال (٤) : أن يعيش شخص ما إلى الأبد . هذه حادثة مستحيلة . وإذا كانت الحادثة

مستحيلة الوقوع فإنه يقال أن احتمال وقوعها يساوي صفر .

أي أن احتمال سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء (في المثال ٣) =

صفر .

وكذلك احتمال أن يعيش شخص ما إلى الأبد (في المثال ٤) = صفر .

(ج) حوادث أو نتائج غير مؤكدة (محملة أو ممكنة) :

وهي نتائج التجارب العشوائية التي ذكرناها سابقاً والتي لا نستطيع أن نتنبأ بوقوعها ، ولكننا

نستطيع باستخدام تعريف الاحتمالات أن نحسب احتمال وقوعها .

ولفظ احتمال يعبر عن مدى توقعنا لحدوث شيء معين وهذا التوقع أو التنبؤ أو التخمين قد يكون كبيرا وقد يكون صغيرا وتبعاً لذلك قد يكون الاحتمال كبيرا وقد يكون صغيرا، وهذا يعنى لدينا الرغبة في إجراء المقارنة بين احتمالي حدوث حادثين لمعرفة أيهما أكبر احتمالا وذلك كما يتضح مما يلي :

لو كان لدينا صندوقان بهما كرات متشابهة في الحجم والوزن وكل شيء ما عدا اللون، وكان الصندوق الأول به ٩٠ كرة بيضاء و١٠ كرات سوداء والصندوق الثاني به ١٠ كرات بيضاء و٩٠ كرة سوداء ونريد الإجابة عن السؤال التالي: عند سحب كرة واحدة عشوائيا من كل صندوق أيهما أكثر احتمالا، الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الأول أم الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثاني؟

بالتفكير العقلي البسيط يمكننا الحكم بأن احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الأول أكبر من احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثاني وذلك لكبر نسبة الكرات البيضاء في الصندوق الأول عنها في الثاني .

هذا يوضح أن كل ما نعرفه حتى الآن هو مجرد مقارنة الاحتمالات ولكن لم نحدد قيمة الاحتمال بطريقة عددية، هذا مما دفع العلماء الأوائل في هذا المجال إلى وضع تعريف يتمكن به من قياس الاحتمال بتحديد قيمته العددية .

(١-٣) - فكرة سريعة عن نشأة نظرية الاحتمالات :

لقد ظهرت نظرية الاحتمالات في القرن السابع عشر ونالت اهتمام الكثير من علماء الرياضة أمثال «بسكال - Pascal» (١٦٢٣ - ١٦٦٢) و«فرمات - Fermat» (١٦٠١ - ١٦٦٥) حيث دخل هذان العالمان الكبيران في عملية مناظرة عظيمة أثرت هذا الفرع من العلوم ودخلت به في مجال الدراسة العلمية المنظمة وذلك عندما تقدم أحد نبلاء فرنسا و يدعى «تشفيليه - de Méré» و«Chevalier» وكان يعمل في مجال المضاربة والمقامرة وطلب من بسكال أن يحسب له احتمال بعض الحالات التي تواجهه في أعماله فقام بسكال بحساب الاحتمالات المطلوبة ثم تعدى ذلك إلى عدة حالات أخرى ثم اهتم بهذه الحالات وغيرها كنوع من الدراسة وقام بوضع أسس وقواعد تحم هذه الدراسة .

وقد أكمل «برنولي - Bernoulli» (١٦٤٥ - ١٧٠٥) المسيرة وبعده «لابلاس - Laplace» (١٧٤٩ - ١٨٢٧) - ونتج عن أعمال «برنولي» وضع تعريف للاحتمال وإن كانت صياغة هذا التعريف قد أتت على يد «لابلاس» - وقبل تقديم هذا التعريف سنعرض بعض القواعد والأسس والتعريفات التي تعتبر نتاجا لما قام به هؤلاء الرواد الأوائل من دراسات علمية منتظمة في مجال الاحتمالات .

(أ) الحالات المتماثلة (Equally Likely Cases) :

هى تلك الحالات التي يكون لها فرص متكافئة من حيث الحدوث — أي لها نفس الفرصة .
فمثلا لو كان لدينا صندوق به ١٠٠ كرة متشابهة في كل شيء عدا اللون منها ٥٠ كرة بيضاء ،
٥٠ كرة سوداء — ورغبنا في سحب كرة من هذا الصندوق عشوائيا سنجد أن فرصة ظهور اللون
الأبيض تعادل تماما فرصة ظهور اللون الأسود وذلك بسبب تساوي أعداد الكرات من كل من
اللونين و يعتبر اللونان في هذه الحالة حاليتين متماثلتين . كذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية متزنة
ومصنوعة من معدن متجانس وكانت عملية الإلقاء غير متحيزة فإن فرصة ظهور الصورة تعادل تماما
فرصة ظهور الكتابة و بهذا يمكن القول أن هاتين الحالتين (الصورة والكتابة) متماثلتين .

(ب) الحوادث الشاملة (Exhaustive Events) :

يقال أن الحوادث أ ، ب ، ، أن تشكل مجموعة من الحوادث الشاملة في تجربة معينة
إذا كان لا بد أن يتحقق واحد منها على الأقل عند إجراء التجربة ولا توجد نتيجة أخرى للتجربة
تختلف عن هذه الحوادث .

مثال ذلك عند إلقاء زهرة الطاولة فإن الأوجه الستة للزهرة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦) تعتبر
أحداثا شاملة — كذلك عند إلقاء قطعة العملة يعتبر الوجهات (صورة ، كتابة) حدثين شاملين .

(ج) الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events) :

يقال إن الحوادث أ ، ب ، ، أن حوادث متنافية إذا استحال جدوى أي اثنين (أو
أكثر) منها في آن واحد .

فمثلا في تجربة إلقاء زهرة الطاولة تعتبر الأوجه الستة حوادث متنافية لعدم إمكان حدوث أي
اثنين منها في آن واحد وكذلك في تجربة إلقاء قطعة العملة يعتبر الوجهان (صورة ، كتابة) حدثين
متنافيين .

ملحوظة (١) :

من التعريف السابق في (أ) للحوادث المؤكدة وكذلك الحوادث المستحيلة في (ب) يبدو
واضحا لنا معنى كلمة «حدث» وكذلك كلمة «تجربة» — مما يجعلنا لا نحتاج لوضع تعريف
مستقل لكل منهما .

الحالات الممكنة (Possible Cases) :

هي مجموعة النتائج (أو الحالات) التي يمكن أن تنتج عند إجراء التجربة .

فلو كانت التجربة هي إلقاء زهرة الطاولة مرة واحدة فإن الأوجه الستة للزهرة تعتبر هي الحالات الممكنة لهذه التجربة . كذلك إذا كانت التجربة هي سحب كرة واحدة من كيس يحتوي على عشرة كرات متماثلة فإن الحالات الممكنة تعتبر عشرة حالات متماثلة . وهكذا .

(هـ) الحالات المواتية (Favorable Cases) :

هي مجموعة النتائج التي تؤدي إلى تحقيق الحدث — وهي جزء من الحالات الممكنة للتجربة .

(٤-١) — تعريف الاحتمالات :

يوجد للاحتمالات عدة تعاريف مختلفة نذكر منها تعريفين اثنين فقط واللذين لا يحتاجان إلى مفهوم رياضي متقدم هما :

أولاً : التعريف الكلاسيكي للاحتمالات .

ثانياً : التعريف التجريبي للاحتمالات .

أولاً : التعريف الكلاسيكي للاحتمالات :

إذا كنا بصدد إجراء تجربة ما مجموعة النتائج التي يمكن أن تنتج عنها عددها n من الحالات الشاملة المتنافية المتماثلة وكان m من هذه الحالات موات للحدث A فإن احتمال وقوع الحدث A يعرف بأنه النسبة $\frac{m}{n}$.

فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحدث A بالرمز $P(A)$ فيمكن كتابة هذا الاحتمال في الصورة التالية :

ح (أ) = عدد الحالات المواتية للحدث A / عدد الحالات الممكنة للتجربة .

فمثلاً عند سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب المحكمة الخلط (الكوتشينة) نجد أن لدينا ٥٢ حالة متنافية ومتماثلة هي الحالات الممكنة للتجربة ، فإذا كان الحدث A هو الحصول على صورة يكون أمامنا ١٢ حالة مواتية لوقوع الحدث A وهي عدد الصور في الكوتشينة وعلى هذا يكون احتمال وقوع الحدث A مساوياً $\frac{12}{52}$ ، وتكتب في صورة رمزية كما يلي :

$$P(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

كذلك إذا كانت التجربة هي إلقاء زهرة نرد متزنة تكون الحالات الممكنة لهذه التجربة ٦ حالات شاملة ومتنافية ومتماثلة . فإذا كان الحدث A هو الحصول على عدد زوجي من النقط فإن

الحالات المواتية لهذا الحدث هي ٣ حالات (٢-٤-٦) وهي الأوجه التي تحمل عددا زوجيا من النقط وبهذا يكون احتمال وقوع هذا الحدث مساويا $\frac{2}{6}$ - وتكتب: ح (أ) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ وهكذا.

مثال (٥) : عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة - ما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي لها أكثر من ٤ ؟

التجربة : هي إلقاء زهرة النرد .

∴ الحالات الممكنة هي : ن = ٦ حالات متماثلة .

الحدث أ هو : أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي للزهرة أكبر من ٤ .

∴ الحالات المواتية هي : م = ٢ (وهي الحالتين ٥ ، ٦) .

∴ ح (أ) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

مثال (٦) : عند إلقاء قطعتي عملة مرة واحدة (أو إلقاء قطعة واحدة مرتين متتاليتين) ما هو احتمال الحصول على صورتين ؟

الحل

التجربة هي : إلقاء قطعتي عملة .

الحالات الممكنة هي : - ن = ٢ × ٢ = ٤ حالات

وذلك لأن القطعة الأولى لها وجهان كل وجه منهما يمكن أن يناظره وجهان للقطعة الثانية . وهذه الحالات الأربع يمكن حصرها لورمزنا للصورة بالرمز ص والكتابة بالرمز ك كما يلي :

ص ص - ص ك - ك ص - ك ك .

الحدث أ هو : الحصول على صورتين .

∴ الحالات المواتية هي : حالة واحدة وهي (ص ص) .

∴ ح (أ) $= \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{1}{4}$.

مثال (٧) : عند إلقاء زهرتين متزنتين من زهرات النرد مرة واحدة (أو إلقاء زهرة واحدة مرتين) ما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطحين العلويين :

مساويا : ؟٩
أكثر؟ : ؟٩

الحل

التجربة : إلقاء زهرتي نرد متزنتين .

ن = ٣٦ حالة متماثلة (٦ حالات للزهرة الأولى وكل حالة منها يقابلها ٦ حالات للزهرة الثانية

وبذا يكون عدد الحالات الممكنة مساويا $6 \times 6 = 36$ حالة) .

ويمكن حصر الحالات الممكنة في الشكل التالي :

نرمز للزهرة الأولى بالرمز ٥ والثانية بالرمز ٦

٦	٥	٤	٣	٢	١	ص س
(٦٠١)	(٥٠١)	(٤٠١)	(٣٠١)	(٢٠١)	(١٠١)	١
(٦٠٢)	(٥٠٢)	(٤٠٢)	(٣٠٢)	(٢٠٢)	(١٠٢)	٢
(٦٠٣)	(٥٠٣)	(٤٠٣)	(٣٠٣)	(٢٠٣)	(١٠٣)	٣
(٦٠٤)	(٥٠٤)	(٤٠٤)	(٣٠٤)	(٢٠٤)	(١٠٤)	٤
(٦٠٥)	(٥٠٥)	(٤٠٥)	(٣٠٥)	(٢٠٥)	(١٠٥)	٥
(٦٠٦)	(٥٠٦)	(٤٠٦)	(٣٠٦)	(٢٠٦)	(١٠٦)	٦

الحالات السابقة تمثل ٣٦ نتيجة — فمثلا النتيجة (٢، ٥) معناها أن الزهرة الأولى نتيجتها الوجه الذي عليه ٥ فقط والزهرة الثانية الوجه الذي عليه نقطتين .

الحدث أ: هو أن يكون مجموع النقط على السطحين العلويين ٩ .

∴ الحالات المواتية م_١ : هي تلك الحالات التي تدور بين الخططين المائلين في الجدول السابق وعددها ٤ حالات .

$$\text{أي أن } M_1 = 4$$

$$\therefore \text{ح (أ)} = \frac{M_1}{N} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

الحدث ب: هو أن يكون مجموع النقط على السطحين العلويين ٩ فأكثر .

الحالات المواتية م_٢ : هي تلك الحالات الموجودة بين الخططين المائلين في الجدول السابق بالإضافة إلى كل الحالات الموجودة أسفل هذين الخططين لأن كلها تحقق الحدث المطلوب م_٢ أي أن مجموع كل منها إما ٩ أو أكثر من ٩ وعددها ١٠ حالات متماثلة — أي أن :

$$M_2 = 10$$

$$\therefore \text{ح (ب)} = \frac{M_2}{N} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

(١-٤-١) المبادئ الأولية للاحتمالات

مما سبق نستنتج ما يلي :

$$(1) \text{ صفر} \geq \text{ح (أ)} \geq 1$$

$$(11) \text{ ح (أ)} = \text{صفر إذا كانت أ حادثة مستحيلة}$$

$$(111) \text{ ح (أ)} = 1 \text{ إذا كانت أ حادثة مؤكدة.}$$

$$(1V) \text{ إذا كان احتمال وقوع الحادثة أ هوح وكان احتمال عدم وقوعها هول فإن}$$

$$1 = \text{ح} + \text{ل}$$

أي أن احتمال وقوع أي حادثة + احتمال عدم وقوعها = 1 وذلك لأنه من المؤكد أن تقع الحادثة أو لا تقع.

(1-4-2) - بعض قوانين الاختيار الهامة :

لإمكان حل مسائل الاحتمالات فإننا سنعتمد على بعض قوانين موضوع الاختيار ونذكر منها على الأخص :

(أ) عدد الطرق التي يمكن بها اختيار س من الأشياء من بين ن من هذه الأشياء

$$= \text{ن ق س} = \frac{! \text{ ن}}{! \text{ س} ! (\text{ن} - \text{س})}$$

حيث أن :

$$! \text{ ن} = ! \text{ ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) \dots \times (2 - \text{ن})$$

$$\text{فمثلا : } ! 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

مثال (8) : إذا كان لدينا 4 رجال وأريد إرسال بعثة منهم مكونة من رجلين . فإنه يمكن اختيار أعضاء هذه البعثة بعدد من الطرق مساوياً لـ 6 طريقة .

$$\text{حيث } ! 4 \text{ ق } 2 = \frac{! 4}{! 2 ! (4 - 2)} = \frac{! 4}{! 2 \times ! 2} =$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 1 \times 2} = 6 \text{ طرق}$$

مثال (9) : صندوق به 8 كرات متماثلة . سحبت منه 3 كرات ، فما هي عدد الطرق التي يمكن بها إجراء هذه العملية .

الحل

$$\text{عدد الطرق} = ! 8 \text{ ق } 3 = \frac{! 8}{! 3 ! 5} = \frac{! 8}{! 3 \times ! 5} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 56 \text{ طريقة}$$

(ب) إذا أمكن إجراء عملية ما بطرق مختلفة عددها ل وأمكن إجراء عملية أخرى بطرق مختلفة عددها م، فإن عدد الطرق التي يمكن بها إجراء العمليتين معا هو ل م.
 مثال (١٠): ما هو عدد الطرق التي يمكن بها تكوين بعثة من ٣ رجال، ٢ نساء من بين ٦ رجال، ٥ نساء.

الحل

$$\bullet \text{ عدد طرق اختيار الرجال} = {}^6C_3 = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد طرق اختيار النساء} = {}^5C_2 = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10 \text{ طرق}$$

عدد طرق تكوين البعثة = $20 \times 10 = 200$ طريقة.

(١-٤-٣) - أمثلة على الاحتمالات :

مثال (١١): صندوق به ٥ كرات بيضاء، ٤ حمراء. سحبت منه كرة واحدة. فما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

(II) حمراء؟

(I) بيضاء؟

الحل

— عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة من الصندوق

$$\bullet \text{ عدد الطرق} = {}^9C_1 = \frac{9!}{1! \times 8!} = 9 \text{ طرق}$$

— عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء من الصندوق

$$\text{عدد الطرق} = {}^5C_1 = \frac{5!}{1! \times 4!} = 5 \text{ طرق}$$

— عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة حمراء من الصندوق

$$\text{عدد الطرق} = {}^4C_1 = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4 \text{ طرق}$$

$$\frac{5}{9} = \text{احتمال سحب كرة بيضاء} \quad \therefore (I)$$

$$\frac{4}{9} = \text{احتمال سحب كرة حمراء} \quad (II)$$

ونلاحظ في هذا المثال أن مجموع الاحتمالات في (I)، (II) يساوي الواحد الصحيح لأن الكرة المسحوبة إما أن تكون بيضاء أو حمراء وهذه حادثة مؤكدة.

مثال (١٢): صندوق به ٥ كرات بيضاء، ٤ حمراء، سحبته منه كرتان فما هو احتمال أن تكون الكرتان:

(I) بيضاء ؟ (II) واحدة بيضاء والأخرى حمراء ؟

الحل

(I) عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرتان من الصندوق

$$= {}^9C_2 = \frac{9!}{2! \times 7!} = 36 \text{ طريقة} \cdot$$

، عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرتين بيضاء من الصندوق

$$= {}^5C_2 = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10 \text{ طرق} \cdot$$

$$\therefore \frac{10}{36} = \text{احتمال أن تكون الكرتان بيضاء}$$

(II) عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء من الصندوق

$$= {}^5C_1 = 5 \text{ طرق}$$

، عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة حمراء من الصندوق

$$= {}^4C_1 = 4 \text{ طرق}$$

\therefore عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء وكرة حمراء من الصندوق

$$= 5 \times 4 = 20 \text{ طريقة} \cdot$$

$$\therefore \frac{20}{36} = \text{احتمال أن تكون الكرتان واحدة بيضاء والأخرى حمراء}$$

مثال (١٣): ألقيت زهرة نرد مرة واحدة. فما هو احتمال أن يكون السطح العلوي لها: (I) أقل من ٣ ؟ (II) ٤ فأكثر؟

(I) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي = ٦
 ، عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح رقم أقل من ٣
 = ٢ (وهما ظهور الوجه ١ أو الوجه ٢)

$$\therefore \text{احتمال (الحصول على عدد أقل من ٣)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(II) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح العلوي ٤ فأكثر = ٣ (وهي الوجه ٤ أو الوجه ٥ أو الوجه ٦)

$$\therefore \text{احتمال الحصول على ٤ فأكثر} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال (١٤) : ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة، فما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي لهما ٥ .

الحل

عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرة الأولى = ٦ طرق
 ، عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرة الثانية = ٦ طرق
 عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرتين معا = $6 \times 6 = 36$ طريقة
 عدد الطرق التي يمكن أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي ٥ هو = ٤ طرق
 وهي (١، ٤) أو (٢، ٣) أو (٣، ٢) أو (٤، ١)

$$\therefore \text{احتمال (أن يكون المجموع ٥)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

ثانيا : التعريف التجريبي للاحتمالات :

يتضح من التعريف الكلاسيكي للاحتمال أنه يعتمد على عدة فروض أساسية—منها افتراض أن الحالات الممكنة كلها حالات متماثلة— وهذا الفرض يترتب عليه أن الحالات الممكنة كلها تكون متساوية الاحتمالات، فلو كان عددها ن حالة مثلا (وهي طبعاً متنافية) سيكون احتمال كل منها $\frac{1}{n}$ ، ولكن هذا الفرض ليس دائما متوفرا في كل ما نصادفه من تجارب وظواهر طبيعية. فمثلا إذا حاولنا معرفة احتمال أن يكون المولود ذكرا في ولادة معينة وذلك باستخدام التعريف الكلاسيكي للاحتمال— سنجد أن الحالات الممكنة حالتان فقط (ذكر وأنثى) وهما ليسا متماثلتين لأنه من المعروف إحصائيا في كل زمان ومكان أن نسبة المواليد الذكور أكبر من نسبة المواليد الإناث (٥١ : ٤٩ تقريبا) وبالتالي تكون فرصة أن يكون المولود ذكرا أكبر من فرصة أن يكون أنثى وبالتالي لا يمكن حساب مثل هذا الاحتمال باستخدام التعريف الكلاسيكي لأنه يوصلنا إلى نتيجة مضللة لأنه يعتبر الحالات الممكنة ن = ٢ والحالات المواتية م = ١ حالة واحدة

(ذكر) ويكون الاحتمال $\frac{1}{4}$ وهذا خطأ واضح . كذلك لو تصورنا وجود قطعة عملة غير متزنة (أحد وجهيها أثقل من الوجه الآخر) وبالتالي فرصة ظهور أحد الوجهين أكبر من فرصة ظهور الوجه الآخر فكيف نجد احتمال الحصول على الصورة واحتمال الحصول على الكتابة في هذه الحالة — من البديهي أنه لا يمكن تطبيق التعريف الكلاسيكي الذي يوصلنا إلى احتمال الحصول على الصورة يساوي تماما الحصول على كتابة يساوي $\frac{1}{4}$ — مثل هذه الملاحظات أدت إلى توجيه عدة انتقادات شديدة للتعريف الكلاسيكي الذي يكون قاصرا عن حساب الاحتمال في بعض الحالات مثل التي أوضحناها الآن — لذلك فإن التعريف الكلاسيكي يعتبر تعريفاً غير شامل ولا ينطبق إلا في حدود ضيقة جدا هي مجال ألعاب الصدفة مما دفع علماء الرياضة المهتمين بهذه الدراسة إلى وضع تعريف شامل يعتمد على التجربة والملاحظة وحصص الحالات التي يتحقق فيها الحدث المرغوب حساب احتمالها وهذا التعريف يسمى بالتعريف التجريبي للاحتمال ويمكن صياغة هذا التعريف كما يلي :

التعريف التجريبي للاحتمال:

إذا كررنا تجربة معينة مرات عددها n (تحت نفس الظروف) ولاحظنا أن حادثا معيناً أ قد تحقق في m من هذه المرات فإن النسبة $\frac{m}{n}$ تسمى بالتكرار النسبي للحدث أو تعتبر قيمة تجريبية لاحتمال وقوع هذا الحدث وتقترب هذه القيمة التقريبية من احتمال وقوع الحدث كلما كبرت n حتى أنه عندما تصبح n كبيرة كبراً لا نهائياً تصبح هذه القيمة التقريبية هي احتمال وقوع الحدث أ . و يكون:

احتمال وقوع الحدث أ هو $P(A) = \frac{m}{n}$ عندما تكبر n كبراً لا نهائياً .
وعادة نرمز إلى ذلك رياضياً بالصيغة التالية:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

(حيث أن n هي اختصار لكلمة نهاية — ويكون معنى الرمز السابق أنه في النهاية عندما تكبر n كبراً لا نهائياً يكون الاحتمال $P(A) = \frac{m}{n}$.)

هذا التعريف يقوم على أساس ملاحظة الظاهرة موضوع الدراسة عدد كبير من المرات — فمن المعلوم أن أي ظاهرة طبيعية مثل المواليد والوفيات وغير ذلك من الظواهر تخضع لصفة نظامية محددة — وهذه قدرة الخالق المبدع سبحانه وتعالى خلق كل شيء بقدر — هذه الصفة النظامية لا تظهر في الحالات القليلة العدد ولكنها تظهر بوضوح في الحالات الكبيرة العدد . كما أن هذا التعريف يسمى بالتعريف التجريبي لأنه يعتمد على ملاحظة التجربة — كما أنه يسمى أحيانا بالتعريف البعدي

لأن الاحتمال يتم حسابه بعد إجراء التجربة عدد كبير من المرات وهذا يختلف عن التعريف الكلاسيكي الذي يمكن استخدامه في حساب الاحتمال قبل إجراء التجربة.

مثال (١٥) : لدينا قطعة عملة معروف أنها غير متزنة— تم إلقاؤها ألف مرة فظهرت الصورة ٥٥٠ مرة والكتابة ٤٥٠ مرة. فما هو احتمال الحصول على الصورة عند إلقاء هذه القطعة؟

الحل

بما أن الصورة ظهرت ٥٥٠ مرة من بين ألف مرة— إذن نسبة ظهور الصورة = $\frac{٥٥٠}{١٠٠٠} = ٥٥\%$ وهذه النسبة يمكن اعتبارها تقريبا احتمال الحصول على الصورة وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$ح = ٥٥\%$$

مثال (١٦) : أجرى طبيب ٥٠٠ عملية جراحية ونجح منها ٤٨٠ عملية فما احتمال نجاح عملية يجريها هذا الطبيب؟

الحل

عدد مرات إجراء العملية ن = ٥٠٠

عدمرات نجاح العملية م = ٤٨٠

$$\text{احتمال نجاح العملية} = \frac{٤٨٠}{٥٠٠} = ٩٦\%$$

مثال (١٧) : في مصنع للمصابيح الكهربائية تبين أن من بين كل ١٠٠٠ مصباح يوجد ٥٠ مصباحا غير صالح للاستعمال. فما هو احتمال وجود مصباح جيد؟

الحل

عدد المصابيح ن = ١٠٠٠ مصباح

عدد المصابيح الجيدة م = ٩٥٠ مصباحا

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = \frac{٩٥٠}{١٠٠٠} = \frac{٩٥}{١٠٠} = ٩٥\%$$

(١-٤-٤) - بعض المصطلحات :

إذا كانت أ ترمز إلى وقوع حدث معين وليكن (أ)

، كانت ب ترمز إلى وقوع حدث معين آخر وليكن (ب)

فإن :

أ ترمز إلى عدم وقوع الحدث أ

ب ترمز إلى عدم وقوع الحدث ب

- (أ و ب) ترمز إلى وقوع الحدثين أ، ب معا
 (أ أو ب) ترمز إلى وقوع الحدث أ أو الحدث ب أو كلاهما معا .
 (ب | أ) ترمز إلى وقوع الحدث أ علما بأن الحدث ب قد وقع فعلا .

(١-٤-٥) - بعض التعاريف :

(١) يقال إن الحدثين أ، ب مانعان أو متنافيان أو متعارضان ، إذا كان حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر.

(٢) يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا كان احتمال حدوث أحدهما لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحدث الآخر.

(١-٥) - بعض قوانين الاحتمالات :

(أ) حالة الحوادث المعانة (المتنافية) :

إذا كان أ، ب حادثين مانعين (متنافيين) فإن :

$$ح(أ أو ب) = ح(أ) + ح(ب)$$

مثال (١٨) : سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب . فما هو احتمال أن تحمل الرقم ثلاثة أو صورة؟

الحل

نفرض أن أ - الورقة المسحوبة ثلاثة

ب - الورقة المسحوبة صورة

∴ أ ، ب حادثان مانعان

∴ ح(أ أو ب) = ح(أ) + ح(ب)

$$\frac{4}{13} = \frac{16}{52} = \frac{12}{52} + \frac{4}{52} =$$

ملحوظة (٢) :

يمكن تعميم القاعدة السابقة . فإذا كان أ ، أ_١ ، أ_٢ ، أ_٣ ، ، أن هي ن حادثة مانعة

فان : ح(أ_١ أو أ_٢ أو أ_٣ ، أو أن)

$$= ح(أ_١) + ح(أ_٢) + ح(أ_٣) + + ح(أن)$$

مثال (١٩) : سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب . فما هو احتمال أن تكون الورقة تحمل الرقم ثلاثة أو ثمانية أو صورة؟

الحل

نفرض أن ١ — الورقة المسحوبة ثلاثة
 أ — الورقة المسحوبة ثمانية
 ٣ — الورقة المسحوبة صورة
 وهذه حوادث مانعة .

$$\therefore \text{ح} (١ \text{ أو } ٢ \text{ أو } ٣) = \text{ح} (١) + \text{ح} (٢) + \text{ح} (٣)$$

$$\frac{٥}{١٣} = \frac{٢٠}{٥٢} = \frac{١٢}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} =$$

(ب) حالة الحوادث غير المانعة :

إذا كان أ ، ب حادثتين غير مانعتين فإن :
 $\text{ح} (\text{أ أو ب}) = \text{ح} (\text{أ}) + \text{ح} (\text{ب}) - \text{ح} (\text{أ و ب})$

مثال (٢٠) : ألقيت زهرة نرد مرة واحدة . فما هو احتمال أن يكون السطح العلوي يقبل القسمة على ٢ أو ٣؟

الحل

نفرض أن أ — السطح العلوي يقبل القسمة على ٢
 ب — السطح العلوي يقبل القسمة على ٣
 أ ، ب حادثان غير مانعين

$$\therefore \text{ح} (\text{أ أو ب}) = \text{ح} (\text{أ}) + \text{ح} (\text{ب}) - \text{ح} (\text{أ و ب})$$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٦} = \frac{١}{٦} - \frac{٢}{٦} + \frac{٢}{٦} =$$

مثال (٢١) : في المثال السابق (رقم ٢٠) احسب احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أكبر من ٢ .

الحل

نفرض أن أ — العدد الزوجي
 ب — العدد أكبر من ٢

أ، ب — حادثان غير مانعين .
 $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{6} - \frac{4}{6} + \frac{3}{6} =$$

(جـ) حالة الحوادث غير المستقلة :

إذا كانت أ، ب حادثتين غير مستقلتين فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

حيث $P(A \cap B)$ يسمى الاحتمال الشرطي، أي احتمال وقوع الحادث ب بشرط أن الحادث أ يكون قد وقع فعلا .

مثال (٢٢) : صندوق به ٥ كرات بيضاء، ٣ كرات حمراء، سحبته منه عشوائيا كرتان على التوالي (أي بدون إرجاع الكرة الأولى). فما هو احتمال أن تكون الكرتان بيضاء؟

الحل

نفرض أن أ — الكرة الأولى بيضاء .

ب — الكرة الثانية بيضاء

أ، ب حادثتان غير مستقلتين وذلك لأن احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الثانية يعتمد على لون الكرة الأولى .

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{5}{14} = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} =$$

مثال (٢٣) : في المثال السابق (رقم ٢٢) احسب احتمال أن تكون الكرتان واحدة بيضاء والأخرى حمراء .

الحل

نفرض أن أ — الكرة بيضاء

ب — الكرة حمراء

١ — رمز الأولى

٢ — رمز الثانية

$$(أ و ب) = أما (أ و ب) أو (ب و أ)$$

$$\therefore ح (أ و ب) = ح (أ و ب) + ح (ب و أ)$$

$$\begin{aligned} &= ح (أ | ب) + ح (ب | أ) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1 \end{aligned}$$

ملحوظة :

إذا كان $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ هي ن حادثة غير مستقلة فان

$$ح (A_1 و A_2 و A_3 و \dots و A_n) = ح (A_1) \times ح (A_2) \times \dots \times ح (A_n)$$

$$\text{مثال (٢٤) : صندوق به ٥ كرات بيضاء، ٤ حمراء سحبت منه على التوالي ٣ كرات فما هو احتمال أن تكون جميعها بيضاء؟}$$

الحل

أ - الكرة الأولى بيضاء

ب - الكرة الثانية بيضاء

ج - الكرة الثالثة بيضاء

هذه الحوادث الثلاث غير مستقلة :

$$\therefore ح (A_1 و A_2 و A_3) = ح (A_1) \times ح (A_2) \times ح (A_3)$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{60}{512}$$

(د) حالة الحوادث المستقلة :

إذا كانت أ، ب حادثتين مستقلتين فإن :

$$ح (أ و ب) = ح (أ) \cdot ح (ب)$$

$$= ح (ب) \cdot ح (أ)$$

مثال (٢٥) : إذا كان احتمال أن يموت شخص أ خلال ٨ سنوات هو ٣٠٪ ، واحتمال أن يموت

شخص ب آخر خلال نفس المدة هي ١٥٪ احسب احتمال أن يكون أ، ب قد ماتا خلال هذه المدة.

الحل

نفرض أن أ = موت الشخص أ خلال ٨ سنوات
 ب = موت الشخص ب خلال ٨ سنوات
 أ ، ب حادثتان مستقلتان.

$$\therefore \text{ح (أ و ب)} = \text{ح (أ)} \cdot \text{ح (ب)}$$

$$= 0.2 \times 0.15 = 0.03$$

ملحوظة (٣):

إذا كان ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، أن هي ن حادثة مستقلة فإن

$$\text{ح (١ و ٢ و ٣ و ... و أن)} =$$

$$= \text{ح (١)} \cdot \text{ح (٢)} \cdot \text{ح (٣)} \cdot \dots \cdot \text{ح (أن)}$$

(١-٦) - نظرية بيز:

إذا كانت ١ ، ٢ ، ... ، أن هي ن حادثة مانعة وشاملة وكان هناك حادثة أخرى ب لا تقع إلا مع إحدى حالات أ (أي أن ب تقع إذا وقعت واحدة من هذه الحوادث المانعة) فإن:

$$\text{ح (أ و ب)} = \frac{\text{ح (أ و ب)} \cdot \text{ح (أ و ب)}}{\text{ح (أ و ب)} \cdot \text{ح (أ و ب)}} = \text{ح (أ و ب)}$$

البرهان

حيث أن ١ ، ٢ ، ... ، أن حوادث مانعة وحيث أن ظهور إحداها ينتج عنه ظهور حادثة أخرى ب فإن: ب = (أ و ب) أو (٢ و ب) أو (٣ و ب) أو ... أو (أن و ب)

ويكون

$$\text{ح (ب)} = \text{ح (أ و ب)} + \text{ح (٢ و ب)} + \text{ح (٣ و ب)} + \dots + \text{ح (أن و ب)}$$

$$= \text{ح (أ و ب)} + \text{ح (٢ و ب)} + \dots + \text{ح (أن و ب)}$$

$$= \text{ح (أ و ب)} \cdot \text{ح (أ و ب)} + \text{ح (٢ و ب)} \cdot \text{ح (٢ و ب)} + \dots + \text{ح (أن و ب)} \cdot \text{ح (أن و ب)}$$

$$\text{وحيث أن: } C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

$$C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

$$\text{فإن: } C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

$$\therefore C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

$$\sum_r C(A \cap B) = C(A \cup B)$$

وهو المطلوب

مثال (٢٦) : ثلاثة مصانع I ، II ، III ، لإنتاج المصابيح الكهربائية لإحدى المحلات التجارية . فإذا كانت هذه المصانع تنتج على التوالي ٢٠% ، ٣٥% ، ٤٥% من المصابيح التي يبيعها المحل . وكان احتمال إنتاج مصباح تالف من المصانع I ، II ، III ، هو ٠.١٢ ، ٠.١٥ ، ٠.٠٨ ، على التوالي . فإذا اشترى شخص مصباحا من هذا المحل فأحسب :

(١) احتمال أن يكون المصباح تالفا .

(٢) إذا علم أن المصباح تالف فما هو احتمال أن يكون من إنتاج المصنع II .

الحل

نفرض أن A_1 المصباح من إنتاج المصنع I
 A_2 المصباح من إنتاج المصنع II
 A_3 المصباح من إنتاج المصنع III
 B المصباح تالف

نعلم أن :

$$C(A_1) = 0.20$$

$$C(A_2) = 0.35$$

$$C(A_3) = 0.45$$

كما نعلم أن :

$$C(B | A_1) = 0.12$$

$$ح (ب | أ^1) = 0.15$$

$$ح (ب | أ^2) = 0.08$$

(1) حيث أن ب = (أ¹ و ب) أو (أ² و ب) أو (أ³ و ب)

$$\therefore ح (ب) = \sum_{r=1}^3 ح (أ^r | ب)$$

$$= (0.2)(0.12) + (0.35)(0.15) + (0.45)(0.08) =$$

$$0.1125 =$$

$$\frac{ح (أ^1) \cdot ح (ب | أ^1)}{ح (ب)} = ح (أ^1 | ب)$$

$$0.47 = \frac{(0.35)(0.15)}{0.1125} =$$

أمثلة عامة

مثال (١):

فصل به ٣٠ طفلا، ١٢ ولدا، ١٨ بنتا فإذا كان من بينهم ٤ أولاد، ٨ بنات متفوقين . اختير طفلا عشوائيا ليكون عريفا على الفصل . أوجد احتمال أن يكون العريف:

- ١- ولد متفوق
٢- بنت متفوقة
٣- متفوق
٤- إذا علم أن العريف متفوق فما احتمال أن يكون بنت؟

الحل

١- العريف الذي سيختار ولد

٢- العريف الذي سيختار بنت

ب - العريف الذي سيختار متفوق

(١) احتمال أن يكون العريف ولدا متفوقا = $C(1, 1) \cdot C(1, 1)$ و ب

$$C(1, 1) \cdot C(1, 1) = \frac{12}{30} \cdot \frac{4}{30} = \frac{4}{75}$$

(٢) احتمال أن يكون العريف بنتا متفوقة = $C(1, 2) \cdot C(1, 1)$ و ب

$$C(1, 2) \cdot C(1, 1) = \frac{18}{30} \cdot \frac{4}{30} = \frac{4}{75}$$

(٣) احتمال أن يكون العريف متفوقا يعني إما أن يكون ولدا متفوقا أو بنتا متفوقة

$$\therefore C(1, 1) + C(1, 2) = C(1, 3)$$

$$\frac{4}{75} + \frac{4}{75} = \frac{8}{75}$$

$$C(1, 2) \cdot C(1, 1) / C(1, 3) = C(1, 2 | 1, 3) \quad (٤)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{\frac{8}{18} \times \frac{18}{30}}{\frac{12}{30}} =$$

مثال (٢) :

ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة فما هو احتمال الحصول على مجموع ٤ أو ١٢؟

الحل

أ - الحصول على مجموع ٤

ب - الحصول على مجموع ١٢

أ، ب حادثتان مانعتان (متنافيتان)

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)

$$\frac{1}{36} + \frac{3}{36} =$$

$$\frac{1}{9} = \frac{4}{36} =$$

مثال (٣) :

أعلنت جامعة الملك عبد العزيز عن شغل ٣ وظائف سكرتارية بها، فتقدم لها ٤ رجال، ٣ نساء. وعند الاختيار وجدت اللجنة أنهم جميعا متساوون في الخبرة والمؤهلات فقررت الاختيار عشوائيا، احسب احتمال اختيار:

٢ - رجلان على الأقل

١ - رجلان

الحل

يلاحظ أن احتمال اختيار رجل في المحاولة الأولى لا يساوي احتمال اختيار رجل في المحاولة الثانية.

١ - هناك ٣ ترتيبات يمكن بها اختيار ٢ رجل من بين ٣ لشغل الوظيفة وهي ${}^3P_2 = 3$

$$\text{— احتمال الحصول على أي ترتيب} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{35}$$

$$\therefore \text{احتمال اختيار رجلين} = \frac{18}{35} = \frac{6}{35} \times 3 =$$

٢ - رجلان على الأقل تعني رجلين أو ثلاث رجال

$$(أ) \text{ احتمال اختيار رجلين} = \frac{18}{30}$$

(ب) هناك حالة واحدة يمكن بها اختيار ٣ رجال من بين ٣ وهي

$$١ = ٣ق٣$$

$$\frac{٤}{30} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \text{احتمال الحصول على هذه الحالة}$$

$$\frac{22}{30} = \frac{4}{30} + \frac{18}{30} = \text{∴ احتمال اختيار رجلين على الأقل}$$

مثال (٤) :

مخزنان الأول به ٢٠ سلعة جيدة، ٥ رديئة، والثاني به ٣٠ سلعة جيدة، ١٠ رديئة، سحبت سلعة من كل من المخزين، فما هو احتمال أن تكون سلعة واحدة على الأقل من السلعتين جيدة؟

الحل

أ - سلعة جيدة من المخزن الأول .

ب - سلعة جيدة من المخزن الثاني .

أ، ب حادثان غير مانعين .

$$\text{∴ ح (أوب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أوب)}$$

$$= \frac{30}{40} \times \frac{20}{30} - \frac{30}{40} + \frac{20}{30} =$$

$$0.95 = \frac{19}{20} = \frac{3}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} =$$



تمارين

- ١- حقيبة بها ٥ كرات سوداء، ٤ بيضاء سحبت ٣ كرات عشوائيا، أوجد احتمال أن يكون اثنان منهما سوداوين .
- ٢- حقيبة بها ٣ كرات سوداء، ٤ بيضاء، وحقيبة أخرى بها ٥ كرات سوداء وكرتان بيضاء . نقلت كرة من الحقيبة الأولى إلى الثانية ثم سحبت كرة من الحقيبة الثانية، فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟
- ٣- كيس يحتوي على ٤ كرات حمراء، ٣ كرات بيضاء، اختار شخص كرتين عشوائيا فما هو احتمال حصوله على واحدة من كل لون؟
- ٤- مكتبة ذات ثلاثة أرفف، الأول به ٢٥ كتابا منها ٥ كتب خضراء والثاني به ٢٠ كتابا منها ٥ كتب خضراء والثالث به ١٥ كتابا منها ٥ كتب خضراء . أختير أحد الأرفف وسحب منه كتاب أوجد الاحتمالات الآتية :
(أ) أن يكون الكتاب المسحوب أخضر ومن الرف الأول .
(ب) أن يكون الكتاب المسحوب أخضر ومن المكتبة .
(ج) إذا علم أن الكتاب المسحوب أخضر فما احتمال أن يكون من الرف الأول؟
- ٥- مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، فإذا كان احتمال أن يكون المصباح من هذا الإنتاج تالفا هو $\frac{1}{8}$ واخترنا عشوائيا ٤ مصابيح، فما هو احتمال أن يكون من بينها مصباح على الأكثر تالف؟
- ٦- إذا كان ٢٥٪ من الطلبة، ١٥٪ من الطالبات بإحدى الكليات يدرسون الرياضيات وكانت الطالبات تكون ٤٠٪ من العدد الكلي لتلاميذ الكلية . أختير تلميذ عشوائيا ووجد أنه يدرس الرياضيات . فما احتمال أن يكون هذا التلميذ طالبة؟
- ٧- ثلاث صناديق يحتوي الأول على ٣ كرات بيضاء، ٤ كرات حمراء ويحتوي الثاني على ٣ كرات بيضاء، ٥ كرات حمراء ويحتوي الثالث على ٢ كرة بيضاء، ٣ كرات حمراء .
أختير صندوق عشوائيا وسحبت منه كرة عشوائيا .
(أ) فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟
(ب) إذا علم أن الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الثالث؟
- ٨- عند إلقاء ٣ قطع عملة دفعة واحدة - ما هو احتمال الحصول على صورتين على الأكثر؟

٩- ستة رجال كل منهم معه زوجته وجلس الاثنا عشر في غرفة واحدة.
أ- إذا اخترنا شخصين عشوائيا من بين الاثني عشر شخصا فما هو احتمال أن يكونا زوجا وزوجته؟

ب- إذا اخترنا ٤ أشخاص عشوائيا من الحجرة أوجد الاحتمالات الآتية:
أولا : أن يكونوا زوجين وزوجتيهما.
ثانيا: أن لا يوجد زوج وزوجته بين الأربعة المختارين.
ثالثا: أن يوجد زوج وزوجته والباقي مختلف.

* * *

الباب الثاني

التوزيعات الاحتمالية

التوزيعات الاحتمالية

(٢-١) - المتغير العشوائي:

يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى المتغير العشوائي، وهذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

مثال (١): إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة. هنا التجربة العشوائية هي إلقاء الزهرتين، ونتيجة التجربة هي النقاط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين. المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين. هذا المقدار يأخذ القيم ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢ وعلى ذلك فإن مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين متغير عشوائي. متغير لأنه يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة وعشوائي لأنه يرافق نتائج تجربة عشوائية.

مثال (٢): اختيار طالب من بين طلاب الجامعة. التجربة العشوائية هي اختيار طالب ونتيجة التجربة أحد طلاب الجامعة. المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون طول الطالب - دخل أسرة الطالب - عدد أفراد أسرة الطالب.. الخ. فإن اقتصرنا دراستنا على طول الطالب فإن هذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب طول الطالب الذي اختير وربما تأخذ أي قيمة ١٦٥ سم أو ١٦٦ أو أي قيمة بينهما. وعلى ذلك فإن طول الطالب متغير عشوائي لأنه يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

(أ) المتغير العشوائي المنفصل:

يقال إن المتغير العشوائي منفصل إذا أخذ قيما منفصلة عن بعضها البعض أي يوجد بينها ثغرات.

مثال (٣): عدد أفراد الأسرة متغير منفصل لأنه يأخذ القيم ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٣٧، ٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤١، ٤٢، ٤٣، ٤٤، ٤٥، ٤٦، ٤٧، ٤٨، ٤٩، ٥٠، وهذه القيم يوجد بينها ثغرات، فمثلا لا يوجد عائلة عدد أفرادها $\frac{1}{4}$ فرد.

مثال (٤): مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي عند إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة.

(ب) المتغير العشوائي المتصل:

يقال إن المتغير العشوائي متصل إذا أمكن أن يأخذ جميع القيم التي تقع في نطاق تغيره.

مثال (٥): طول الطالب متغير متصل لأنه يأخذ أي قيمة في نطاق تغير الطول، فإذا كانت أصغر

وأكبر قيمة للطول هي: ١٥٠ سم، ٢٠٠ سم على التوالي فطول الطالب يمكن أن يكون أي قيمة بين هاتين القيمتين فرما يكون ١٦٥ سم أو ١٦٦ سم أو أي قيمة بينهما حسب دقة القياس.

(٢-٢) - التوزيع الاحتمالي :

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ما (س مثلا) عبارة عن دالة تعطي احتمالات قيم س المختلفة، وهذه الدالة عبارة عن جدول أو صيغة رياضية تبين قيم س المختلفة واحتمالاتها وتحقق عدة شروط معينة نذكرها فيما بعد.

مثال (٦) : الجدول الآتي يبين قيم متغير عشوائي س والتوزيع الاحتمالي ح (س) لهذا المتغير العشوائي :

س	٢	٤	٥	٨
ح (س)	٠.١	٠.٣	٠.٤	٠.٢

مثال (٧) : الدالة الآتية تبين التوزيع الاحتمالي ح (س) لمتغير عشوائي س

$$ح (س) = \begin{cases} \frac{1}{4}س & \text{س} \in \{0, 1, 2, \dots, 5\} \\ \frac{3}{4}س - 5 & \text{س} \in \{6, 7, \dots\} \end{cases}$$

(أ) التوزيع الاحتمالي المنفصل:

إذا كانت س متغيرا عشوائيا يأخذ القيم

$$س_1, س_2, \dots, س_n$$

باحتمالات ح (س_١) ، ح (س_٢) ، ... ، ح (س_ن)

بشرط أن ح (س) ≥ ٠ لجميع قيم س

$$\sum_{س} ح (س) = ١ \quad (٢)$$

فإنه يقال إن س متغير عشوائي يتبع توزيعا احتماليا منفصلا دالته الاحتمالية هي ح(س).

مثال (٨) : اشترى شخص ٤ بطيخان ، فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو $\frac{٢}{٥}$ ، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد البطيخ التالف .

الحل

نفرض أن س هي عدد البطيخ التالف

س تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

نوجد احتمالات أن تأخذ س هذه القيم

س = ٠ صفر يعني أن البطيخات كلها جيدة

نعنى أن الأولى جيدة والثانية جيدة والثالثة جيدة والرابعة جيدة وهذه حوادث جميعا مستقلة .

$$ح (س = ٠) = ح (الأولى جيدة) \times ح (الثانية جيدة) \times$$

$$ح (الثالثة جيدة) \times ح (الرابعة جيدة)$$

$$= \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٨١}{٦٢٥}$$

س = ١ يعني أن هناك بطيخة واحدة تالفة والثلاث الأخرى جيدة

وهناك أربع حالات تظهر بها هذه النتيجة .

$$ح (س = ١) = ٤ ح (الأولى تالفة) \times ح (الثانية جيدة) \times$$

$$ح (الثالثة جيدة) \times ح (الرابعة جيدة)$$

$$= ٤ \left(\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \right) = \frac{٢١٦}{٦٢٥}$$

س = ٢ يعني أن هناك بطيختين تالفتين و بطيختين جيدتين

وهناك ٦ حالات تظهر بها هذه النتيجة .

$$ح (س = ٢) = ٦ ح (الأولى تالفة) \times ح (الثانية تالفة) \times$$

$$ح (الثالثة جيدة) \times ح (الرابعة جيدة)$$

$$= ٦ \left(\frac{٢}{٥} \times \frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \right) = \frac{٢١٦}{٦٢٥}$$

س = ٣ يعني أن هناك ٣ بطيخات تالفة وواحدة جيدة

وهناك ٤ حالات تظهر بها هذه النتيجة .

$$\therefore ح (س = ٣) = ٤ ح (الأولى تالفة) \times ح (الثانية تالفة) \times$$

$$ح (الثالثة تالفة) \times ح (الرابعة جيدة)$$

$$\frac{16}{625} = \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \right) \varepsilon =$$

س = ٤ يعني أن جميع البطيخات تالفة
ح (س = ٤) = ح (الأولى تالفة) × ح (الثانية تالفة) × ح (الثالثة تالفة) × ح (الرابعة تالفة).

$$\frac{16}{625} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} =$$

على ذلك يكون التوزيع الاحتمالي المطلوب هو:

المجموع	٤	٣	٢	١	٠	س
١	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$	ح (س)

مثال (٩): ألقىت زهرتي نرد مرة واحدة، أوجد التوزيع الاحتمالي لمجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي.

الحل

نفرض أن س هي مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي
س تأخذ القيم ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢

نتائج التحربة	١٠١	٢٠١	٣٠١	٤٠١	٥٠١	٦٠١	٧٠٢	٨٠٢	٩٠٢	١٠٠٢	١١٠٢	١٢٠٢
س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	

$$\therefore \text{ح (س = ٢)} = \text{ح (١، ١)} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$(1, 2) \text{ ح} + (2, 1) \text{ ح} = (3 = \text{س}) \text{ ح}$$

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} =$$

$$(1, 3) \text{ ح} + (2, 2) \text{ ح} + (3, 1) \text{ ح} = (4 = \text{س}) \text{ ح}$$

$$\frac{3}{36} = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) 3 =$$

وهكذا حتى

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = (6, 6) \text{ ح} = (12 = \text{س}) \text{ ح}$$

وعلى ذلك يكون التوزيع الاحتمالي المطلوب هو:

المجموع	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	س
١	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	(س) ح

(ب) التوزيع الاحتمالي المستمر (المتصل):

إذا كانت س متغيرا عشوائيا مستمرا وكانت هناك دالة د(س) تحقق الشروط الآتية:

$$١ - د(س) \leq \text{صفر} \quad \text{لجميع قيم س.}$$

$$٢ - \int_{- \infty}^{+ \infty} د(س) \text{ ح} = ١$$

فإنه يقال أن س متغير عشوائي يتبع توزيعا احتماليا مستمرا دالة كثافته الاحتمالية هي د(س). وفي هذه الحالة يكون:

$$\text{ح} (س \in \text{أ}) = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} د(س) \text{ ح}$$

وهذا يعني أن احتمال وقوع س في مدى معين يساوي المساحة الواقعة فوق هذا المدى وتحت منحنى الدالة د(س).

ملاحظة:

١ - الشرط الأول: يعني أن هذه الدالة موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي.

٢- الشرط الثاني: يعنى أن المساحة تحت منحنى هذه الدالة تساوي الواحد.

مثال (١٠): أثبت أن الدالة الآتية هي دالة توزيع احتمالي مستمر.

$$د(س) = \frac{1}{8} س \text{ حيث } ٠ \leq س \leq ٤$$

ثم أوجد: ج (١ \leq س \leq ٢) ، ح (س \leq ٢)

$$٤ ، ح (س > ١)$$

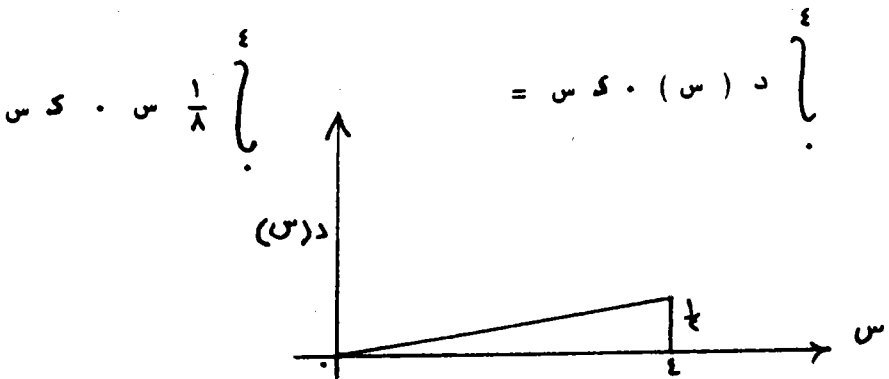
الحل

لكي تكون الدالة السابقة دالة توزيع احتمالي لابد من توافر الشروط السابق ذكرها.

— الشرط الأول هو أن الدالة موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي س متحقق حيث أن الدالة

موجبة في المدى صفر \leq س \leq ٤.

— الشرط الثاني، وهو أن المساحة تحت منحنى الدالة تساوي الواحد نثبتها فيما يلي:



$$= \int_0^4 \frac{1}{8} س^3 =$$

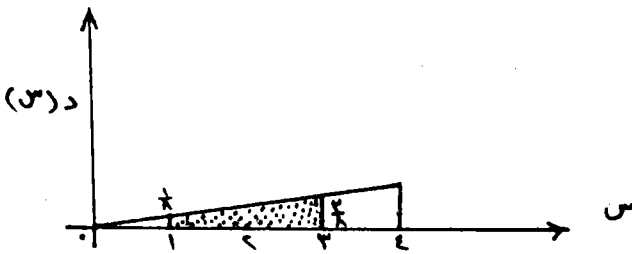
$$= \frac{1}{8} \left[\frac{س^4}{4} \right]_0^4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{٤^4}{4} = \frac{١٦}{١٦} = ١$$

وهذا يحقق الشرط الثاني.

∴ الدالة د (س) = $\frac{1}{8} س$.
 دالة توزيع احتمالي مستمر للمتغير العشوائي س .

$$P(1 \leq S \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{8} س \cdot د س$$

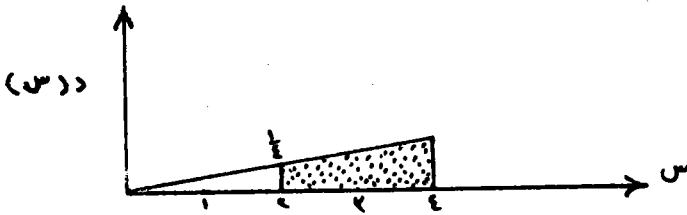
$$= \int_1^2 \frac{1}{8} س \cdot د س$$



$$= \left[\frac{س^2}{16} \right]_1^2 = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(S \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{8} س \cdot د س$$

$$\int_2^4 \frac{1}{8} ds =$$



$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16} = (4 - 1) \frac{1}{16} = \int_1^4 \left[\frac{s}{4} \right] \frac{1}{8} ds =$$

$$- \int_0^1 \frac{1}{8} ds = \int_0^1 \frac{1}{8} ds = (1 - 0) \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{16} = (1 - 0) \frac{1}{16} = \int_0^1 \left[\frac{s}{4} \right] \frac{1}{8} ds =$$

مثال (١١): أثبت أن الدالة

$$f(s) = (s - 1) \quad \text{حيث } 0 \leq s \leq 1$$

دالة توزيع احتمالي مستمر

الحل

لكي تكون الدالة السابقة دالة توزيع احتمالي مستمر لابد من توافر الشروط السابق ذكرها.

الشرط الأول: متحقق حيث أن الدالة موجبة في المدى $0 \leq s \leq 1$

الشرط الثاني: نثبتته كما يلي:

$$f'(s) = 6s(1-s) = 6s - 6s^2$$

$$= 6(1 - 2s)$$

$$= 6 \left\{ 1 - 2s \right\}$$

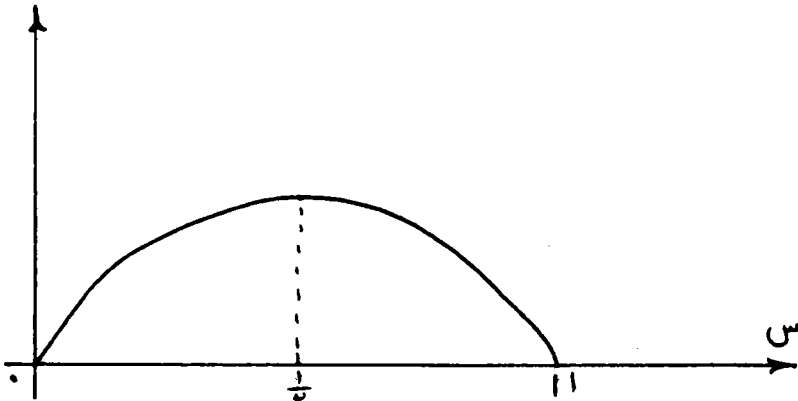
$$= 6 \left\{ 1 - 2 \left[\frac{s}{4} \right] \right\}$$

$$= 6 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 6 \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= 3$$

د(س)

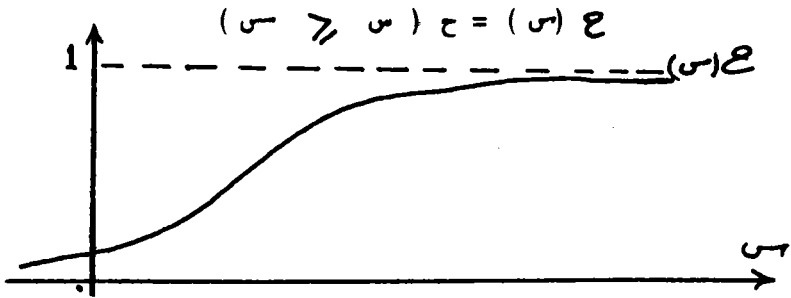


∴ الدالة د (س) = 6س(1-س) حيث 0 ≤ س ≤ 1

دالة توزيع احتمالي مستمر للمتغير العشوائي س.

(٢-٣) - دالة التوزيع التراكمية :

يتحدد التوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي s أما بدلالة دالته الاحتمالية أو بدلالة دالة جديدة تسمى دالة التوزيع التراكمية وتعرف بالآتي :



و يلاحظ على هذا التعريف ما يلي :

أ- $F(s) =$ دالة غير متناقصة

ب- $F(-\infty) =$ صفر

ج- $F(+\infty) = 1$

كما يلاحظ أنه إذا كانت s متغيرا عشوائيا مستمرا فان

$$F(s) = P(S \leq s)$$

$$dF(s) = \int_{-\infty}^s f(s) ds$$

وبتفاضل الطرفين نجد أن

$$dF(s) = \left(\frac{f(s)}{f(s)} \right) ds = ds$$

وهذا يعني أنه إذا عرفت دالة التوزيع التراكمية يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي والعكس صحيح . وبالمثل إذا كانت s متغيرا منفصلا .

مثال (١٢) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي s هي

$$f(s) = \frac{1}{8} \quad \text{حيث} \quad 0 \leq s \leq 8$$

أوجد دالة التوزيع التراكمية.

الحل

دالة التوزيع التراكمية هي

$$ع (س) = ح (س) - ح (س > س)$$

$$= \sum_{س=0}^{س} د (س) - ح (س)$$

$$= \sum_{س=0}^{س} \frac{1}{8} - ح (س)$$

$$= \left[\frac{س+1}{8} \right] - ح (س)$$

$$= \frac{س+1}{8} - ح (س) \quad \text{حيث } 0 \leq س < 4$$

$$\therefore ح (س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س+1}{8} \\ 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 0 \leq س < 4 \\ س \leq 4 \end{array}$$

مثال (١٣): أوجد دالة التوزيع التراكمية للمثال رقم (٨).

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤
ح (س)	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$
ع (س)	$\frac{81}{625}$	$\frac{297}{625}$	$\frac{513}{625}$	$\frac{609}{625}$	$\frac{625}{625}$

(٢-٤) - بعض خواص التوزيعات الاحتمالية :

يوجد عدة خواص تميز التوزيعات الاحتمالية نذكر منها خاصيتين هامتين وهما :

(أ) القيمة المتوقعة للتوزيع :

القيمة المتوقعة للتوزيع أو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي هو القيمة المتوسطة للمتغير ويرمز لها بالرمز μ وتعطى بالمعادلة :

$$\left. \begin{array}{l} \sum x (s) \quad \text{إذا كانت } s \text{ متغير منفصلا} \\ \sum x (s) \quad \text{إذا كانت } s \text{ متغير متصلا} \end{array} \right\} = \mu$$

ويمكن تفسير متوسط التوزيع على أنه إذا تكررت التجربة العشوائية عددا لا نهائيا من المرات وفي كل مرة لاحظنا نتيجة التجربة وقيمة المتغير العشوائي الذي يرافقها فيكون متوسط التوزيع عبارة عن الوسط الحسابي لهذا العدد اللانهائي من قيم المتغير العشوائي .

(ب) الانحراف المعياري للتوزيع :

يعرف تباين التوزيع كالاتي :

$$\left. \begin{array}{l} \sum x^2 (s) - \mu^2 \quad \text{إذا كانت } s \text{ متغير منفصلا} \\ \sum x^2 (s) - \mu^2 \quad \text{إذا كانت } s \text{ متغير متصلا} \end{array} \right\} = \sigma^2$$

والانحراف المعياري (σ) هو الجذر التربيعي للتباين . و يقيس الانحراف المعياري مقدار تشتت قيم المتغير العشوائي .

مثال (١٤) : أوجد المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الآتي :

$$d (s) = 6 (s - 1) \quad \text{حيث } 0 \leq s \leq 1$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{— متوسط التوزيع } &= \mu \\ \sum x (s) &= \mu \\ \sum x^2 (s) &= \mu^2 \end{aligned}$$

$$1 \quad \tau = \left[\begin{matrix} 1 \\ (س^2 - س) س \end{matrix} \right]$$

$$1 \quad \left[\begin{matrix} \frac{4}{س} \\ - \frac{2}{3} \end{matrix} \right] \tau =$$

$$\frac{2-4}{12} \times \tau = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right] \tau =$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{12} \times \tau =$$

$$1 \quad \tau = \left[\begin{matrix} 1 \\ س^2 د (س) س س - س \end{matrix} \right] = \sigma^2 \quad \text{— تباين التوزيع}$$

$$1 \quad \tau = \left[\begin{matrix} 1 \\ س^3 (س-1) س س - \frac{1}{3} \end{matrix} \right]$$

$$1 \quad \tau = \left[\begin{matrix} 1 \\ (س^4 - س^3) س س - \frac{1}{4} \end{matrix} \right]$$

$$1 \quad \left[\begin{matrix} \frac{0}{س} \\ - \frac{4}{س} \end{matrix} \right] \tau =$$

$$\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{0} - \frac{1}{4} \right] \tau =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{4-0}{20} \times \tau =$$

$$\frac{1}{20} = \frac{0}{20} - \frac{7}{20} =$$

$$\sqrt{\frac{7}{20}} = \sigma \quad \text{الانحراف المعياري}$$

$$\sqrt{\frac{1}{20}} =$$

مثال (١٥): أعلنت وزارة الصحة عن إرسال ٣ بعثات لدراسة إدارة المستشفيات فتقدم لها ٤ رجال، ٣ نساء. وعند الاختيار وجد أنهم متساوون في المؤهل والخبرة— فتقرر اتباع طريقة الاختيار العشوائي.

أوجد-

(أ) التوزيع الاحتمالي لعدد النساء المختارات .

(ب) متوسط عدد النساء المختارات .

(ج) الانحراف المعياري لعدد النساء المختارات .

الحل

نفرض أن s هي عدد النساء المختارات

∴ s تأخذ القيم ٠، ١، ٢، ٣

$$ح (s = 0) = {}^3C_0 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{60}$$

$$ح (s = 1) = {}^3C_1 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{18}{60}$$

$$ح (s = 2) = {}^3C_2 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{12}{60}$$

$$ح (s = 3) = {}^3C_3 = \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{60}$$

∴ التوزيع الاحتمالي يكون

المجموع	٣	٢	١	٠	s
١	$\frac{1}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{8}{60}$	ح (s)

s	ح (s)	s ح (s)	s^2 ح (s)
٠	$\frac{8}{60}$	٠	$\frac{8}{60}$
١	$\frac{18}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{18}{60}$
٢	$\frac{12}{60}$	$\frac{24}{60}$	$\frac{48}{60}$
٣	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{9}{60}$
Σ	١	$\frac{45}{60}$	$\frac{75}{60}$

$$\therefore \text{متوسط التوزيع} = \sum s \cdot h (s) =$$

$$= \frac{45}{30} = 1.5 \text{ امرأة}$$

$$\text{تباين التوزيع} = \sum s^2 \cdot h (s) - \bar{M}^2 = \sigma^2$$

$$= \frac{75}{30} - \left(\frac{45}{30}\right)^2 =$$

$$= \frac{24}{49} = 0.49$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \text{ومنه نجد أن الانحراف المعياري للتوزيع}$$

$$= \sqrt{0.49} \text{ امرأة}$$

تمارين

١- إذا كانت أعمار المصباح الكهربائية التي تنتجها إحدى الشركات تتبع التوزيع الاحتمالي الآتي:

$$D(s) = (s) \cdot A \cdot s^2 (s-1) \text{ حيث } 0 \leq s \leq 1$$

س : العمر بالسنة

أ : مقدار ثابت

والمطلوب:

— إيجاد قيمة أ.

— إذا اختير مصباح عشوائي فما هو احتمال أن يعيش أكثر من ٤ شهور.

— أوجد متوسط عمر المصباح وكذلك الانحراف المعياري.

— أوجد دالة التوزيع التراكمية ومثلها بيانياً.

٢- إذا كانت س تتبع التوزيع الأسّي الآتي:

$$D(s) = (s) \cdot A \cdot e^{-s} \text{ حيث } 0 \leq s < \infty$$

أوجد:

— قيمة أ

— ح (س > ١)

— دالة التوزيع التراكمية .

— متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري .

٣ — أعلنت جامعة الملك عبدالعزيز عن شغل ٣ وظائف سكرتارية فتقدم لها ٥ رجال ، ٥ نساء وعند الاختيار وجد أنهم متساوون في المؤهل والخبرة، فقررت اللجنة الاختيار عشوائيا .
أوجد:

— التوزيع الاحتمالي لعدد النساء المختارات .

— متوسط عدد النساء المختارات وكذلك الانحراف المعياري .

— دالة التوزيع التراكمية .

٤ — إذا كان احتمال أن تصل الطائرة التي تقوم من مطار القاهرة متجهة إلى مطار جدة في موعدها هو $\frac{3}{4}$ ، قامت خمس طائرات من القاهرة متجهة إلى جدة .
أوجد:

— التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها .

— متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري .

— دالة التوزيع التراكمية .

٥ — اثبت أن الدالة

$$ح (س) = 1 - ٣س - ١ \text{ حيث : } ١ = ٢ ، ٢ = ٣ ، ٣ = ٤ ، \dots$$

$$. \quad ١ \geq ٢ ، ٢ \geq ٣$$

$$١ = ٢ + ٣$$

تمثل توزيعا احتماليا ، ثم أوجد دالة التوزيع التراكمية وكذلك المتوسط والانحراف المعياري لهذا التوزيع .

الباب الثالث

بعض التوزيعات الاحتمالية

بعض التوزيعات الاحتمالية

أولاً: توزيع ذي الحدين :

(١-٣) - تعريف :

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين أو عدم ظهوره (مثل نجاح الطالب أو فشله، المصباح الكهربائي جيد أو تالف، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها، إصابة طائرة الهدف للعدو أو عدم إصابتها له، ظهور الصورة عند القاء قطعة نقود أو عدم ظهورها، إلخ) وكان احتمال ظهور هذا الحدث في أي محاولة هو C (وعلى ذلك فإن احتمال عدم ظهوره هو $1 - C$). فإذا تكررت هذه التجربة أو المحاولة n مرة، فإن احتمال ظهور هذا الحدث n مرة من بين n من هذه المحاولات هو:

$$C^n = \binom{n}{s} C^s (1-C)^{n-s}$$

حيث s تأخذ القيم $0, 1, 2, 3, \dots, n$

وبالتعويض بقيم s المختلفة نحصل على :

$$C^n = \binom{n}{0} C^0 (1-C)^n = (1-C)^n$$

$$C^n = \binom{n}{1} C^1 (1-C)^{n-1} = n C (1-C)^{n-1}$$

$$C^n = \binom{n}{2} C^2 (1-C)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!} C^2 (1-C)^{n-2}$$

$$C^n = \binom{n}{3} C^3 (1-C)^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} C^3 (1-C)^{n-3}$$

$$C^n =$$

$$C^n = \binom{n}{n} C^n (1-C)^0 = C^n$$

ومنها نجد أن مجموع الطرف الأيمن هو مجموع احتمالات قيم s المختلفة ويساوي $\sum_{s=0}^n C(s)$ ومجموع الطرف الأيسر هو مفكوك ذي الحدين

$$1 = (C + J)^n$$

وعلى ذلك فإن $\sum_{s=0}^n C(s) = 1$ ونقس $C(s) = 1 - J^n$

وهذا يبين أن $C(s)$ هي دالة توزيع احتمالي، و يطلق عليها توزيع ذي الحدين.

(٢-٣) - بعض خصائص التوزيع:

(أ) متوسط التوزيع:

يمكن إثبات أن متوسط هذا التوزيع $= \sum_{s=0}^n s C(s)$

$$= \sum_{s=0}^n s (1 - J)^s =$$

$$= n C$$

(ب) الانحراف المعياري:

وكذلك يمكن إثبات أن

$$\sigma^2 = \sum_{s=0}^n s^2 C(s) - \mu^2 =$$

$$= n C J$$

$$\sigma = \sqrt{n C J} = \text{الانحراف المعياري}$$

مثال (١): ألقىت قطعة نقود ٤ مرات. فما هو احتمال ظهور الصورة ٣ مرات.

الحل

عدد التجارب أو المحاولات $n = 4$

احتمال ظهور الصورة في أي مرة $\frac{1}{3} = p$

احتمال عدم ظهور الصورة في أي مرة $q = 1 - p = \frac{2}{3}$
 بفرض أن s عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي

$$\therefore P(s) = \binom{4}{s} p^s q^{4-s} \quad \text{حيث } s = 0, 1, 2, 3, 4$$

احتمال ظهور الصورة 3 مرات $P(3) = \binom{4}{3} p^3 q^1$

$$= \binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$= \frac{4}{16}$$

$$= \frac{1}{4}$$

مثال (٢): اشترى شخص صندوقا به ٥ بطيخات. فإذا كان احتمال أن تكون أي منهم تالفة هو ٠,٢، احسب احتمال أن تكون:

(I) ٢ تالفة

(II) ٢ على الأكثر تالفة

(III) جميعها طيبة

الحل

عدد المحاولات $n =$ عدد البطيخات $= 5$

احتمال أن تكون أي منهم تالفة $p = 0,2$

احتمال أن تكون أي منهم جيدة $q = 0,8$

نفرض أن s هو عدد البطيخات التالفة

$$\therefore P(s) = \binom{5}{s} p^s q^{5-s}$$

حيث $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

(I) احتمال أن تكون بطيختان تالفتين $P(2) = \binom{5}{2} p^2 q^3$

$$= \binom{5}{2} (0,2)^2 (0,8)^3$$

$$0.2048 =$$

(II) احتمال أن تكون بطيختان على الأكثر تالفة = ح (س ≥ ٢)

$$= ح (س = ٠) + ح (س = ١) + ح (س = ٢)$$

$$= ٠.٠٢٠٠٠٠ (٠.٠٨)^٠ + ٠.٠٢٠٠٠٠ (٠.٠٨)^١ + ٠.٠٢٠٠٠٠ (٠.٠٨)^٢$$

$$= ٠.٠٢٠٠٠٠ + ٠.٠٣٢٧٦٨ + ٠.٠٢٠٤٨٠$$

$$= ٠.٠٩٤٢٠٨$$

(III) احتمال أن تكون جميعها طيبة = ح (س = ٠)

$$= ٠.٠٢٠٠٠٠ (٠.٠٨)^٠$$

$$= ٠.٠٢٠٤٨٠$$

مثال (٣): إذا كان ١٠% من إنتاج إحدى آلات المسامير تالفا، وسحبنا عشوائيا ٥ مسامير من إنتاج هذه الآلة. أوجد:

١- التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة وضعه في صورة جدول

٢- متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري له.

الحل

عدد المسامير = ن = ٥

احتمال أن يكون أي مسامير تالفا = ٠.٠٨

احتمال أن يكون أي مسامير غير تالفا = ١ - ٠.٠٨ = ٠.٩٢
نفرض أن س = عدد المسامير التالفة
وبذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالية هي:

$$ح (س) = {}^٥ C_٠ (٠.٠٨)^٠ (٠.٩٢)^٥$$

حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

١- التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة:

بالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالية بقيم س المختلفة نحصل على :

$$ح (س = ٠) = ق٠ (١ر) (٠ر) = ٠.٥٩٠٤٩$$

$$ح (س = ١) = ق١ (١ر) (١ر) = ٠.٣٢٨٠٥$$

$$ح (س = ٢) = ق٢ (١ر) (٢ر) = ٠.٠٧٢٩٠$$

$$ح (س = ٣) = ق٣ (١ر) (٣ر) = ٠.٠٠٨١٠$$

$$ح (س = ٤) = ق٤ (١ر) (٤ر) = ٠.٠٠٠٤٥$$

$$ح (س = ٥) = ق٥ (١ر) (٥ر) = ٠.٠٠٠٠١$$

∴ التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة في صورة جدول هو:

المجموع	٥	٤	٣	٢	١	٠	س
١	٠.٠٠٠٠١	٠.٠٠٠٤٥	٠.٠٠٠٨١٠	٠.٠٧٢٩٠	٠.٣٢٨٠٥	٠.٥٩٠٤٩	ح (س)

٢- متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري:

$$\text{متوسط التوزيع} = ن ح$$

$$= ٥ \times ٠.١$$

$$= ٠.٥ \text{ مسمار تالف}$$

$$\text{الانحراف المعياري للتوزيع} = \sqrt{ن ح}$$

$$= \sqrt{٥ \times ٠.١}$$

$$= \sqrt{٠.٥} \text{ مسمار تالف}$$

مثال (٤) : قدرت شركة للطيران أن احتمال وصوف الطائرة التي تقوم من لندن إلى مطار جدة في ميعادها هو ٠.٧، فإذا قامت ٤ طائرات من طائرات الشركة من مطار لندن متجهة إلى مطار جدة. فأوجد:

(أ) التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها.

(ب) التوزيع الاحتمالي في صورة جدول ومنه استنتج:

١ - احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها.

٢ - احتمال وصول ٣ طائرات على الأقل في ميعادها.

(ج) متوسط عدد الطائرات التي تصل في موعدها وكذلك انحرافها المعياري.

الحل

عدد الطائرات = ٤

احتمال وصول أي طائرة في موعدها = ٠.٧

احتمال عدم وصول أي طائرة في موعدها = ١ - ٠.٧ = ٠.٣

نفرض أن S عدد الطائرات التي تصل في ميعادها.

(أ) وبذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالي هي:

$$ح(S) = {}^4C_S (0.7)^S (0.3)^{4-S} \text{ حيث } S = 0, 1, 2, 3, 4$$

(ب) بالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالي بقيم S المختلفة نحصل على:

$$ح(S=0) = {}^4C_0 (0.7)^0 (0.3)^4 = 0.0081$$

$$ح(S=1) = {}^4C_1 (0.7)^1 (0.3)^3 = 0.0756$$

$$ح(S=2) = {}^4C_2 (0.7)^2 (0.3)^2 = 0.2766$$

$$ح(S=3) = {}^4C_3 (0.7)^3 (0.3)^1 = 0.4116$$

$$ح(S=4) = {}^4C_4 (0.7)^4 (0.3)^0 = 0.2401$$

∴ التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها يكون:

المجموع	٤	٣	٢	١	٠	S
ح(S)	٠.٢٤٠١	٠.٤١١٦	٠.٢٧٦٦	٠.٠٧٥٦	٠.٠٠٨١	١

(١) احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها:

$$ح(S \geq 1) = ح(S=1) + ح(S=2) + ح(S=3) + ح(S=4)$$

$$= 0.0756 + 0.2766 + 0.4116 + 0.2401$$

$$= 0.9999$$

(٢) احتمال وصول ٣ طائرات على الأقل في ميعادها:

$$\text{أى ح (س ك ٣) = ح (س = ٣) + ح (س = ٤)$$

$$= ٠.٢٤٠١ + ٠.٤١١٦$$

$$= ٠.٦٥١٧$$

(ج) متوسط عدد الطائرات التي تصل في موعدها وكذلك انحرافها المعياري:

$$\text{— متوسط التوزيع = ن ح}$$

$$= ٠.٧ \times ٤$$

$$= ٢.٨ \text{ طائرة}$$

$$\text{— الانحراف المعياري للتوزيع = } \sqrt{\text{ن ح ل}}$$

$$= \sqrt{٠.٣ \times ٧ \times ٤}$$

$$= \sqrt{٠.٨٤} \text{ طائرة}$$

مثال (٥): إذا كان احتمال إصابة الطائرة لأحد أهداف العدو هو ٠.٨، فإذا أغارت خمس طائرات على الهدف فأوجد:

١— التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصيب الهدف.

٢— متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري له.

الحل

عدد الطائرات المغيبة ن = ٥

احتمال إصابة الهدف بأي طائرة مغيبة = ٠.٨

احتمال عدم إصابة الهدف بأي طائرة مغيبة = ٠.٢

نفرض أن س عدد الطائرات التي تصيب الهدف.

وبذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالية هي:

$$١- \text{ح (س)} = {}^٥\text{ق س (٠.٨)} \text{ س (٠.٢)} - ٥ - \text{س}$$

حيث أن س = ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥

٢— متوسط التوزيع والانحراف المعياري:

— متوسط التوزيع = $n \times e = 0.8 \times 5$

= e طائرات

— الانحراف المعياري للتوزيع = $\sqrt{n \times e}$

$$= \sqrt{0.8 \times 5 \times 2}$$

$$= \sqrt{0.8}$$

ثانياً: توزيع بواسون:

(3-3) — تعريف:

توجد بعض الظواهر النادرة مثل الزلازل — الحرائق — الحوادث على إحدى الطرق — عدد الأخطاء المطبعية في صفحة ما من كتاب . والتوزيع الذي يعطي احتمالات لقيم هذه الظواهر النادرة يسمى «توزيع بواسون» .

فإذا كانت s ترمز لقيم الظاهرة (مثلاً تكون s — عدد الزلازل في السنة أو عدد الحرائق الأسبوعية أو عدد الحوادث اليومية على إحدى الطرق) وكانت h (s) احتمال وقوع s فان:

$$h(s) = \frac{e^{-h} \cdot h^s}{s!}$$

حيث: (I) s هي قيم الظاهرة وتأخذ القيم 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11، 12، 13، 14، 15، 16، 17، 18، 19، 20، 21، 22، 23، 24، 25، 26، 27، 28، 29، 30، 31، 32، 33، 34، 35، 36، 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44، 45، 46، 47، 48، 49، 50، 51، 52، 53، 54، 55، 56، 57، 58، 59، 60، 61، 62، 63، 64، 65، 66، 67، 68، 69، 70، 71، 72، 73، 74، 75، 76، 77، 78، 79، 80، 81، 82، 83، 84، 85، 86، 87، 88، 89، 90، 91، 92، 93، 94، 95، 96، 97، 98، 99، 100، 101، 102، 103، 104، 105، 106، 107، 108، 109، 110، 111، 112، 113، 114، 115، 116، 117، 118، 119، 120، 121، 122، 123، 124، 125، 126، 127، 128، 129، 130، 131، 132، 133، 134، 135، 136، 137، 138، 139، 140، 141، 142، 143، 144، 145، 146، 147، 148، 149، 150، 151، 152، 153، 154، 155، 156، 157، 158، 159، 160، 161، 162، 163، 164، 165، 166، 167، 168، 169، 170، 171، 172، 173، 174، 175، 176، 177، 178، 179، 180، 181، 182، 183، 184، 185، 186، 187، 188، 189، 190، 191، 192، 193، 194، 195، 196، 197، 198، 199، 200، 201، 202، 203، 204، 205، 206، 207، 208، 209، 210، 211، 212، 213، 214، 215، 216، 217، 218، 219، 220، 221، 222، 223، 224، 225، 226، 227، 228، 229، 230، 231، 232، 233، 234، 235، 236، 237، 238، 239، 240، 241، 242، 243، 244، 245، 246، 247، 248، 249، 250، 251، 252، 253، 254، 255، 256، 257، 258، 259، 260، 261، 262، 263، 264، 265، 266، 267، 268، 269، 270، 271، 272، 273، 274، 275، 276، 277، 278، 279، 280، 281، 282، 283، 284، 285، 286، 287، 288، 289، 290، 291، 292، 293، 294، 295، 296، 297، 298، 299، 300، 301، 302، 303، 304، 305، 306، 307، 308، 309، 310، 311، 312، 313، 314، 315، 316، 317، 318، 319، 320، 321، 322، 323، 324، 325، 326، 327، 328، 329، 330، 331، 332، 333، 334، 335، 336، 337، 338، 339، 340، 341، 342، 343، 344، 345، 346، 347، 348، 349، 350، 351، 352، 353، 354، 355، 356، 357، 358، 359، 360، 361، 362، 363، 364، 365، 366، 367، 368، 369، 370، 371، 372، 373، 374، 375، 376، 377، 378، 379، 380، 381، 382، 383، 384، 385، 386، 387، 388، 389، 390، 391، 392، 393، 394، 395، 396، 397، 398، 399، 400، 401، 402، 403، 404، 405، 406، 407، 408، 409، 410، 411، 412، 413، 414، 415، 416، 417، 418، 419، 420، 421، 422، 423، 424، 425، 426، 427، 428، 429، 430، 431، 432، 433، 434، 435، 436، 437، 438، 439، 440، 441، 442، 443، 444، 445، 446، 447، 448، 449، 450، 451، 452، 453، 454، 455، 456، 457، 458، 459، 460، 461، 462، 463، 464، 465، 466، 467، 468، 469، 470، 471، 472، 473، 474، 475، 476، 477، 478، 479، 480، 481، 482، 483، 484، 485، 486، 487، 488، 489، 490، 491، 492، 493، 494، 495، 496، 497، 498، 499، 500، 501، 502، 503، 504، 505، 506، 507، 508، 509، 510، 511، 512، 513، 514، 515، 516، 517، 518، 519، 520، 521، 522، 523، 524، 525، 526، 527، 528، 529، 530، 531، 532، 533، 534، 535، 536، 537، 538، 539، 540، 541، 542، 543، 544، 545، 546، 547، 548، 549، 550، 551، 552، 553، 554، 555، 556، 557، 558، 559، 560، 561، 562، 563، 564، 565، 566، 567، 568، 569، 570، 571، 572، 573، 574، 575، 576، 577، 578، 579، 580، 581، 582، 583، 584، 585، 586، 587، 588، 589، 590، 591، 592، 593، 594، 595، 596، 597، 598، 599، 600، 601، 602، 603، 604، 605، 606، 607، 608، 609، 610، 611، 612، 613، 614، 615، 616، 617، 618، 619، 620، 621، 622، 623، 624، 625، 626، 627، 628، 629، 630، 631، 632، 633، 634، 635، 636، 637، 638، 639، 640، 641، 642، 643، 644، 645، 646، 647، 648، 649، 650، 651، 652، 653، 654، 655، 656، 657، 658، 659، 660، 661، 662، 663، 664، 665، 666، 667، 668، 669، 670، 671، 672، 673، 674، 675، 676، 677، 678، 679، 680، 681، 682، 683، 684، 685، 686، 687، 688، 689، 690، 691، 692، 693، 694، 695، 696، 697، 698، 699، 700، 701، 702، 703، 704، 705، 706، 707، 708، 709، 710، 711، 712، 713، 714، 715، 716، 717، 718، 719، 720، 721، 722، 723، 724، 725، 726، 727، 728، 729، 730، 731، 732، 733، 734، 735، 736، 737، 738، 739، 740، 741، 742، 743، 744، 745، 746، 747، 748، 749، 750، 751، 752، 753، 754، 755، 756، 757، 758، 759، 760، 761، 762، 763، 764، 765، 766، 767، 768، 769، 770، 771، 772، 773، 774، 775، 776، 777، 778، 779، 780، 781، 782، 783، 784، 785، 786، 787، 788، 789، 790، 791، 792، 793، 794، 795، 796، 797، 798، 799، 800، 801، 802، 803، 804، 805، 806، 807، 808، 809، 810، 811، 812، 813، 814، 815، 816، 817، 818، 819، 820، 821، 822، 823، 824، 825، 826، 827، 828، 829، 830، 831، 832، 833، 834، 835، 836، 837، 838، 839، 840، 841، 842، 843، 844، 845، 846، 847، 848، 849، 850، 851، 852، 853، 854، 855، 856، 857، 858، 859، 860، 861، 862، 863، 864، 865، 866، 867، 868، 869، 870، 871، 872، 873، 874، 875، 876، 877، 878، 879، 880، 881، 882، 883، 884، 885، 886، 887، 888، 889، 890، 891، 892، 893، 894، 895، 896، 897، 898، 899، 900، 901، 902، 903، 904، 905، 906، 907، 908، 909، 910، 911، 912، 913، 914، 915، 916، 917، 918، 919، 920، 921، 922، 923، 924، 925، 926، 927، 928، 929، 930، 931، 932، 933، 934، 935، 936، 937، 938، 939، 940، 941، 942، 943، 944، 945، 946، 947، 948، 949، 950، 951، 952، 953، 954، 955، 956، 957، 958، 959، 960، 961، 962، 963، 964، 965، 966، 967، 968، 969، 970، 971، 972، 973، 974، 975، 976، 977، 978، 979، 980، 981، 982، 983، 984، 985، 986، 987، 988، 989، 990، 991، 992، 993، 994، 995، 996، 997، 998، 999، 1000

(II) m متوسط قيم الظاهرة (متوسط التوزيع) .

(III) h مقدار ثابت . وهو الأساس الطبيعي اللوغاريتمي .

وبالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالية بقيم s المختلفة نحصل على:

$$h(s=0) = \frac{e^{-h} \cdot h^0}{0!} = e^{-h}$$

$$h(s=1) = \frac{e^{-h} \cdot h^1}{1!} = h e^{-h}$$

$$h(s=2) = \frac{e^{-h} \cdot h^2}{2!} = \frac{h^2}{2} e^{-h}$$

$$m - h = \frac{{}^m P_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$h (s = 3) = \frac{{}^m P_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

- .
- .
- .
- .
- .
- .
- .

ومن هنا نجد أن مجموع الطرف الأيمن هو مجموع احتمالات قيم s المختلفة و يساوي

$$\sum_{s=0}^{\infty} h (s)$$

ومجموع الطرف الأيسر

$$= (1 + \frac{{}^m P_1}{1} + \frac{{}^m P_2}{1 \cdot 2} + \frac{{}^m P_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots)$$

$$= m - h =$$

$$1 =$$

$$1 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{{}^m P_s}{s!} = h (s) \sum_{s=0}^{\infty} 1$$

وعلى ذلك فإن

وهذا يبين أن $h (s)$ هي دالة توزيع احتمالي و يطلق عليها توزيع بواسون .

والجدول الآتي يعطي قيم ه-م لبعض قيم (م):

م	ه-م	م	ه-م	م	ه-م	م	ه-م
٠	١٠٠٠	١	٢٣٣	٢	١٢٢	٣	٠٤٥
١	٩٠٥	٢	٣٠١	٣	١١١	٤	٠٤١
٢	٨١٩	٣	٢٧٣	٤	١٠٠	٥	٠٣٧
٣	٧٤١	٤	٢٤٧	٥	٩١	٦	٠٣٣
٤	٦٧٠	٥	٢٢٣	٦	٨٢	٧	٠٣٠
٥	٦٠٧	٦	٢٠٢	٧	٧٤	٨	٠٢٧
٦	٥٤٩	٧	١٨٣	٨	٦٧	٩	٠٢٥
٧	٤٩٧	٨	١٦٥	٩	٦١	١٠	٠٢٢
٨	٤٤٩	٩	١٥٠	١٠	٥٥		٠٢٠
٩	٤٠٧	١٠	١٣٥		٥٠		٠١٨
١٠	٣٦٨						

(٣-٤) - بعض خصائص التوزيع:

(أ) متوسط التوزيع $\mu = m$

البرهان

$$\sum_{s=0}^{\infty} s \cdot h(s) =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} s \cdot \frac{m^s \cdot e^{-m}}{s!} =$$

$$= h^{-m} (\text{صفر} + \frac{m}{1!} 1 + \frac{m^2}{2!} 2 + \frac{m^3}{3!} 3 + \frac{m^4}{4!} 4 + \dots)$$

$$= h^{-m} (\frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \frac{m^4}{4!} + \dots)$$

$$= h^{-m} m$$

$$= m$$

(ب) الانحراف المعياري :

يمكن بنفس الأسلوب اثبات أن :

$$\sum_{s=0}^{\infty} s^2 C(s) = \sigma^2$$

$$m =$$

$$\sigma = \sqrt{m}$$

مثال (٦) : إذا كان متوسط عدد الحوادث اليومية على إحدى الطرق هو حادثتين ، فما احتمال وقوع ٣ حوادث في أحد الأيام ؟

الحل

نفرض أن s هي عدد الحوادث اليومية .

متوسط عدد الحوادث اليومية $m = 2$

$$\therefore C(s) = \frac{e^{-m} m^s}{s!} = \frac{e^{-2} 2^s}{s!} \quad \text{حيث } s = 0, 1, 2, \dots$$

من الجدول نجد أن $e^{-2} = 0.135$

$$\therefore C(3) = \frac{e^{-2} 2^3}{3!} = \frac{(0.135) 8}{6}$$

احتمال وقوع ٣ حوادث في أحد الأيام $= C(3) = 0.180$

$$= \frac{(0.135) 8}{6} = 0.180$$

مثال (٧) : إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في إحدى الدول هو ٠.٦ . فاحسب احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين .

الحل

نفرض أن س هي عدد الزلازل السنوية

متوسط عدد الزلازل السنوية = ٠.٦

$$\therefore \text{ح (س)} = \frac{س (٠.٦) - هـ - ٠.٦}{س!} \text{ حيث س} = ٠, ١, ٢, \dots$$

من الجدول نجد أن هـ - ٠.٦ = ٠.٥٤٩

$$\therefore \text{ح (س)} = \frac{س (٠.٦) - ٠.٥٤٩}{س!}$$

احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين = ح (س = ٢)

$$= \frac{(٠.٦)^٢}{٢!} =$$

$$= ٠.٠٩٩$$

مثال (٨) : إذا كان متوسط عدد الحرائق الشهرية في إحدى المدن الكبيرة هو ثلاث حرائق . فما هو احتمال أن يقع في أحد الشهور:

(I) حريقان ؟ (II) حريقان على الأكثر؟ (III) حريقان على الأقل؟

الحل

نفرض أن س هي عدد الحرائق الشهرية في هذه المدينة

متوسط عدد الحرائق الشهرية م = ٣

$$\therefore \text{ح (س)} = \frac{س^٣ - هـ - ٣}{س!} \text{ حيث س} = ٠, ١, ٢, \dots$$

من الجدول نجد أن هـ - ٣ = ٠.٠٥

$$\therefore \text{ح (س)} = \frac{س^٣ - ٠.٠٥}{س!}$$

$$(I) \text{ احتمال وقوع حريقين} = \text{ح (س = ٢)} = \frac{٠.٠٥ \times ٢^٢}{٢!} = ٠.٢٢٥$$

(II) احتمال وقوع حريقين على الأكثر = ح (س ≥ ٢)

$$\begin{aligned}
 &= \text{ح (س = ٠)} + \text{ح (س = ١)} + \text{ح (س = ٢)} \\
 &= \frac{(٣) \cdot (٠.٠٥)}{\text{صفر!}} + \frac{٣ \cdot (٠.٠٥)}{١!} + ٠.٢٢٥ \\
 &= ٠.٠٥٠ + ٠.١٥٠ + ٠.٢٢٥ \\
 &= ٠.٤٢٥
 \end{aligned}$$

(III) احتمال وقوع حريقين على الأقل = ح (س ≤ ٢)

$$\begin{aligned}
 &= ١ - [\text{ح (س = ٠)} + \text{ح (س = ١)}] \\
 &= ١ - (٠.١٥ + ٠.٠٥) \\
 &= ١ - ٠.٢٠ \\
 &= ٠.٨٠
 \end{aligned}$$

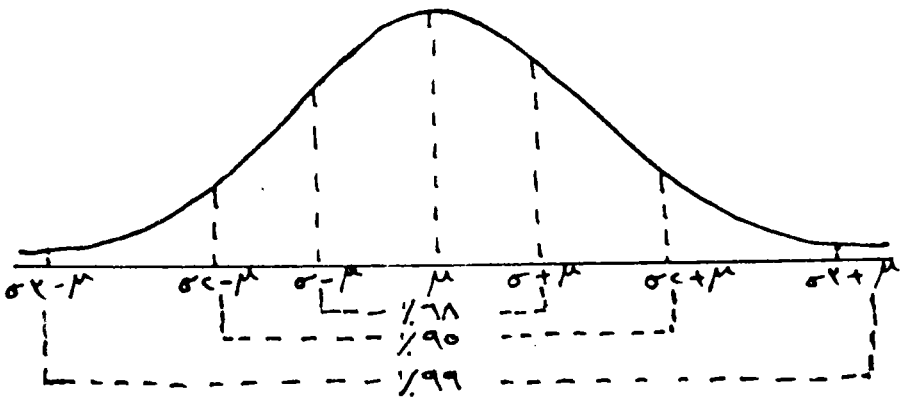
ثالثا: التوزيع الطبيعي:

(٣-٥) - مقدمة:

نعلم من دراستنا السابقة أن المنحنى الطبيعي يعتبر من أهم المنحنيات التكرارية في الإحصاء لأنه يمثل كثيرا من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية مثل الأطوال والأوزان والدخول والدرجات التي يحصل عليها الطلاب وغيرها من الظواهر المستمرة (المتصلة).

ومنحنى التوزيع الطبيعي يشبه الناقوس من حيث الشكل، ومن خصائصه أنه متماثل حول العمود الذي يربقمة هذا المنحنى لذلك فهو يقسمه إلى قسمين متماثلين تماما. كما أن هذا التوزيع يتحدد بمعرفة كل من وسطه (μ) وانحرافه المعياري (σ)، حيث μ هي النقطة التي تتمركز حولها الغالبية العظمى من مفردات التوزيع، σ هو مقياس يبين تشتت أو تباعد المفردات عن بعضها.

ونلاحظ أن جميع مفردات التوزيع الطبيعي تقريبا تنحصر بين $\mu - ٣\sigma$ ، $\mu + ٣\sigma$ وأن ٩٥% من المفردات تنحصر بين $\mu - ٢\sigma$ ، $\mu + ٢\sigma$ تقريبا وأن ٦٨% من المفردات تنحصر بين $\mu - \sigma$ ، $\mu + \sigma$ تقريبا.



فإذا كانت هناك ظاهرة ما (نرمز لقيمتها بالرمز μ) تتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري σ فإن دالة كثافته الاحتمالية هي:

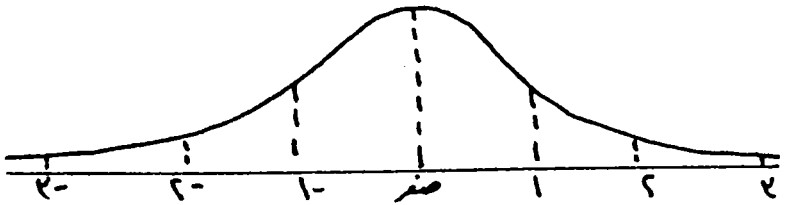
$$d(\mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{حيث } \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

ط : مقدار ثابت

ويمكن حساب احتمال وقوع x في أي مدى نريده وذلك بإيجاد قيمة تكامل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع في هذا المدى، أي إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة داخل هذا المدى. ولتسهيل حساب مثل هذه الاحتمالات لا بد أن نتعرض للتوزيع الطبيعي القياسي.

(٦-٣) - التوزيع الطبيعي القياسي:

هذا التوزيع له نفس خصائص أي توزيع طبيعي إلا أن وسطه $\mu = 0$ وانحرافه المعياري $\sigma = 1$



فإذا كانت x ترمز لقيم متغير يتبع التوزيع الطبيعي القياسي :
فإن دالة كثافته الاحتمالية تكون :

$$d(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

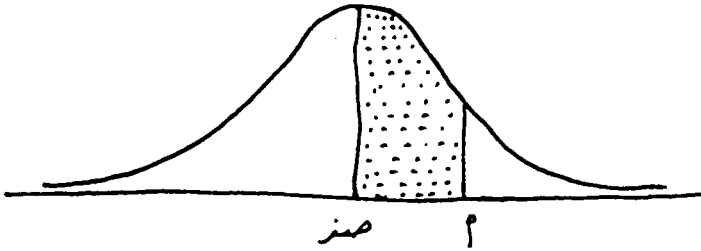
حيث $\sigma > 0, x \in \mathbb{R}$

ويمكن اثبات أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(v) \delta(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1$$

وعملياً فإن الغالبية العظمى لقيم v تقع بين -3 ، $+3$ أو بمعنى آخر فإنه نادراً ما نجد قيمة للمتغير v تقع خارج هذا المدى. ويمكن حساب احتمال وقوع v في أي مدى نريده وذلك بإيجاد قيمة تكامل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع في هذا المدى، أي إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة داخل هذا المدى.

وهناك جداول تعطى احتمالات وقوع المتغير v في مدى معين. فمثلاً يمكن بواسطة هذه الجداول حساب احتمال وقوع v بين 1 ، 2 وتكتب ح ($v_1 \geq v_2$). والجدول الآتي يعطي احتمالات وقوع v بين صفر وأي قيمة أخرى أي يعطي ح ($v \geq 1$).



فإذا رسمنا منحنى متماثلاً وسطه صفر وأخذنا نقطة أعلى المحور الأفقي فيكون ح ($v \geq 0$) هي المساحة المظللة في الشكل. ويمكن الحصول على هذه المساحة (الاحتمال) من الجدول بعد معرفة قيمة أ.

و يلاحظ أن الجدول يعطي المساحة بين نقطة الأصل وقيم أ الموجبة، كما نجد أن أ تبدأ من القيمة صفر وتزداد بمقدار 0.1 حتى تصل إلى 3.09 وهي أعلى قيمة يأخذها المتغير v . ونظراً لأن المنحنى متماثل تماماً حول المستقيم المار بنقطة الأصل (وسط التوزيع $\mu = 0$ صفر) فيمكن استخدام الجدول لإيجاد المساحة المحصورة بين صفر وقيم أ السالبة كما يتضح من الأمثلة الآتية :

جدول التوزيع الطبيعي القياسي

ص	صفر	٠.١	٠.٢	٠.٣	٠.٤	٠.٥	٠.٦	٠.٧	٠.٨	٠.٩
صفر	صفر	٠.٠٤٠	٠.٠٨٠	٠.١٢٠	٠.١٦٠	٠.١٩٩	٠.٢٣٩	٠.٢٧٩	٠.٣١٩	٠.٣٥٩
٠.١	٠.٣٩٨	٠.٤٣٨	٠.٤٧٨	٠.٥١٧	٠.٥٥٧	٠.٥٩٦	٠.٦٣٦	٠.٦٧٥	٠.٧١٤	٠.٧٥٣
٠.٢	٠.٧٩٣	٠.٨٣٢	٠.٨٧١	٠.٩١٠	٠.٩٤٨	٠.٩٨٧	١.٠٢٦	١.٠٦٤	١.١٠٣	١.١٤١
٠.٣	١.١٧٩	١.٢١٧	١.٢٥٥	١.٢٩٣	١.٣٣١	١.٣٦٨	١.٤٠٦	١.٤٤٣	١.٤٨٠	١.٥١٧
٠.٤	١.٥٥٤	١.٥٩١	١.٦٢٨	١.٦٦٤	١.٧٠٠	١.٧٣٦	١.٧٧٢	١.٨٠٨	١.٨٤٤	١.٨٧٩
٠.٥	١.٩١٥	١.٩٥٠	١.٩٨٥	٢.٠١٩	٢.٠٥٤	٢.٠٨٨	٢.١٢٣	٢.١٥٧	٢.١٩٠	٢.٢٢٤
٠.٦	٢.٢٥٧	٢.٢٩١	٢.٣٢٤	٢.٣٥٧	٢.٣٨١	٢.٤٢٢	٢.٤٥٤	٢.٤٨٦	٢.٥١٧	٢.٥٤٩
٠.٧	٢.٥٨٠	٢.٦١١	٢.٦٤٢	٢.٦٧٣	٢.٧٠٤	٢.٧٣٤	٢.٧٦٤	٢.٧٩٤	٢.٨٢٣	٢.٨٥٢
٠.٨	٢.٨٨١	٢.٩١٠	٢.٩٣٩	٢.٩٦٩	٢.٩٩٥	٣.٠٢٣	٣.٠٥١	٣.٠٧٨	٣.١٠٦	٣.١٣٣
٠.٩	٣.١٥٩	٣.١٨٦	٣.٢١٢	٣.٢٣٨	٣.٢٦٤	٣.٢٨٩	٣.٣١٥	٣.٣٤٠	٣.٣٦٥	٣.٣٨٩
١.٠	٣.٤١٣	٣.٤٣٨	٣.٤٦١	٣.٤٨٥	٣.٥٠٨	٣.٥٣١	٣.٥٥٤	٣.٥٧٧	٣.٥٩٩	٣.٦٢١
١.١	٣.٦٤٣	٣.٦٦٥	٣.٦٨٦	٣.٧٠٨	٣.٧٢٩	٣.٧٤٩	٣.٧٧٠	٣.٧٩٠	٣.٨١٠	٣.٨٣٠
١.٢	٣.٨٤٩	٣.٨٦٩	٣.٨٨٨	٣.٩٠٧	٣.٩٢٥	٣.٩٤٤	٣.٩٦٢	٣.٩٨٠	٣.٩٩٧	٤.٠١٥
١.٣	٤.٠٣٢	٤.٠٤٩	٤.٠٦٦	٤.٠٨٢	٤.٠٩٩	٤.١١٥	٤.١٣١	٤.١٤٧	٤.١٦٢	٤.١٧٧
١.٤	٤.١٩٢	٤.٢٠٧	٤.٢٢٢	٤.٢٣٦	٤.٢٥١	٤.٢٦٥	٤.٢٧٩	٤.٢٩٢	٤.٣٠٦	٤.٣١٩
١.٥	٤.٣٣٢	٤.٣٤٥	٤.٣٥٧	٤.٣٧٠	٤.٣٨٢	٤.٣٩٤	٤.٤٠٦	٤.٤١٨	٤.٤٢٩	٤.٤٤١
١.٦	٤.٤٥٢	٤.٤٦٣	٤.٤٧٤	٤.٤٨٤	٤.٤٩٥	٤.٥٠٥	٤.٥١٥	٤.٥٢٥	٤.٥٣٥	٤.٥٤٥
١.٧	٤.٥٥٤	٤.٥٦٤	٤.٥٧٣	٤.٥٨٢	٤.٥٩١	٤.٥٩٩	٤.٦٠٨	٤.٦١٦	٤.٦٢٥	٤.٦٣٣
١.٨	٤.٦٤١	٤.٦٤٩	٤.٦٥٦	٤.٦٦٤	٤.٦٧١	٤.٦٧٨	٤.٦٨٦	٤.٦٩٣	٤.٦٩٩	٤.٧٠٦
١.٩	٤.٧٣١	٤.٧٣٦	٤.٧٣٦	٤.٧٣٢	٤.٧٣٨	٤.٧٤٤	٤.٧٥٠	٤.٧٥٦	٤.٧٦١	٤.٧٧٦
٢.٠	٤.٧٧٢	٤.٧٧٨	٤.٧٨٣	٤.٧٨٨	٤.٧٩٣	٤.٧٩٨	٤.٨٠٣	٤.٨٠٨	٤.٨١٢	٤.٨١٧

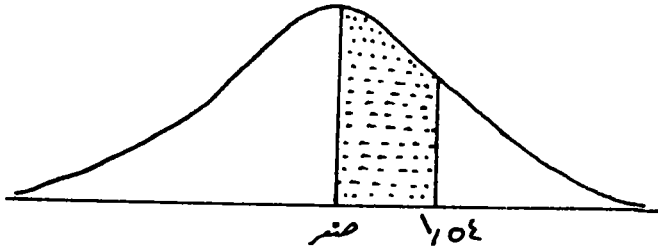
ص	صفر	٠.١	٠.٢	٠.٣	٠.٤	٠.٥	٠.٦	٠.٧	٠.٨	٠.٩
٢١	٤٨٢١	٤٨٢٦	٤٨٣٠	٤٨٣٤	٤٨٣٨	٤٨٤٢	٤٨٤٦	٤٨٥٠	٤٨٥٤	٤٨٥٧
٢٢	٤٨٦١	٤٨٦٤	٤٨٦٨	٤٨٧١	٤٨٧٥	٤٨٧٨	٤٨٨١	٤٨٨٤	٤٨٨٨	٤٨٩٠
٢٣	٤٨٩٣	٤٨٩٦	٤٨٩٨	٤٩٠١	٤٩٠٤	٤٩٠٦	٤٩٠٩	٤٩١١	٤٩١٠	٤٩١٦
٢٤	٤٩١٨	٤٩٢٠	٤٩٢٢	٤٩٢٥	٤٩٢٧	٤٩٢٩	٤٩٣١	٤٩٣٢	٤٩٣٤	٤٩٣٦
٢٥	٤٩٣٨	٤٩٤٠	٤٩٤١	٤٩٤٣	٤٩٤٥	٤٩٤٦	٤٩٤٨	٤٩٤٩	٤٩٥١	٤٩٥٢
٢٦	٤٩٥٣	٤٩٥٥	٤٩٥٦	٤٩٥٧	٤٩٥٩	٤٩٦٠	٤٩٦١	٤٩٦٢	٤٩٦٣	٤٩٦٤
٢٧	٤٩٦٥	٤٩٦٦	٤٩٦٧	٤٩٦٨	٤٩٦٩	٤٩٧٠	٤٩٧١	٤٩٧٢	٤٩٧٣	٤٩٧٤
٢٨	٤٩٧٤	٤٩٧٥	٤٩٧٦	٤٩٧٧	٤٩٧٧	٤٩٧٨	٤٩٧٩	٤٩٧٩	٤٩٨٠	٤٩٨١
٢٩	٤٩٨١	٤٩٨٢	٤٩٨٢	٤٩٨٣	٤٩٨٤	٤٩٨٤	٤٩٨٥	٤٩٨٥	٤٩٨٦	٤٩٨٦
٣٠	٤٩٨٧	٤٩٨٧	٤٩٨٧	٤٩٨٨	٤٩٨٨	٤٩٨٩	٤٩٨٩	٤٩٨٩	٤٩٩٠	٤٩٩٠

مثال (٩): إذا كان ص متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي القياسي ($\mu = ٥٠, \sigma = ١$) فأوجد:

- (أ) $ح (٠ \leqslant ص \leqslant ١٠٥٤)$
- (ب) $ح (ص \leqslant ١٢٥)$
- (ج) $ح (١ \leqslant ص \leqslant ٢)$
- (د) $ح (-١٨ \leqslant ص \leqslant \text{صفر})$
- (هـ) $ح (ص \leqslant -١٢)$
- (و) $ح (-٢ \leqslant ص \leqslant -١)$
- (ز) $ح (-١ \leqslant ص \leqslant ١٢٨)$

الحل

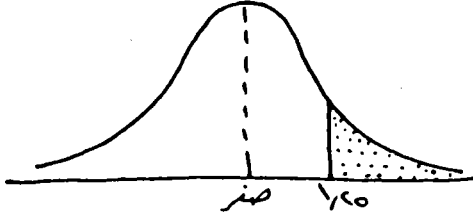
(أ) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة ١٠٥٤ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب - المساحة المظللة في الشكل.



ويمكن الحصول على هذه المساحة من الجدول مباشرة بالبحث عن القيمة التي تناظر ١٥ في العمود الأول وأسفل ٠.٤

$$\text{وعلى ذلك يكون ح (} 0 < V < 1.054 \text{)} = 0.4382$$

(ب) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة ١.٢٥ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب - المساحة المظلمة في الشكل .



ونلاحظ أن الجدول لا يعطي هذه المساحة مباشرة ولكن يمكن الحصول عليها بملاحظة الآتي :

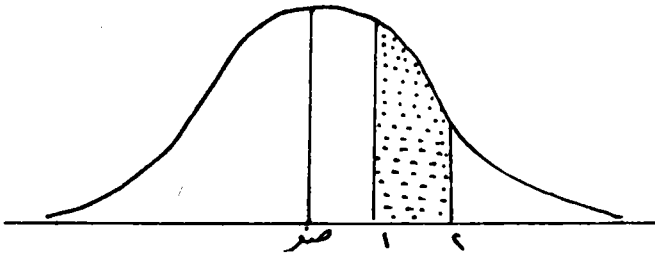
$$\text{ح (} V \leq 1.25 \text{)} = 0.8950 - \text{ح (} 0 < V < 1.25 \text{)}$$

والجدول يعطي قيمة ح ($0 < V < 1.25$) مباشرة وبالتعويض بقيمتها نحصل على المطلوب، أي أن :

$$\text{ح (} V \leq 1.25 \text{)} = 0.8950 - 0.4382$$

$$= 0.4568$$

(ج) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط، ١، ٢ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب هو المساحة المظلمة .



ولكن الجدول لا يعطي هذه المساحة مباشرة، ولكن يمكن الحصول عليها بملاحظة الآتي :

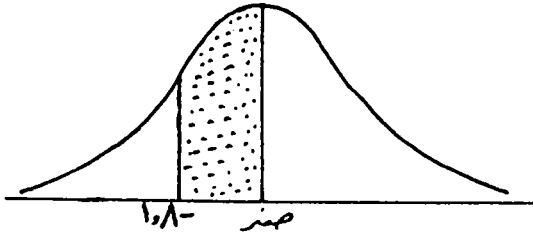
$$\text{ح (} 1 < V < 2 \text{)} = \text{ح (} 0 < V < 2 \text{)} - \text{ح (} 0 < V < 1 \text{)}$$

(من الجدول مباشرة)

$$0.3413 - 0.4772 =$$

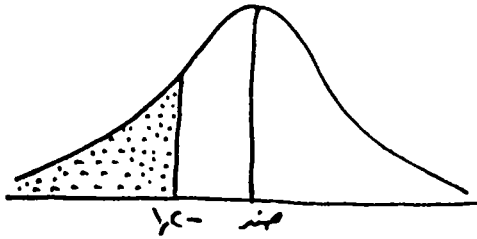
$$0.1359 =$$

(د) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة - ١.٨ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب - المساحة المظللة في الشكل .



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتمائل المنحنى فإن ح (-)
 $1.8 \geq ص \geq صفر$ = ح (صفر \geq ص)
 = ٠.٤٦٤١ من الجدول مباشرة

(هـ) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة - ١.٢ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب - المساحة المظللة في الشكل



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتمائل المنحنى .

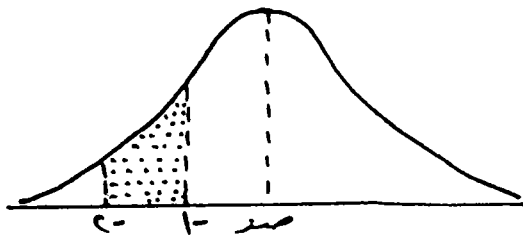
$$ح(ص \geq -1.2) = ح(ص \leq 1.2)$$

$$= ح(صفر \geq ص \geq 1.2)$$

$$= ح(صفر - 1.2 \leq ص \leq 1.2) = 0.3849$$

$$= 0.1151$$

(و) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط - ١ ، - ٢ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب - المساحة المظللة في الشكل .



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتمائل المنحنى فإن

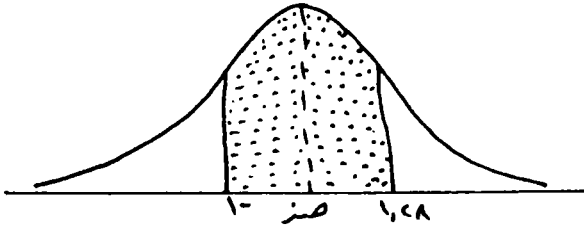
$$ح (٢ - \geq ص \geq ١) = ح (١ - \geq ص \geq ٠)$$

$$ح (١ \geq ص \geq ٠) - ح (٢ \geq ص \geq ٠) =$$

$$٠.٤٧٧٢ - ٠.٣٤١٣ =$$

$$٠.١٣٥٩ =$$

(ز) (نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط - ١، ١.٢٨ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب - المساحة المظللة في الشكل .



وهذه المساحة تساوي ح (١ - \geq ص \geq صفر) + ح (صفر \geq ص \geq ١.٢٨)

$$ح (صفر \geq ص \geq ١) + ح (صفر \geq ص \geq ١.٢٨) =$$

$$٠.٣٩٩٧ + ٠.٣٤١٣ =$$

$$٠.٧٤١٠ =$$

(٣-٧) - حساب الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي العادي :

إذا كانت س تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه μ وانحرافه المعياري σ وأردنا حساب أي احتمال حول المتغير س، فإننا نحوله أولا إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع $ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$ حيث أن الجداول التي تعطي المساحة هي الجداول الخاصة بالتوزيع القياسي فقط. فلحساب $(٢ \geq ص \geq ١)$ مثلا فإن هذا الاحتمال يساوي

$$c \left(\frac{\mu - b}{\sigma} \geq v \geq \frac{\mu - a}{\sigma} \right)$$

والأمثلة الآتية توضح طريقة الحل:

مثال (١٠): إذا كان أطوال طلاب الجامعة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٦٨ سم وانحرافه المعياري ٦ سم. اخترنا عشوائيا أحد الطلبة، ما احتمال أن يكون طوله:

- (أ) أكبر من ١٨٤ سم.
 (ب) أقل من ١٥٦ سم.
 (ج) ينحصر بين ١٦٥، ١٧٤ سم.

الحل

بفرض أن s ترمز لأطوال الطلاب
 s تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه ١٦٨ سم وانحرافه المعياري ٦ سم

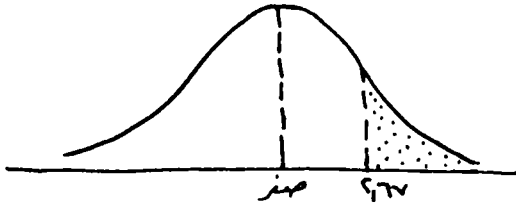
$$\text{وبوضع } v = \frac{168 - s}{6}$$

∴ v تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا:

$$(أ) \text{ ح } (s \leq 184):$$

عندما $s = 184$ فإن

$$\therefore v = \frac{168 - 184}{6} = \frac{-16}{6} = -2.67$$



وعلى ذلك:

$$\therefore \text{ح } (s \leq 184) = \text{ح } (v \leq -2.67)$$

$$= \text{ح } (0 \leq v \leq 2.67) - \text{ح } (v \geq 2.67)$$

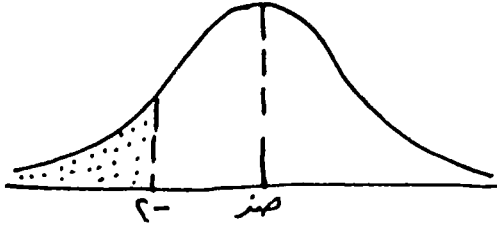
$$= 0.9962 - \text{ح } (v \geq 2.67)$$

$$= 0.9962 - 0.0038$$

(ب) ح (س \geq ١٥٦) :

عندما س = ١٥٦ فان

$$ص = \frac{١٦٨ - ١٥٦}{٦} = \frac{١٢}{٦} = ٢ -$$



وعلى ذلك:

$$ح (س \geq ١٥٦) = ح (ص \geq ٢ -)$$

$$= ٥٠ - ح (٠ \leq ص \leq ٢)$$

$$= ٥٠ - ٠٤٧٧٢$$

$$= ٠٠٢٢٨$$

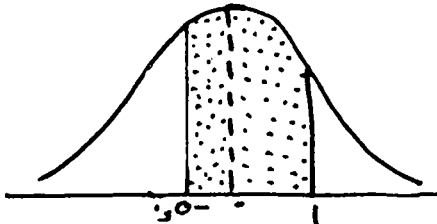
(ج) ح (١٦٥ \leq س \leq ١٧٤) :

عندما س = ١٦٥ فان

$$ص = \frac{١٦٨ - ١٦٥}{٦} = \frac{٣}{٦} = ٠٥ -$$

، عندما س = ١٧٤ فان

$$\therefore ص = \frac{١٦٨ - ١٧٤}{٦} = ١ -$$



وعلى ذلك:

$$\begin{aligned} \text{ح (١٦٥ } \geq \text{ س } \geq \text{ ١٧٤)} &= \text{ح (- ٥٥ } \geq \text{ ص } \geq \text{ ١)} \\ \text{ح (- ٥٥ } \geq \text{ ص } \geq \text{ ٠)} &+ \text{ح (١ } \geq \text{ ص } \geq \text{ ١)} \\ \text{ح (صفر } \geq \text{ ص } \geq \text{ ٠)} &+ \text{ح (٠ } \geq \text{ ص } \geq \text{ ١)} \\ &= ١٩١٥ \text{ ر} + ٣٤١٣ \text{ ر} \\ &= ٥٣٢٨ \text{ ر} \end{aligned}$$

مثال (١١): إذا كان دخل ٨٠٠ أسرة في مدينة جدة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٨٠٠ ريال وانحرافه المعياري ٣٠٠ ريال. فأوجد:

- (أ) احتمال الحصول على دخل أكبر من ١٥٠٠ ريال.
- (ب) احتمال الحصول على دخل أكبر من ٢٤٠٠ ريال.
- (ج) احتمال الحصول على دخل ينحصر بين ١٦٥٠، ٢٢٥٠ ريالا.
- (د) احتمال الحصول على دخل يقل عن ١٢٠٠ ريال.
- (هـ) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال.

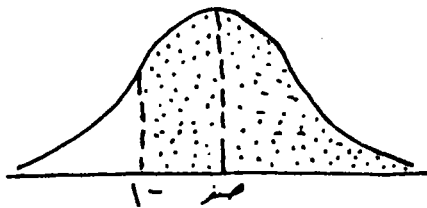
الحل

بفرض أن س ترمز لدخول الأسر.
س تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه ١٨٠٠ ريالا وانحرافه المعياري ٣٠٠ ريال.
ووضع ص = $\frac{س - ١٨٠٠}{٣٠٠}$ فإن ص تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا.

$$\therefore \text{ح (أ) ح (س } \leq \text{ ١٥٠٠)}$$

عندما س = ١٥٠٠ فان

$$ص = \frac{١٥٠٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠} = \frac{-٣٠٠}{٣٠٠} = -١$$



$$\therefore \text{ح (س} \leq 1500) = \text{ح (ص} \leq 1)$$

$$= \text{مر} + \text{ح} (1 - \text{ص} \geq 0) \quad (\text{ص} \geq 0)$$

$$= \text{مر} + \text{ح} (0 \leq \text{ص} \leq 1)$$

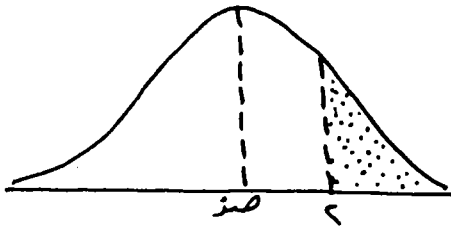
$$= \text{مر} + 0.2413$$

$$= 0.8413$$

$$\therefore \text{ح (ب) (س} \leq 2400) :$$

عندما $s = 2400$ فان

$$z = \frac{1800 - 2400}{300} = -2$$



$$\therefore \text{ح (س} \leq 2400) = \text{ح (ص} \leq 2)$$

$$= \text{مر} - \text{ح} (0 \leq \text{ص} \leq 2)$$

$$= \text{مر} - 0.4772$$

$$= 0.228$$

$$\therefore \text{ح (ج) (س} \geq 1650) = \text{ح (ص} \geq 2250)$$

عندما $s = 1650$ فان

$$z = \frac{1800 - 1650}{300} = \frac{150}{300} = 0.5$$

وعندما $s = 2250$ فان

$$z = \frac{1800 - 2250}{300} = \frac{-450}{300} = -1.5$$

$$\therefore \text{ح (د) (س} \geq 1650) = \text{ح (ص} \geq 1.5) = \text{مر} - \text{ح} (0 \leq \text{ص} \leq 1.5)$$

$$ح = (- ٥ر \geq ص \geq \text{صفر})$$

$$ح + (٥ر \geq ص \geq ٠)$$

$$ح = (\text{صفر} \geq ص \geq ٥ر)$$

$$ح + (٥ر \geq ص \geq ٠)$$

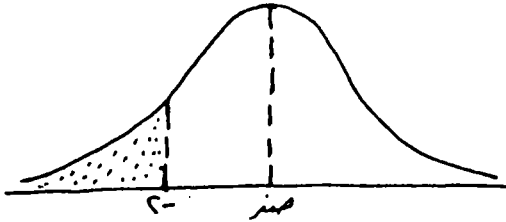
$$= ٤٣٣٢ر + ١٩١٥ر$$

$$= ٠.٦٢٤٧$$

$$(د) ح (س \geq ١٢٠٠) :$$

عندما س = ١٢٠٠ فان

$$ص - ٢ = \frac{٦٠٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠} = \frac{١٨٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} = ص$$



$$\therefore ح (س \geq ١٢٠٠) = ح (ص \geq ٢ -)$$

$$= ٠.٥ - ح (- ٢ \geq ص \geq \text{صفر})$$

$$= ٠.٥ - ح (\text{صفر} \geq ص \geq ٢)$$

$$= ٠.٥ - ٠.٤٧٧٢$$

$$= ٠.٠٢٢٨$$

(هـ) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال :

لإيجاد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال، نوجد احتمال الحصول على دخل أكبر من ١٥٠٠ ريال ونضربه في عدد الأسر فنحصل على المطلوب.

$$\text{وحيث أن } ح (س \leq ١٥٠٠) = ٠.٨٤١٣$$

من المطلوب (أ)

∴ عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال = $٠.٨٤١٣ \times ٨٠٠ =$

$$= ٦٧٣.٠٤$$

$$= ٦٧٣ أسرة .$$

رابعا: توزيع ت:

(٣-٨) - مقدمة:

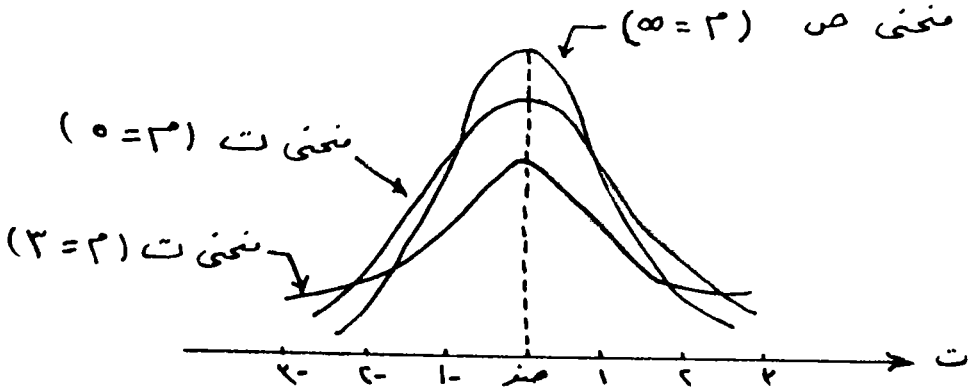
في الكثير من الدراسات الإحصائية وخاصة تلك المتعلقة بتحليل نتائج العينات الصغيرة تظهر الحاجة إلى استخدام توزيع احتمالي جديد يشبه في شكله إلى حد ما شكل التوزيع الطبيعي الفياضي (ص) وإن كان يختلف عنه كثيرا. هذا التوزيع الجديد يسمى توزيع «ت» وهو من التوزيعات الاحتمالية المهمة الكثيرة الاستعمال في الدراسات الاحصائية. ويرجع الفضل في اشتقاق هذا التوزيع إلى العالم الأيرلندي و. س. جوسيت (W. S. Gosset) الذي نشر بحثا في عام ١٩٠٨م اشتق فيه الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع ونظرا لظروف خاصة لم ينشر البحث باسمه ولهذا تحايل على ذلك بنشره تحت اسم مستعار ورمز لهذا التوزيع بالرمز «ت - T».

وكما سبق أن ذكرنا أن منحني توزيع «ت» مشابه إلى حد ما منحني التوزيع الطبيعي القياسي «ص» فكلاهما متماثل حول الصفر أي أن لهما نفس المتوسط وهو صفر كما أن كلاهما له شكل ناقوس وكلاهما يأخذ قيما عديدة تتراوح بين $-∞$ و $+∞$ ولكنهما يختلفان في بعض الخصائص - فمثلا تباين التوزيع الطبيعي القياسي مقدار ثابت و يساوي الواحد الصحيح، بينما توزيع (ت) نجد أن تباينه يساوي $\frac{٣}{٢-٢}$ حيث أن م مقدار ثابت يسمى درجات الحرية (وسوف نرى أن م = ن - ١ حيث أن «ن» هي حجم العينة وذلك عندما نتكلم عن تحليل العينات الصغيرة في الباب السادس).

نلاحظ أن تباين توزيع (ت) دائما أكبر من الواحد الصحيح لأن البسط = م والمقام = م - ٢ فدائما البسط أكبر من المقام - لهذا فان منحني توزيع (ت) أكثر تشتتا من منحني التوزيع الطبيعي القياسي - وكلما كبرت م كلما اقترب منحني توزيع (ت) من المنحني الطبيعي القياسي حتى أنه عندما تصبح «م» كبيرة جدا (أي تقترب من $∞$) نجد أن منحني (ت) ينطبق تماما على المنحني الطبيعي القياسي .

مما سبق يتضح أن منحني (ت) يتغير تبعا لتغير الثابت «م» المسمى بدرجات الحرية - لهذا نجد أنه لكل قيمة من قيم «م» يوجد منحني معين للمتغير (ت) وفي الشكل التالي نرسم عدة منحنيات للمتغير (ت) عندما م = ٣، م = ٥، م = ٥٥ أي م تؤول إلى $∞$ بالمقارنة مع منحني

المتغير الطبيعي القياسي «ص» وسنكتفي في هذه المرحلة بتقديم شكل منحني توزيع (ت) دون تقديم صيغته الرياضية نظرا لصعوبتها في هذه المرحلة من الدراسة .



يتضح من الشكل السابق تماثل كل المنحنيات حول الصفر ولكن كلما كبرت «م» كلما زاد ارتفاع قمة المنحنى وأصبح أكثر تدبياً أي أقل تشتتاً، وفي النهاية عندما تصبح $(م = \infty)$ ينطبق المنحنى على منحنى التوزيع الطبيعي القياسي (ص).

٩-٣- استخدام جداول توزيع «ت»:

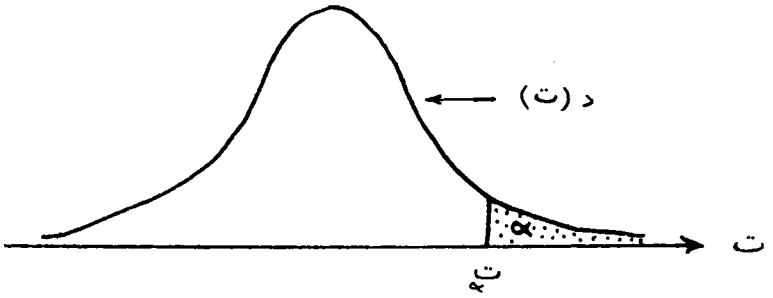
لحساب أي احتمالات حول المتغير «ت» يلزمنا وجود جدول يبين المساحات المختلفة تحت منحنى الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع د (ت) والمحصورة بين أي قيمتين من قيم المتغير «ت» كما هو الحال في جداول التوزيع الطبيعي القياسي، ولكن كما نعلم فإنه لكل قيمة من قيم (م) يوجد منحنى للدالة د (ت). وهذا يعني أنه يلزمنا جدول خاص بكل قيمة من قيم (م) وهذه عملية صعبة طويلة وحيث أن الاستخدامات الإحصائية لتوزيع (ت) تعتمد على معرفة قيم المتغير (ت) التي تحصر على يمينها احتمالات معينة ثابتة - فيمكن اعتبار (ت) أنها إحدى قيم المتغير (ت) التي تحصر على يمينها مساحة معينة قدرها α فيكون المطلوب هو معرفة قيمة (ت) بحيث يكون:

$$ح (ت) < \alpha =$$

وهذا ينص على أن:

احتمال أن المتغير العشوائي (ت) أكبر من القيمة (ت) يساوي α كما هو مبين في الشكل

الآتي:



وتصبح المسألة هي إيجاد قيم $(ت)$ التي تحصر على يمينها مساحة معينة قدرها « α » وبهذه الطريقة يمكن عمل جدول واحد يعطي قيم $(ت)$ التي تناظر الاحتمال « α » لدرجات الحرية المختلفة.

ولما كانت الاحتمالات الشائعة الاستخدام هي :-

$$\alpha = (0.0005, 0.001, 0.0025, 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.25, 0.4, 0.5)$$

لهذا فإن الجدول يعطي قيم $(ت)$ التي تقابل هذه الاحتمالات لكل درجات الحرية م من ١ إلى ٢٩ وكذلك عندما م = ٣٠، ٤٠، ٦٠، ١٢٠، ∞ و يوضح رأس الجدول قيم (α) المختلفة كما يوضح العمود الأول درجات الحرية المختلفة أما محتويات الجدول هي قيم $(ت)$.

جدول توزيع (ت)

م	α =	٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠
١	٦٣٦٦٦٢	٣١٨٢٣١	١٢٧٢٣٢	٦٣٦٦٥٧	٣١٨٢١٦	١٢٧٢٠٦	٦٣٦١٤	٣٠٧٨	١٠٠٠	٠٣٢٥
٢	٣١٥٥٩٨	٢٢٢٢٢٦	١٤٠٠٨٩	٩٩٢٥	٦٩٦٥	٤٣٠٣	٢٩٢٠	١٨٨٦	٠٨١٦	٠٢٨٩
٣	١٢٩٢٤	١٠٠٢١٣	٧٤٥٣	٥٨٤١	٤٥٤١	٣١٨٢	٢٣٥٣	١٦٢٨	٠٧٦٥	٠٢٧٧
٤	٨٦١٠	٧١٧٣	٥٥٩٨	٤٦٠٤	٣٧٤٧	٢٧٧٦	٢١٣٢	١٥٣٣	٠٧٤١	٠٢٧١
٥	٦٨٦٩	٥٨٩٣	٤٧٧٣	٤٠٣٢	٣٣٦٥	٢٥٧١	٢٠١٥	١٤٧٦	٠٧٢٧	٠٢٦٧
٦	٥٩٥٩	٥٢٠٨	٤٣١٧	٣٧٠٧	٣١٤٣	٢٤٤٧	١٩٤٣	١٤٤٠	٠٧١٨	٠٢٦٥
٧	٥٤٠٨	٤٧٨٥	٤٠٢٩	٣٤٩٩	٢٩٩٨	٢٣٦٥	١٨٩٥	١١٤٥	٠٧١١	٠٢٦٣
٨	٥٠٤١	٤٥٠١	٣٨٣٣	٣٣٥٥	٢٩٨٦	٢٣٠٦	١٨٦٠	١٣٩٧	٠٧٠٦	٠٢٦٢
٩	٤٧٨١	٤٢٩٧	٣٦٩٠	٣٢٥٠	٢٨٢١	٢٢٦٢	١٨٣٣	١٣٨٦	٠٧٠٣	٠٢٦١
١٠	٤٥٨٧	٤١٤٤	٣٥٨١	٣١٦٩	٢٧٤٦	٢٢٢٨	١٨١٢	١٣٧٢	٠٧٠٠	٠٢٦٠
١١	٤٤٣٧	٤٠٢٥	٣٣٩٧	٣١٠٦	٢٧١٨	٢٢٠١	١٧٩٦	١٣٦٣	٠٦٩٧	٠٢٦٠
١٢	٤٣١٨	٣٩٣٠	٣٤٢٨	٣٠٥٥	٢٦٨١	٢١٧٩	١٧٨٢	١٣٥٦	٠٦٩٥	٠٢٥٩
١٣	٤٢٢١	٣٨٥٢	٣٣٧٢	٣٠١٢	٢٦٥٠	٢١٦٠	١٧٧١	١٣٥٠	٠٦٩٤	٠٢٥٩
١٤	٤١٤٠	٣٧٨٧	٣٣٢٦	٢٩٧٧	٢٦٤٢	٢١٤٥	١٧٦١	١٣٤٥	٠٦٩٢	٠٢٥٨
١٥	٤٠٧٣	٣٧٣٣	٣٢٨٦	٢٩٤٧	٢٦٠٢	٢١٣١	١٧٥٣	١٣٤١	٠٦٩١	٠٢٥٨
١٦	٤٠١٥	٣٦٨٦	٣٢٥٢	٢٩٢١	٢٥٨٣	٢١٢٠	١٧٤٦	١٣٣٧	٠٦٩٠	٠٢٥٨
١٧	٣٩٦٥	٣٦٤٦	٣٢٢٢	٢٨٩٨	٢٥٦٧	٢١١٠	١٧٤٠	١٣٣٣	٠٦٨٩	٠٢٥٧
١٨	٣٩٢٢	٣٦١٠	٣١٩٧	٢٨٧٨	٢٥٥٢	٢١٠١	١٧٣٤	١٣٣٠	٠٦٨٨	٠٢٥٧
١٩	٣٨٨٣	٣٥٧٩	٣١٧٤	٢٨٦١	٢٥٣٩	٢٠٩٣	١٧٢٩	١٣٢٨	٠٦٨٨	٠٢٥٧

بقية جدول توزيع (ت)

م	٠٠٥	٠٠١	٠٠٢٥	٠٠٥	٠٠١	٠٠٥	٠٠٢٥	٠٠١	٠٠٥	م
٢٠	٢٣٨٥٠	٢٣٥٥٢	٢٣١٥٣	٢٣٨٤٥	٢٣٥٢٨	٢٣٠٨٦	١٧٢٥	١٣٢٢٥	٠٦٨٧	٠٢٥٧
٢١	٢٣٨١٩	٢٣٥٢٧	٢٣١٣٥	٢٣٨٣١	٢٣٥١٨	٢٣٠٨٠	١٧٢٢١	١٣٢٢٣	٠٦٨٦	٠٢٥٧
٢٢	٢٣٧٩٢	٢٣٥٠٥	٢٣١١٩	٢٣٨١٩	٢٣٥٠٨	٢٣٠٧٤	١٧١٧	١٣٢٢١	٠٦٨٦	٠٢٥٦
٢٣	٢٣٧٦٧	٢٣٤٨٥	٢٣١٠٤	٢٣٨٠٧	٢٣٥٠٠	٢٣٠٦٩	١٧١٤	١٣٢١٩	٠٦٨٥	٠٢٥٦
٢٤	٢٣٧٤٥	٢٣٤٦٧	٢٣٠٩١	٢٣٧٩٧	٢٣٤٩٢	٢٣٠٦٤	١٧١١	١٣٢١٨	٠٦٨٥	٠٢٥٦
٢٥	٢٣٧٢٥	٢٣٤٥٠	٢٣٠٧٨	٢٣٧٨٧	٢٣٤٨٥	٢٣٠٦٠	١٧٠٨	١٣٢١٦	٠٦٨٤	٠٢٥٦
٢٦	٢٣٧٠٧	٢٣٤٣٥	٢٣٠٦٧	٢٣٧٧٩	٢٣٤٧٩	٢٣٠٥٨	١٧٠٦	١٣٢١٥	٠٦٨٤	٠٢٥٦
٢٧	٢٣٦٩٠	٢٣٤٢١	٢٣٠٥٧	٢٣٧٧١	٢٣٤٧٣	٢٣٠٥٢	١٧٠٣	١٣٢١٤	٠٦٨٤	٠٢٥٦
٢٨	٢٣٦٧٤	٢٣٤٠٨	٢٣٠٤٧	٢٣٧٦٣	٢٣٤٦٧	٢٣٠٤٨	١٧٠١	١٣٢١٣	٠٦٨٣	٠٢٥٦
٢٩	٢٣٦٥٩	٢٣٣٩٦	٢٣٠٣٨	٢٣٧٥٦	٢٣٤٦٢	٢٣٠٤٥	١٦٩٩	١٣٢١١	٠٦٨٣	٠٢٥٦
٣٠	٢٣٦٤٦	٢٣٣٨٥	٢٣٠٣٠	٢٣٧٥٠	٢٣٤٥٧	٢٣٠٤٢	١٦٩٧	١٣٢١٠	٠٦٨٣	٠٢٥٦
٤٠	٢٣٥٥١	٢٣٣٠٧	٢٢٩٧١	٢٣٧٠٤	٢٣٤٢٣	٢٣٠٢١	١٦٨٤	١٣٢٠٣	٠٦٨١	٠٢٥٥
٦٠	٢٣٤٦٠	٢٣٢٢٢	٢٢٩١٥	٢٣٦٦٠	٢٣٣٩٠	٢٣٠٠٠	١٦٧١	١٣٢٩٦	٠٦٧٩	٠٢٥٤
١٢٠	٢٣٣٧٣	٢٣١٦٠	٢٢٨٦٠	٢٣٦١٧	٢٣٣٥٨	١٩٨٠	١٦٥٨	١٣٢٨٩	٠٦٧٧	٠٢٥٤
∞	٢٣٢٩١	٢٣٠٩٠	٢٢٨٠٧	٢٣٥٧٦	٢٣٣٢٦	١٩٦٠	١٦٤٥	١٣٢٨٢	٠٦٧٤	٠٢٥٣

فيما يلي نعطي بعض الأمثلة التي توضح كيفية استخدام الجدول :

مثال (١٢) : أوجد ما يلي :

١- قيمة t التي تجعل ح (ت) = ٠.٢٥ علما بأن درجات الحرية م = ١٠

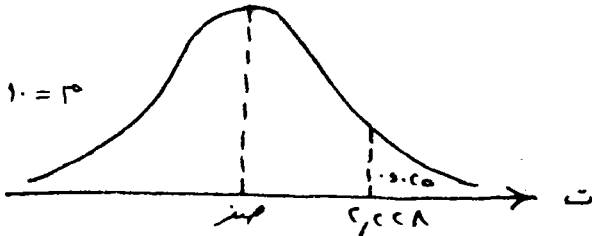
٢- ح ($t_{٩٧٥} > t > t_{٥}^{٠.٠٥}$)

٣- قيمة t التي تجعل ح ($t > t_{١} - t_{١٧٦١} > ٠.٤٥$)

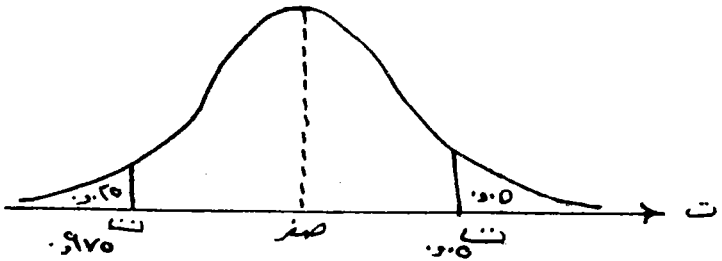
الحل

١- بالبحث في جدول t عند درجات الحرية $m = 10$ وأسفل الاحتمال $\alpha = 0.025$ نجد أن قيمة t من الجدول هي 2.228 وعلى هذا نجد أن:

$$t = 2.228 = t_{0.025}$$



٢- برسم $D(t)$ وتحديد النقطتين $t_{0.975}$ ، $t_{0.025}$ لتحديد المساحة المطلوبة .



من الرسم يتضح أن المساحة يسار النقطة $t_{0.975}$ هي 0.025 والمساحة يمين النقطة $t_{0.025}$ هي 0.05 إذن المساحة المحصورة بينهما هي باقي المساحة الكلية أي تساوي:

$$0.925 = 1 - (0.05 + 0.025)$$

$$\therefore \text{ح } (t_{0.975} \leq t \leq t_{0.025}) = 0.925$$

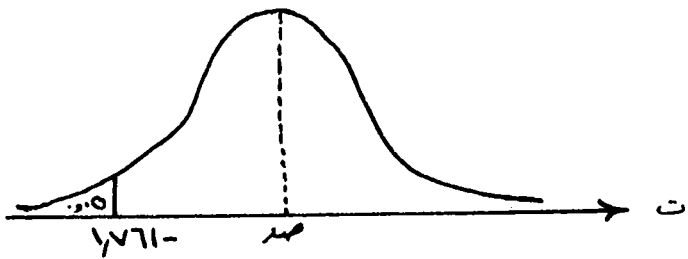
وهذه صحيحة لجميع درجات الحرية.

٣- بالبحث داخل جدول t عن القيمة 1.761 أمام درجات الحرية $m = 14$ نجد هذا الرقم أسفل الاحتمال $\alpha = 0.05$

$$\therefore \text{ح } (t < 1.761) = 0.05$$

ومن خاصية تماثل منحنى الدالة $D(t)$ نجد أن المساحة على يسار النقطة 1.761 تساوي

كذلك 0.05

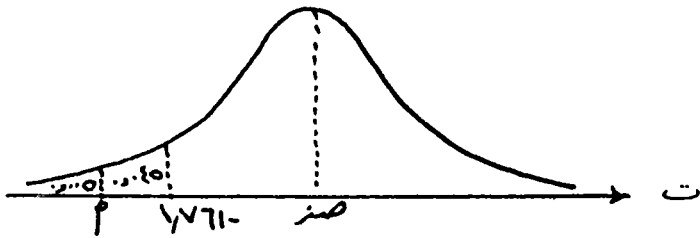


وبما أن $P(T \geq 1761) = 0.045$

إذن قيمة أتقع على يسار النقطة (١٧٦١-) والمساحة بينهما ٠.٠٤٥

ولكن المساحة يسار النقطة (١٧٦١-) تساوي ٠.٠٥

إذن المساحة يسار النقطة أتساوي ٠.٠٥ - ٠.٠٤٥ = ٠.٠٥٥ و يتضح ذلك من الرسم التالي:



من التماثل توجد نقطة تناظر أتماما ولكن في الجانب الموجب من محور وتكون المساحة بين هذه

النقطة تساوي ٠.٠٥٥ وهذه النقطة تساوي أ في القيمة العددية وتختلف عنها في الإشارة -

وبالبحث في جدول ت أمام درجات الحرية $m = 14$ وأسفل الاحتمال $\alpha = 0.005$ ونجد أن

هذه النقطة هي ٢٩٧٧ وبما أن هذه النقطة تساوي أ عدديا وتختلف عنها في الإشارة فتكون قيمة أ =

٢٩٧٧.

إذن $P(T > 2977) = 0.045$

خامسا: توزيع كا^٢:

(٣-١٠) - مقدمة:

يعتبر التوزيع الذي نحن بصدد دراسته الآن والذي نرمز له بالرمز كا^٢ من التوزيعات

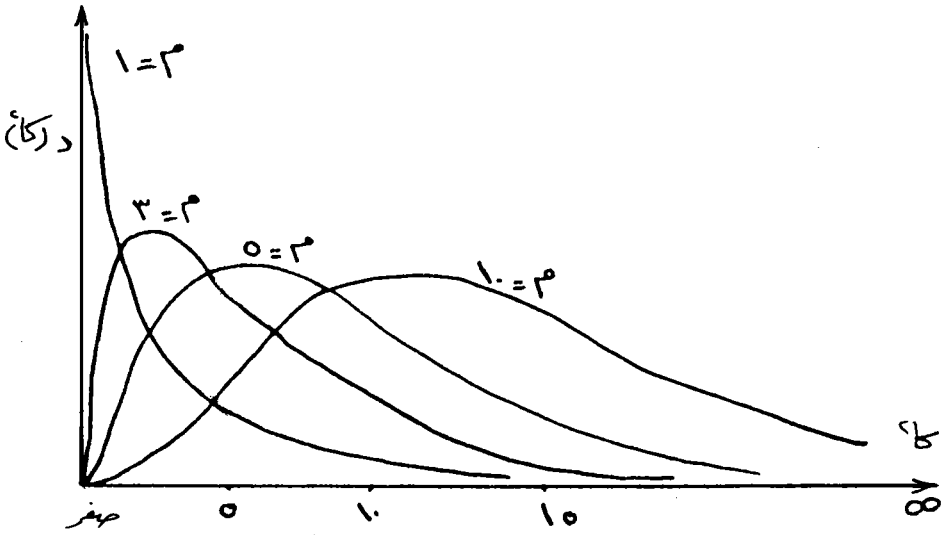
الاحتمالية المهمة التي نحتاج إليها في الكثير من الدراسات الإحصائية، ولن نتناول بالدراسة

الصيغة الرياضية لهذا التوزيع د (كا^٢) ولكن سنكتفي بفهم طبيعة وشكل هذا التوزيع وذلك برسم

المنحنى الذي يمثله وكذلك سنوضح كيفية حساب الاحتمالات أي استخراج المساحات أسفل

منحنى هذا التوزيع وذلك باستخدام جدول رياضي خاص يسمى بجدول كا^٢.

ومنحنى هذا التوزيع يختلف عن منحنى التوزيع الطبيعي ومنحنى توزيع (ت) في أنه غير متماثل حول محور معين كما أنه لا يأخذ قيما سالبة وإنما كل قيمة موجبة وتبدأ من الصفر حتى ما لا نهاية. وهذا يعني أن مفردات χ^2 تقع في الفترة صف $\chi^2 \geq 0$ ، كما أن هذا التوزيع يعتمد في تغييره على مقدار ثابت (م) يسمى بدرجات الحرية (كما هو الحال في توزيع «ت») وبالتالي كلما تغيرت قيمة (م) كلما تغير شكل منحنى التوزيع — فكلما صغرت درجات الحرية (م) كلما قل التواء التوزيع. والشكل التالي يوضح عدة منحنيات للدالة المتغير العشوائي χ^2 أي للدالة د (χ^2) عندما تكون م = 1 ، م = 3 ، م = 5 ، م = 10 .



(٣-١١) — جدول توزيع χ^2 واستخدامه :

لقد أمكن عمل جدول يوضح قيم χ^2 المختلفة ولدرجات الحرية ابتداء من م = 1 حتى م = 29 وكذلك عندما م = 30 ، 40 ، 50 ، 60 ، 70 ، 80 ، 90 ، 100 . ويوضح رأس الجدول قيم (α) المختلفة وهي تمثل الاحتمالات الشائعة الاستخدام في توزيع χ^2 وهي الاحتمالات التالية:

$$\alpha = 0.001, 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.99, 0.995$$

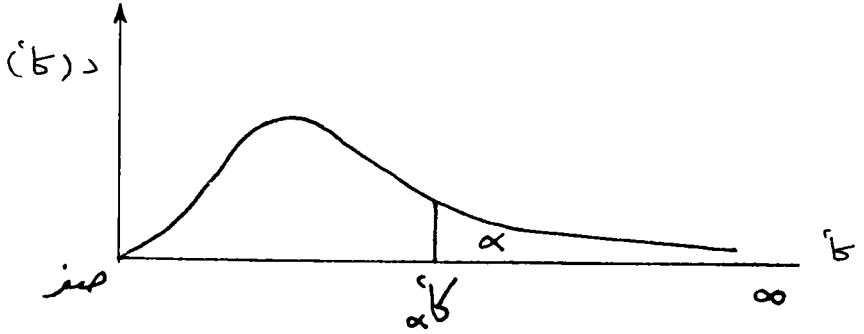
والاحتمالات α التي يوضحها الجدول هي المساحات أسفل منحنى الدالة د (χ^2) وحيث أن

الاستخدامات الإحصائية لتوزيع χ^2 تعتمد على معرفة قيم « χ^2 » التي تحصر على يمينها احتمالات معينة قدرها α فيكون المطلوب هو معرفة قيمة « χ^2 » التي تحقق الاحتمال التالي:

$$\alpha = P(\chi^2 < \chi^2_{\alpha})$$

وذلك عند درجة حرية معينة (م).

ويمكن تمثيل المساحة المناظرة لهذا الاحتمال على منحنى χ^2 كما في الشكل التالي:



$$\alpha = P(\chi^2 < \chi^2_{\alpha})$$

وجداول χ^2 يتكون من صفوف وأعمدة - يوضح الصف الأول قيم α المختلفة ويوضح العمود الأول درجات الحرية المختلفة أما محتويات الجدول فهي قيم « χ^2_{α} ». فمثلاً لمعرفة قيمة χ^2 التي تحصر على يمينها احتمالاً قدره (0.01) إذا كانت درجات الحرية 15 درجة فإننا نبحث في الجدول عند تقاطع الصف م = 15 مع العمود $\alpha = 0.01$ وسنجد أن قيمة $\chi^2 = 30.5779$.

وفيما يلي نقدم جدول توزيع χ^2 :

جدول توزیع کا ۲

۰-۲۵۰	۰-۱۰۰	۰-۵۰	۰-۲۵	۰-۱۰	۰-۵	۰-۱	۰
۱۲۲۲۳۰	۲۷۰۵۵۴	۳۸۴۱۴۶	۵۰۲۳۸۹	۶۶۳۴۹۰	۷۸۷۹۴۴	۱۰۸۲۸	۱
۲۷۷۲۵۹	۴۶۰۵۱۷	۵۹۹۱۴۷	۷۳۷۷۷۶	۹۲۱۰۳۴	۱۰۵۹۶۶۰	۱۳۸۱۶	۲
۴۱۰۸۳۵	۶۲۵۱۳۹	۷۸۱۴۷۳	۹۳۴۸۴۴	۱۱۳۴۴۹۰	۱۲۸۳۸۱۰	۱۶۲۶۶	۳
۵۳۸۵۲۷	۷۷۷۹۴۴	۹۴۸۷۷۳	۱۱۱۴۳۳۰	۱۳۲۷۶۷۰	۱۴۸۶۰۲۰	۱۸۴۶۷	۴
۶۶۲۵۶۸	۹۲۳۶۳۵	۱۱۰۷۰۰۵	۱۲۸۳۲۵	۱۵۰۸۶۳	۱۶۷۴۹۶	۲۰۵۱۵	۵
۷۸۴۰۸۰	۱۰۶۴۴۶	۱۲۵۹۱۶	۱۴۴۴۹۴	۱۶۸۱۱۹	۱۸۵۴۷۶	۲۲۴۵۸	۶
۹۰۳۷۱۵	۱۲۰۱۷۰	۱۶۰۶۷۱	۱۶۰۱۲۸	۱۸۴۷۵۳	۲۰۲۷۷۷	۲۴۳۲۲	۷
۱۰۲۱۸۸	۱۳۳۶۱۶	۱۵۵۰۷۳	۱۷۵۳۴۶	۲۰۰۹۰۲	۲۱۹۵۵۰۰	۲۶۱۲۵	۸
۱۱۳۳۸۸۷	۱۴۶۸۳۷	۱۶۱۹۱۰	۱۹۰۲۲۸	۲۱۶۶۶۰	۲۳۵۵۹۳	۲۷۸۷۷	۹
۱۲۵۵۴۸۹	۱۵۹۸۷۱	۱۸۳۰۷۰	۲۰۴۸۳۱	۲۳۲۰۹۳	۲۵۱۸۸۲	۲۹۵۵۸	۱۰
۱۳۷۰۰۷	۱۷۲۷۵۰	۱۹۶۷۵۱	۲۱۹۲۰۰	۲۴۷۲۵۰	۲۶۷۵۶۹	۳۱۲۶۴	۱۱
۱۴۸۴۵۵۴	۱۸۵۵۹۴	۲۱۰۲۶۱	۲۳۳۳۶۷	۲۶۲۱۷۰	۲۸۲۹۹۵	۳۲۹۰۹	۱۲
۱۵۹۸۳۹	۱۹۸۱۱۹	۲۲۳۶۲۱	۲۴۷۳۵۶	۲۷۶۸۸۳	۲۹۸۱۹۴	۳۴۵۲۸	۱۳
۱۷۱۱۷۰	۲۱۰۶۴۲	۲۳۶۸۴۸	۲۶۱۱۹۰	۲۹۱۴۱۳	۳۱۳۱۹۳	۳۶۱۲۳	۱۴
۱۸۲۴۵۱	۲۲۳۰۷۲	۲۴۹۹۵۸	۲۷۴۸۸۴	۳۰۵۷۷۹	۳۲۸۰۱۳	۳۷۶۹۷	۱۵
۲۹۳۶۸۸	۲۳۵۴۱۸	۲۶۲۹۶۲	۲۸۸۴۵۴	۳۱۹۹۹۹	۳۴۲۶۷۲	۳۹۲۵۲	۱۶
۲۰۴۸۸۷	۲۴۷۶۹۰	۲۷۵۸۷۱	۳۰۱۹۱۰	۳۳۴۰۸۷	۳۵۷۱۸۵	۴۰۷۹۰	۱۷
۲۱۶۰۴۹	۲۵۹۸۹۴	۲۸۸۶۹۳	۳۱۵۲۶۴	۳۴۸۰۵۳	۳۷۱۵۶۴	۴۲۳۱۲	۱۸
۲۲۷۱۷۸	۲۳۲۰۳۶	۳۰۱۴۳۵	۳۲۸۵۲۳	۳۶۱۹۰۸	۳۸۵۸۲۲	۴۳۸۲۰	۱۹

تابع جدول توزيع كا

.٠٩٩٥	.٠٩٩٠	.٠٩٧٥	.٠٩٥٠	.٠٩٠٠	.٠٧٥٠	.٠٥٠٠	م
١٠٣٠٣٩٢٧٠٤	٩٣٠١٥٧٠٨٨	٩٣٠١٥٧٠٨٨	٨٣٠١٥٧٩٢٢١٤	٠٠٠١٥٧٩٠٨	٠٠٠١٥٣٠٨	٠٠٠٤٥٩٩٣٧	١
٠٠١٠٠٢٤١	٠٠٠٢٠١٠٠٧	٠٠٠٥٠٦٣٥٦	٠٠١٠٢٥٨٧	٠٠٠٢١٠٢٧٠	٠٠٠٥٧٥٣٦٤	١٣٢١٢٢٩	٢
٠٠٠٧١٧٢١٢	٠٠١١٤٨٣٢	٠٠٢١٥٧٩٥	٠٠٣٥١٨٤٦	٠٠٥٨٤٣٧٥	١٣٢١٢٥٢٤	٢٣٦٥٩٧	٣
٠٢٠٦٩٩٠	٠٢٩٧١١٠	٠٤٨٤٤٤١٩	٠٧١٠٧٢١	١٠٦٢٣٦٣	١٩٢٢٢٥٥	٢٣٥٧٠	٤
٠٤١١٧٤٠	٠٥٥٤٣٠٠	٠٨٣١٢١١	١٣٤٥٥٤٧٦	٢٦١٠٣١	٢٦٧٤٦٠	١٣٥١٤٦	٥
٠٦٧٥٧٢٧	٠٨٧٢٠٨٥	١٢٢٣٧٣٤٧	١٦٢٥٣٢٩	٢٢٠٤١٣	٢٤٥٥٦٠	٥٣٤٨١٢	٦
٠٩٨٩٢٦٥	١٢٣٩٠٤٣	١٦٨٩٨٧	٢١٦٧٣٥	٢٨٣٣١١	٤٢٥٤٨٥	٦٣٤٥٨١	٧
١٣٤٤٤٤١٩	١٦٤٤٤٨٢	٢١٧٩٧٣	٢٧٣٢٦٤	٣٤٨٩٥٥٤	٥٠٧٠٦٤	٧٣٤٤١٢	٨
١٧٣٤٤٩٢٦	٢٠٨٧٩٠٢	٢٧٠٠٣٩	٣٣٢٥١١	٤١٦٨١٦	٥٨٩٨٨٢	٨٣٤٢٨٣	٩
٢١٥٥٨٥	٢٥٥٨٢١	٣٢٤٦٩٧	٣٩٤٠٣٠	٤٨٦٥١٨	٦٧٣٧٢٠	٩٣٤١٨٢	١٠
٢٦٠٣٢١	٣٠٥٣٤٧	٣٨١٥٧٥	٤٥٧٤٨١	٥٥٧٧٧٩	٧٥٥٨٤٢	١٠٣٤١٠	١١
٣٠٧٣٨٢	٣٥٧٠٥٦	٤٤٠٣٧٩	٥٢٢٦٠٣	٦٣٠٣٨٠	٨٤٣٨٤٢	١١٣٤٠٣	١٢
٣٥٦٥٠٣	٤١٠٦٩١	٥٠٠٠٨٧٤	٥٨٩١٨٦	٧٠٤١٥٠	٩٢٢٩٩٠٦	١٢٣٣٩٨	١٣
٤٠٧٤٦٨	٤٦٦٠٤٣	٥٦٢٨٧٢	٦٥٧٠٦٣	٧٧٨٩٥٣	١٠١٦٥٣	١٣٣٣٩٢	١٤
٤٦٠٠٩٤	٥٢٢٩٣٥	٦٢٦٢١٤	٧٢٦٠٩٤	٨٥٤٦٧٥	١١٠٣٦٥	١٤٣٢٨٩	١٥
٥١٤٤٣٤	٥٨١٢٢١	٦٩٠٧٦٦	٧٩٦١٦٤	٩٣١٢٢٣	١١٩١٢٢	١٥٣٢٨٥	١٦
٥٦٩٧٢٤	٦٤٠٧٧٦	٧٥٥٤١٨	٨٦٧١٧٦	١٠٠٨٥٢	١٢٧٩١٩	١٦٣٢٨١	١٧
٦٢٦٤٨١	٧٠١٤٩١	٨٢٢٣٠٧٥	٩٣٩٠٤٦	١٠٨٦٤٩	١٣٦٧٥٣	١٧٣٣٧٩	١٨
٦٨٤٣٩٨	٧٦٣٢٧٣	٨٩٠٦٥٥	١٠١١٧٠	١١٦٥٠٩	١٤٥٦٢٠	١٨٣٣٧٦	١٩

تابع جدول توزيع كا

٠٢٥٠	٠١٠٠	٠٠٥٠	٠٠٢٥	٠٠١٠	٠٠٠٥	٠٠٠١	م ٢
٢٣٨٢٧٧	٢٨٤١٢٠	٣١٤١٠٤	٣٤١٦٩٦	٣٧٠٥٦٦٢	٣٩٩٩٦٨	٤٥٣١٥	٢٠
٢٤٩٣٤٨	٢٩٦١٥١	٣٢٦٧٠٥	٣٥٤٧٨٩	٣٨٩٣٢١	٤١٤٠١٠	٤٦٧٩٧	٢١
٢٦٠٣٩٣	٣٠٨١٢٣	٢٣٩٢٤٤	٣٦٧٨٠٧	٤٠٢٢٨٩٤	٤٢٧٩٥٦	٤٨٢٦٨	٢٢
٢٧١٤١٣	٣٢٠٠٦٩	٣٥١٧٢٥	٣٨٠٧٥٧	٤١٦٦٣٨٤	٤٤١٨١٣	٤٩٧٢٨	٢٣
٢٨٢٤١٢	٣٣١٩٦٣	٣٦٤١٥١	٣٩٣٦٤١	٤٢٩٧٩٨	٤٥٥٥٨٥	٥١١٧٩	٢٤
٢٩٣٣٨٩	٣٤٣٨١٦	٣٧٦٥٢٥	٤٠٦٤٦٥	٤٤٣١٤١	٤٦٩٢٧٨	٥٢٦٢٠	٢٥
٣٠٤٣٤٥	٣٥٥٦٣١	٣٨٨٨٥٢	٤١٩٢٣٢	٤٥٦٤١٧	٤٨٢٨٩٩	٥٤٠٥٢	٢٦
٣١٥٢٨٤	٣٦٧٤١٢	٤٠١١٣٣	٤٣١٩٤٤	٤٦٩٦٣٠	٤٩٦٤٤٩	٥٥٤٧٦	٢٧
٣٢٦٢٠٥	٣٧٩١٥٩	٤١٣٣٧٢	٤٤٤٦٠٧	٤٨٢٧٨٢	٥٠٩٩٣٣	٥٦٨٩٢	٢٨
٣٣٧١٠٩	٣٩٠٨٧٥	٤٢٥٥٦٩	٤٥٧٢٢٢	٤٩٥٨٧٩	٥٢٣٣٥٦	٥٨٣٠٢	٢٩
٣٩٧٩٩٨	٤٠٢٥٦٠	٤٣٧٧٢٩	٤٦٩٧٩٢	٥٠٨٩٢٢	٥٣٦٣٢٠	٥٩٧٠٣	٣٠
٤٥٦٦٦٠	٥١٨٠٥٠	٥٥٧٥٨٥	٥٩٣٤١٧	٦٣٦٩٠٧	٦٦٧٦٥٩	٧٣٤٠٢	٤٠
٥٦٣٣٣٦	٦٣١٦٧١	٦٧٥٠٤٨	٧١٤٢٠٢	٧٦١٥٣٩	٧٩٤٩٠٠	٨٦٦٦١	٥٠
٦٦٩٨١٤	٧٤٣٩٧٠	٧٩٠٨١٩	٨٣٢٩٧٦	٨٨٣٧٩٤	٩١٩٥١٧	٩٩٦٠٧	٦٠
٧٧٥٧٦٦	٨٥٥٢٧١	٩٠٥٣١٢	٩٥٠٢٣١	١٠٠٠٤٢٥	١٠٤٢١٥	١١٢٣١٧	٧٠
٨٨١٣٠٣	٩٦٥٧٨٢	١٠١٨٧٩	١٠٦٦٢٩	١١٢٣٢٩	١١٦٣٢١	١٢٤٨٣٩	٨٠
٩٨٦٤٩٩	١٠٧٥٦٥	١١٣١٤٥	١١٨١٣٦	١٢٤١١٦	١٢٨٢٩٩	١٣٧٢٠٨	٩٠
١٠٩١٤١	١١٨٤٩٨	١٢٤٣٤٢	١٢٩٥٦١	١٣٥٨٠٧	١٤٠١٦٩	١٤٩٤٤٩	١٠٠

تابع جدول توزيع كا

٠٩٩٥	٠٩٩٠	٠٩٧٥	٠٩٥٠	٠٩٠٠	٠٧٥٠	٠٥٠٠	م ٥
٧٤٣٣٨٦	٨٢٦٠٤٠	٩٥٩٠٨٣	١٠٨٥٠٠٨	١٢٤٤٤٢٦	١٥٤٤٥١٨	١٩٢٣٣٧٤	٢٠
٨٠٣٣٦٦	٨٨٩٧٢٠	١٠٢٨٢٩٣	١١٥٥٩١٣	١٣٢٢٣٩٦	١٦٢٤٤٤٤	٢٠٢٣٣٨٢	٢١
٨٦٤٢٣٧٢	٩٥٥٤٢٤٩	١٠٩٨٢٣	١٢٣٣٨٠	١٤٠٤١٥	١٧٢٢٣٩٦	٢١٢٣٣٧٠	٢٢
٩٢٦٠٤٢	١٠١٩٥٦٧	١١٦٨٨٥	١٣٠٩٠٥	١٤٨٤٧٩	١٨١٢٣٧٢	٢٢٢٣٣٦٩	٢٣
٩٨٨٦٢٣	١٠٨٥٦٤	١٢٤٠١١	١٣٨٤٨٤	١٥٦٥٨٧	١٩٠٣٧٢	٢٣٢٣٦٧٧	٢٤
١٠٥١٩٧	١١٥٢٤٠	١٣١١٩٧	١٤٦١١٤	١٦٤٧٣٤	١٩٩٢٩٣	٢٤٢٣٣٦٦	٢٥
١١١٦٠٣	١٢١٩٨١	١٣٨٤٣٩	١٥٣٧٩١	١٧٢٢٩١٩	٢٠٨٤٣٤	٢٥٢٣٣٦٤	٢٦
١١٨٠٧٦	١٢٨٧٨٦	١٤٥٧٣٣	١٦١٥١٣	١٨١١٢٨	٢١٧٤٩٤٩	٢٦٢٣٣٦٣	٢٧
١٢٤٦١٣	١٣٥٦٤٨	١٥٣٠٧٩	١٦٩٢٧٩	١٨٩٢٩٢	٢٢٦٥٧٢	٢٧٢٣٣٦٣	٢٨
١٣١٢١١	١٤٢٥٦٥	١٦٠٤٧١	١٧٧٠٨٣	١٩٧٧٦٧٧	٢٣٥٦٦٦	٢٨٢٣٣٦٢	٢٩
١٣٧٨٦٧	١٤٩٥٣٥	١٦٧٩٠٨	١٨٤٩٣٦	٢٠٥٩٩٢	٢٤٤٧٧٦	٢٩٢٣٣٦٠	٣٠
٢٠٧٠٦٥	٢٢١٦٤٣	٢٤٤٣٣١	٢٦٥٠٩٣	٢٩٠٥٠٥	٣٣٦٦٠٣	٣٩٢٣٥٤	٤٠
٢٧٩٩٠٧	٢٩٧٠٦٧	٣٢٣٥٧٤	٣٤٧٦٤٢	٣٧٦٨٨٦	٤٢٩٤٢١	٤٩٢٣٤٩	٥٠
٣٥٥٣٤٦	٣٧٤٨٤٨	٤٠٤٨١٧	٤٣١٨٧٩	٤٦٤٥٨٩	٥٢٢٦٣٨	٥٩٢٣٤٧	٦٠
٤٣٢٧٥٢	٤٥٤٤١٨	٤٨٧٥٧٦	٥١٧٣٩٣	٥٥٣٢٩٠	٦١٦٩٨٣	٦٩٢٣٤٤	٧٠
٥١١٧٢٠	٥٣٥٤٠٠	٥٧١٥٣٢	٦٠٣٩١٥	٦٤٢٧٧٨	٧١١٤٤٥	٧٩٢٣٤٣	٨٠
٥٩١٩٦٣	٦١٧٥٤١	٦٥٦٤٦٦	٦٩١٢٦٠	٧٣٢٩١٢	٨٠٦٢٤٧	٨٩٢٣٤٢	٩٠
٦٧٢٣٧٦	٧٠٦٤٨	٧٤٢٢١٩	٧٧٩٢٩٥	٨٢٣٥٨٠	٩٠١٣٣٢	٩٩٢٣٤١	١٠٠

فيما يلي بعض الأمثلة التي تبين كيفية استخدام جداول Z .

مثال (١٣): إذا كان لدينا متغير عشوائي له توزيع Z فأوجد قيمة Z التي تجعل:

$$1 - 0.05 = P(Z < \alpha)$$

$$2 - 0.99 = P(Z > \alpha)$$

وذلك إذا كانت درجات الحرية كما يلي:

$$\text{أولاً: } m = 5$$

$$\text{ثانياً: } m = 15$$

الحل

أولاً: إذا كانت $m = 5$

$$1 - 0.05 = P(Z < \alpha)$$

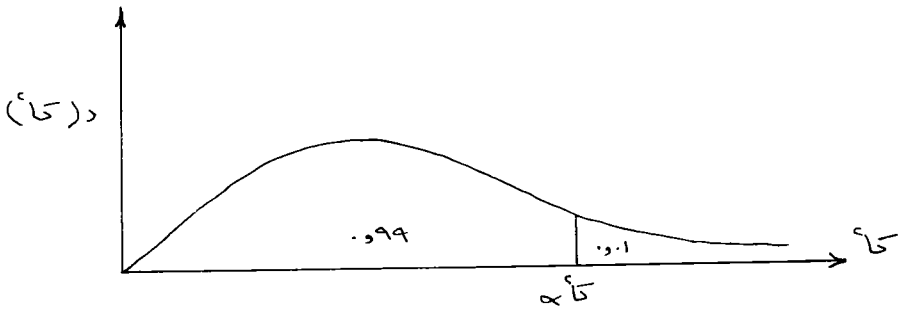
قيمة Z التي تحقق الاحتمال السابق هي $Z = 1.645$ وهي تلك القيمة الموجودة في جدول Z عند تقاطع الصف $m = 5$ مع العمود 0.05 وبقراءتها من الجدول نجد أن:

$$Z = 1.645 = \alpha$$

$$2 - 0.99 = P(Z > \alpha)$$

$$\text{فان } P(Z < \alpha) = 0.01$$

وذلك كما يتضح من الرسم التالي:



وعلى هذا فأ قيمة Z التي تحقق الاحتمال السابق هي $Z = 1.645$ وهي تلك القيمة الموجودة في جدول Z عند تقاطع الصف $m = 5$ مع العمود 0.01 وبالتالي فهي

$$Z = 1.645 = \alpha$$

ثانياً: إذا كانت $m = 15$

مثل الحالة السابقة تماماً ما عدا أن الصف الذي نبحث عنه في الجدول قد تغير فأصبح عند $m =$

—٦

٠ إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في إحدى الدول هو ٨٠٠، احسب احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين .

—٧

٠ إذا كان متوسط عدد الحرائق الشهرية في إحدى المدن الكبرى هو ٤ حرائق فما احتمال أن يقع في أحد الشهور:

(I) ثلاثة حرائق (II) ثلاثة حرائق على الأكثر

—٨

٠ إذا كان متوسط عدد الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق في مدينة ما هو ٤ حوادث، فما احتمال وقوع:

(I) حادثتين؟ (II) حادثتين على الأقل؟ (III) حادثتين على الأكثر؟

—٩

٠ إذا كان متوسط أطوال مجموعة كبيرة من الطلبة = ١٦٠ سم وانحرافه المعياري = ٥ سم . أوجد الاحتمالات الآتية:

(أ) الحصول على طالب طوله أكبر من ١٧٥ سم .
(ب) الحصول على طالب طوله أقل من ١٦٢ سم .
(ج) الحصول على طالب طوله ينحصر بين ١٥٧٥ سم ، ١٦٧٥ سم .

—١٠

تقدم ٣٠٠ شاب لإدارة التجنيد، فإذا كانت أطوالهم تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه = ١٧٠ سم وانحرافه المعياري = ٨ سم . أوجد عدد الأشخاص المقبولين للتجنيد إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٦ سم .

١١— إذا كان دخل ٦٠٠ أسرة في مدينة ما يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه ٣٦٠٠ ريال وانحرافه المعياري ٦٠٠ ريال . فاوجد:

(أ) احتمال الحصول على دخل أكبر من ٨٠٠ ريال .
(ب) احتمال الحصول على دخل يقل عن ٥١٠٠ ريال .
(ج) عدد الأسر التي يقل دخلها عن ٢٤٠٠ ريال .

١٢- إذا كان س متغيرا عشوائيا له توزيع «ت» بدرجات حرية م = ٩ فأوجد قيم ت_١ ، ت_٢ التي تحقق الاحتمالات الآتية:

$$١- ح (س < ت_١) = ٠.٠٥$$

$$ب- ح (س > ت_٢) = ٠.٠٥$$

$$ج- ح (ت_١ > س > ت_٢) = ٠.٩٥$$

$$د- ح (ت_١ > س > ت_٢) = ٠.٩٩$$

١٣- أوجد قيم ت_١ التي تجعل ح (ت < ت_١) = ٠.٠٥ ، وذلك في الحالات الآتية:

أ- عندما تكون درجات الحرية م = ١٦

ب- عندما تكون درجات الحرية م = ٢٥

ج- عندما تكون درجات الحرية م = ٥٥

١٤- ما هي قيم ت_١ ، ت_٢ ، التي تجعل ح (ت_١ > ت > ت_٢) = ٠.٩٥ ، وذلك في

الحالات الآتية:

أ- عندما تكون درجات الحرية م = ٩

ب- عندما تكون درجات الحرية م = ٢٠

ج- عندما تكون درجات الحرية م = ٣٠

د- قارن بين الحالات السابقة مع القيم المماثلة في حالة التوزيع الطبيعي القياسي .

١٥- إذا كان س متغيرا عشوائيا له توزيع كا^٢ فأوجد قيم كا^٢ التي تحقق الاحتمالات الآتية:

$$١- ح (س < كا_١^٢) = ٠.٠٢٥$$

$$٢- ح (س > كا_٢^٢) = ٠.٩٩٥$$

$$٣- ح (كا_١^٢ > س > كا_٢^٢) = ٠.٠٤$$

وذلك في ضوء الجدول المتاح لديك وفي الحالات التالية:

أ- عندما تكون درجات الحرية م = ٦

ب- عندما تكون درجات الحرية م = ١٦

ج- عندما تكون درجات الحرية م = ٢٧

د- عندما تكون درجات الحرية م = ٣٠

الباب الرابع

العينات

العينات

(٤-١) - مقدمة :

يعتبر أسلوب المعاينة من أهم الأساليب الإحصائية التي نستخدمها لدراسة مجموعة كبيرة من المفردات (تسمى مجتمع) بقصد التعرف على خواصها عن طريق دراسة مجموعة صغيرة من هذه المفردات (تسمى عينة). إن الصعوبات التي تصادف الباحثين عند دراسة جميع مفردات المجتمع (خاصة إذا كان هذا المجتمع كبيرا) تجعل الباحثين يلجأون عادة إلى اختيار مجموعة صغيرة (تسمى عينة) يتم اختيارها من المجتمع بطريقة معينة بحيث تكون هذه المجموعة صورة مصغرة للمجتمع بقدر الإمكان ثم يقومون بدراسة هذه العينة بدقة للتعرف على خواصها ومعرفة معالمها مثل الوسط الحسابي والوسيط وغير ذلك من المقاييس الإحصائية ثم يقومون بتعميم النتائج التي يحصلون عليها إلى المجتمع الأصلي للتعرف على خواصه ومعالمه وهذا هو الهدف الأساسي من الدراسة. وبالطبع لا يكون هذا التعميم من العينة إلى المجتمع له معنى أو قيمة علمية إلا إذا تم اختيار المفردات بطريقة تضمن بها أن تكون العينة ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا ومثل هذه العينات يطلق عليها اسم العينات العشوائية. ونلاحظ أنه عند دراسة خصائص المجتمعات يوجد أمامنا أسلوبان لجمع المعلومات وهما:

(أ) جمع البيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع وهذا يسمى بأسلوب الحصر الشامل.

(ب) نختار عينة من المجتمع ونحصل منها على المعلومات التي نلزمنا وندرس خصائصها ونعمم النتائج التي نحصل عليها على المجتمع الأصلي وهذا يسمى بأسلوب العينة.

ولا شك أن لكل من هذين الأسلوبين مزاياه وعيوبه - فأسلوب الحصر الشامل يتطلب منا وفرة من الوقت والمال والمجهود الفني وتزداد هذه المتطلبات وتتضاعف كلما كبر حجم المجتمع. وبالإضافة إلى ذلك فقد رأينا في دراستنا لمبادئ الإحصاء عند حساب المقاييس الإحصائية المختلفة كيف أن العمل الحسابي يزداد مشقة كلما كبر عدد المفردات الداخلة في البحث. هذا غير ما يتطلبه الحصول على البيانات من وقت وجهد وتكاليف لهذا نجد أن الحصر الشامل لكل مفردات المجتمع قد يعرض البيانات للخطأ والإهمال سواء في عملية تصميم البحث أو أثناء جمع البيانات أو أثناء حساب المقاييس الإحصائية ولكن إذا توفر لنا المال اللازم لاستخدام جامعي البيانات المدرسين والمشرفين الأكفاء على جامعي البيانات وتوفر كذلك الوقت والإمكانات اللازمة لفحص كل مفردات المجتمع ولإجراء كافة العمليات الحسابية المطلوبة فإننا بلا شك نستطيع بالحصر

الشامل أن نحصل على صورة حقيقية عن المجتمع الذي ندرسه . ولكن في الواقع لا نستطيع دائما توفير كل هذه المقومات من مال ووقت ووسائل فنية وعادة ما نواجه بنقص فيها وبالتالي نتعرض للعديد من الأخطاء سواء في تصميم البحث أو في جمع البيانات أو في العمل الحسابي وهذه الأخطاء تسمى بأخطاء التحيز، وقد يتبادر للذهن أن الحصر الشامل يجنبنا الأخطاء لأننا نقوم بدراسة جميع مفردات المجتمع ولكننا وجدنا أن الحصر الشامل عرضة لخطأ التحيز الذي يزداد حجمه كلما ازداد الفرق بين الإمكانات اللازمة والإمكانات المتوفرة لدراسة المجتمع . ومن هنا ظهرت فكرة العينات وهي أننا نأخذ مجموعة صغيرة من مفردات المجتمع نختارها بطريقة عشوائية بحيث تكون هذه العينة صورة مصغرة للمجتمع وفي نفس الوقت يكون عدد مفرداتها صغيرا يمكن التحكم فيه ويمكن تدبير الوقت والمال والوسائل الفنية اللازمة لدراسته بحيث يمكن أن نحصر خطأ التحيز في أضيق الحدود . وبما لا شك فيه أن خطأ التحيز في دراسة العينة أقل بكثير منه في دراسة جميع مفردات المجتمع .

وليس معنى هذا أن تكون نتائج أسلوب العينة أفضل دائما من نتائج أسلوب الحصر الشامل فأسلوب العينة يكون عرضة لنوع آخر من الخطأ يسمى خطأ الصدفة وهو ذلك الخطأ الناتج عن دراسة جزء من المجتمع (هي العينة) تدخلت عوامل الصدفة بصورة كبيرة في طريقة اختياره وبالتالي فإن الصدفة وحدها هي التي قد تجعل هذا الجزء ممثلا تمثيلا صادقا للمجتمع وهي التي قد تجعل هذا التمثيل غير صادق أو غير حقيقي . هذا ينعكس على تعميم النتائج من العينة إلى المجتمع .

معنى هذا أن الحصر الشامل يتعرض لنوع واحد من الخطأ . هو خطأ التحيز بينما تتعرض العينة لنوعين من الخطأ وهما خطأ الصدفة وخطأ التحيز . ولكن في كثير من الأحيان يمكن التحكم في خطأ التحيز الذي تتعرض له العينة بحيث يصبح مجموع خطأي الصدفة والتحيز في العينة أقل بكثير من خطأ التحيز الذي يتعرض له الحصر الشامل وهذا ما يدفعنا إلى استخدام العينات في العديد من الدراسات .

مثال ذلك إذا أردنا معرفة متوسط الأجر لعمال صناعة معينة مثل صناعة المنسوجات . فإن أسلوب الحصر الشامل يتطلب منا الحصول على معلومات عن كل عامل من عمال هذه الصناعة وهذا يتطلب وقتا وجهدا كبيرين وخاصة إذا كان عدد العمال في هذه الصناعة كبيرا أو كانت مصانع النسيج منتشرة في مناطق متفرقة متباعدة و يتحتم علينا في الحصر الشامل مقابلة كل عامل على حدة وسؤاله عن أجره وتسجيل ما نحصل عليه من بيانات ثم تجميع هذه البيانات وتحليلها لاستخلاص ما نريده من معلومات وحساب متوسط الأجر . في مثل هذه الحالات نجد أن أسلوب الحصر الشامل يكبدنا مشقة وتكاليف باهظة ومحتاج إلى وقت ومجهود كبيرين فضلا عن أننا قد نقع في خطأ التحيز مما يترتب عليه أننا لا نحصل على المتوسط الحقيقي للأجر بعد كل ما نواجهه من مشقة .

لهذا فإننا نلجأ إلى أسلوب العينة وذلك باختيار عينة عشوائية من عمال هذه الصناعة بحيث تكون ممثلة تمثيلاً صادقاً للمجتمع أو تعتبر صورة مصغرة. منه . ثم نقوم بسؤال كل عامل في هذه العينة وتسجيل البيانات التي نحصل عليها منه ثم نحسب متوسط الأجر في العينة فإذا وجدنا متوسط الأجر في العينة هو ثلاثة آلاف ريال في الشهر. وحيث أن العينة تعتبر صورة مصغرة للمجتمع فإنه يمكننا أن نستنتج أن متوسط الأجرين كل عمال هذه الصناعة في حدود ثلاثة آلاف ريال تقريباً والنتيجة التي توصلنا إليها هذه بالنسبة لمتوسط الأجرين عمال الصناعة كلها تعتبر نتيجة احتمالية غير مؤكدة تأكيداً كاملاً لهذا يجب علينا معرفة مدى ثقتنا في صحة هذه النتيجة . ولقياس درجة هذه الثقة فإننا نستخدم الاحتمالات وهذا هو أحد الأسباب في تكريس الفصول السابقة لنظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية وإذا كانت نظرية الاحتمالات فرع من فروع الرياضيات البحتة فإن دراسة العينات واستخدامها للاحتتمالات تدخل بنا إلى صلب الطرق الإحصائية والتي سندرس جزءاً منها في الأبواب التالية :

ومما هو جدير بالذكر أن التغلب على خطأ التحيز ليس هو السبب الوحيد الذي يجعلنا نلجأ إلى استخدام العينات وإنما هناك أسباب أخرى كثيرة نذكر منها مثلاً ما يلي :

- (١) عندما يؤدي أسلوب الحصر الشامل إلى تدمير كل مفردات المجتمع المدروس مثل محاولة معرفة متوسط عمر المصابيح الكهربية التي ينتجها مصنع معين ، إذ يتطلب أسلوب الحصر الشامل إضاءة كل مصباح من إنتاج المصنع حتى يحترق لمعرفة عمره وهذا يترتب عليه تدمير كل إنتاج المصنع ولهذا لا بد من اللجوء إلى أسلوب العينة لمثل هذه الدراسة — كذلك عند دراسة تركيب دم الإنسان لا يعقل استخدام أسلوب الحصر الشامل الذي يؤدي إلى سحب كل دم الإنسان .
- (٢) عندما يتعذر تحديد جميع مفردات المجتمع لإجراء حصر شامل مثل دراسة أذواق المستهلكين لسلعة معينة لإدخال بعض التعديلات على إنتاج هذه السلعة . في هذه الحالة يصعب علينا تحديد كل المستهلكين لها لهذا نلجأ إلى أخذ عينة من المستهلكين .

وفي ختام هذه المقدمة يجب الإشارة إلى أنه في حالة توفر كل الإمكانيات اللازمة لدراسة المجتمع من وقت وجهد ومال ووسائل فنية يكون أسلوب الحصر الشامل أفضل من أسلوب العينة كما يحدث في حالة التعدادات العامة للسكان — أما عند نقص هذه الإمكانيات فيكون أسلوب العينة هو الأفضل . وقد انتشر استخدام العينات في معظم الدراسات الاقتصادية والاجتماعية والسكانية والعلمية ومراقبة الإنتاج وغير ذلك من المجالات .

(٤-٢) — بعض أنواع العينات العشوائية :

سنتناول الآن بالدراسة بعض أنواع العينات العشوائية وطريقة الاختيار لكل منها :

(١) العينات العشوائية البسيطة:

هي العينات التي يراعى عند اختيارها تكافؤ الفرص أمام كل مفردات المجتمع . بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع فرصة متساوية مع بقية المفردات لاختيارها في العينة ويتم ذلك عن طريق الاختيار العشوائي لمفردات العينة من بين مفردات المجتمع . ولهذا يجب معرفة المفاهيم التالية:

(أ) الإطار :

حتى يمكن اختيار العينة فإن الأمر يتطلب تحديد مفردات المجتمع تحديدا كاملا و يكون هذا التحديد على شكل قائمة (أو خريطة) تضم كل مفردات المجتمع وهذه القائمة تسمى بالإطار . فمثلا إذا أردنا اختيار عينة من عمال صناعة النسيج (كما ذكرنا سابقا) لتقدير متوسط أجر العامل فإنه يلزمنا وجود قائمة بأسماء العمال وأجر كل منهم في هذه الصناعة وهذا هو الإطار، ويجب أن يكون شاملا لكل مفردات المجتمع أي لكل عمال الصناعة وأن يكون حديثا حتى يشمل على العمال الجدد المعينين حديثا وأن يحدد لنا بدقة كل المعلومات التي تلزمنا في الدراسة . ثم نبدأ في اختيار العينة من الإطار ويتم ذلك عن طريق إعطاء كل مفردة رقما مسلسلا ثم اختيار العينة بطريقة الاختيار العشوائي .

(ب) الاختيار العشوائي:

يتم الاختيار العشوائي بطريقة معينة تضمن فرصا متساوية لاختيار المفردات في العينة . وليس معنى الاختيار العشوائي أن يكون اختيارا حسيما اتفق أو كما يقولون ضرب عشواء ، فقد يظن البعض أن الاختيار العشوائي من قائمة مكتوب بها مجموعة من الأسماء أن نفتح صفحة من هذه القائمة ثم نمسك بالقلم ونغمض أعيننا ثم نضع القلم على الصفحة ثم نفتح أعيننا ونختار الإسم الذي وقع عليه القلم . في الواقع هذا النوع من الاختيار لا يخلو من التحيز حيث أن الإنسان المغمض العينين يحاول دائما أن يضع القلم في وسط الصفحة (خشية أن يخرج قلمه عن حدود الصفحة) وهذا الحذر يعطي للأسماء الموجودة في وسط الصفحة فرصة أكبر من الأسماء الموجودة على الأطراف وإنما الاختيار العشوائي يمكن أن يتم بطريقة مبسطة جدا وذلك بأن نكتب الأعداد (صفر، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩) على عشر بطاقات (أو عشرة كرات) متشابهة تماما في كل شيء من حيث اللون والحجم والوزن وكل الصفات . ونضع البطاقات العشر (أو الكرات العشر) في كيس أو وعاء مغلق يدور بالبطاقات (أو الكرات) فيخلطها في بعضها خلطا جيدا وبهذا لو سحبنا أي بطاقة (أو كرة) من الكيس لا نعرف بالضبط ما هي البطاقة التي سنحصل عليها وإنما تكون الفرصة واحدة لكل البطاقات في الظهور . فلو كان حجم العينة ٢٥٠ مفردة مثلا وعدد المفردات في الإطار خمسة آلاف مفردة— فلنختار العينة من الإطار نلاحظ أن ترتيب أي مفردة لا بد أن

يتراوح بين ١ و ٥٠٠٠— أي أن أكبر رقم مسلسل في الإطار يتكون من ٤ خانات (آحاد— عشرات— مئات— ألوف) لهذا يجب أن نختار لكل مفردة من مفردات العينة ٤ بطاقات كل بطاقة تعطي لنا رقما من الخانات الأربعة— فمثلا نسحب بطاقة عشوائية من البطاقات المحكمة الخلط في الكيس نفرض مثلا أننا وجدنا عليها العدد (٣) فيكون هورقم الآلاف— ثم نرجع البطاقة إلى الكيس ونحكم خلطها مع بقية البطاقات وذلك بدوران الكيس ثم نسحب بطاقة ثانية نفرض أننا وجدنا عليها العدد (صفر) فيكون هورقم المئات ونكرر العملية مرتين لنحصل على رقمي العشرات والآحاد ونفرض أننا وجدناهما (٣) للعشرات و(٧) للآحاد فيكون الرقم المسلسل لهذه المفردة هو (٣٠٣٧) في الإطار. ونعتبر هذه هي المفردة الأولى في العينة— أي أن أول مفردة في العينة هي المفردة التي تحمل الرقم (٣٠٣٧) في الإطار. ونكرر هذا العمل للحصول على المفردة الثانية والثالثة والرابعة إلى آخر مفردات العينة وذلك مع استبعاد الأرقام المكررة التي سبق اختيارها من الإطار وكذلك الأرقام التي تزيد عن ٥٠٠٠ أي عن حجم الإطار. وبهذه الطريقة يمكن القول أن العينة عشوائية وأنها ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا أو أنها صورة مصغرة للمجتمع وبالتالي يمكن تعميم أي نتائج نحصل عليها من العينة على كل مفردات المجتمع الأصلي وليست طريقة البطاقات (أو الكور) هي الطريقة الوحيدة للاختيار العشوائي وإنما هناك جداول للأعداد العشوائية مصممة لهذا الغرض— وهي عبارة عن أعداد مختارة بالطريقة العشوائية (بالبطاقات أو الكور) ومرتبة في شكل أعمدة وصفوف لتوفير المجهود الذي يبذل في الاختيار العشوائي بواسطة البطاقات وتأخذ جداول الأعداد العشوائية الشكل التالي:

٤٧٦٣٥	٧٦٥٣٤	٧٥٢٠٠	٨٤٢٥٧
٥٨٩٧١	٦٨١٢٣	٨٧٤٣١	٦٣٥٨٦
٥٣٢٠٢	٢٠٤٥٠	١٢٣٤٥	٧٩٤٧١
٩٤٠٣٦	١٣٤٦١	١٣٧٦٤	٥٦٣٨٥
٩٠٠٠١	٦٠٨٧٢	٢٦٨٣٠	٠٠٧٦٥
٣٥٠٢١	٠٠٧٨٢	٠٩٨٧١	٧٦٤٥٣
٧٦٨٢٤	١٨٦٤١	٦٠٥٣٠	٨٤٢٥٢
١٥٨٧٦	٤٥٧٨٩	٩٣٠٨٠	٠١٦٣٥
٠٦٨٧١	٠٤١٢٣	٨٤٣٢٣	٢٩٠٥٤

٢٧٨٩١

٢٨٧٦٥

٧٨٩٥٦

١٠٢٣١

• • • •
• • • •

ويشتمل جدول الأعداد العشوائية على صفحات عديدة من هذه الأرقام العشوائية. ويوجد نموذج من هذا الجدول في نهاية هذا الباب.

فمثلا لاختيار العينة السابقة التي حجمها ٢٥٠ مفردة من مجتمع عدد مفرداته ٥٠٠٠ — نلاحظ أن أكبر رقم مسلسل في المجتمع وهو ٥٠٠٠ مكون من ٤ خانوات لهذا نختار أربع أعمدة (أو أربعة صفوف) من الجدول عشوائيا لنفرض أنها الأعمدة (الثالث والرابع والخامس والسادس) فنحصل على الأرقام التالية:

٠٨٤٢

١٦٣٥

٥٧٩٤

٤٥٦٣

٠٠٠٧

١٧٦٤

٠٨٤٢

٠٠١٦

٣٢٩٠

٦١٠٢

•

•

•

•

•

•

نستبعد من الأرقام السابقة كل الأرقام التي تزيد عن خمسة آلاف وهو أكبر رقم في الإطار لهذا نستبعد الرقم الثالث (٥٧٩٤) والرقم العاشر (٦١٠٢) كذلك نستبعد أي رقم مكرر لهذا نستبعد الرقم السابع لأنه مكرر في الأول ثم نرتب بقية الأرقام ترتيبا تصاعديا فنحصل على أرقام المفردات التي يجب أن نسحبها من الإطار وهم العمال ذوي الأرقام المسلسلة التالية:

٧-١٦-٨٤٢-١٦٣٥-١٦٧٤-٣٢٩٠-٤٥٦٣-٥٠٠٠ وهكذا حتى نحصل على ٢٥٠ مفردة وهي كل مفردات العينة.

وعند استخدام جدول الأعداد العشوائية يجب عند البداية فتح الجدول عشوائيا على أي صفحة دون اختيار صفحة معينة ثم نختار العمود الأول (أو الصف الأول) عشوائيا و بعد ذلك يمكن أخذ الأرقام من الجدول حسب ترتيبها داخل الجدول حيث أنها مرتبة داخل الجدول عشوائيا.

(٢) العينة العشوائية المنتظمة:

إن اختيار هذه العينة يتطلب وجود إطار للمجتمع كما في حالة العينة العشوائية البسيطة بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع رقما مسلسلا داخل الإطار. ثم نختار مفردات العينة من الإطار بحيث يكون الرقم المسلسل لكل مفردة يبعد بعدا ثابتا منتظما عن رقم المفردة السابقة لها وكذلك عن رقم المفردة اللاحقة لها - ويتم ذلك على النحو الآتي:

- (أ) نقسم الإطار إلى فترات منتظمة وليكن طول كل منها F ويتوقف على حجم العينة.
 (ب) نختار عشوائيا مفردة واحدة من مفردات الفترة الأولى ولتكن المفردة رقم L .
 (ج) بذلك تتحدد تماما مفردات العينة وهي المفردات التي أرقامها المسلسلة هي: $L, L+F, L+2F, \dots$

مثال:

(أ)

نفرض أن حجم العينة المطلوبة هو ٥% من حجم المجتمع أي أن من بين كل ١٠٠ مفردة في المجتمع نحتاج إلى ٥ مفردات في العينة أو من بين كل ٢٠ مفردة في المجتمع نحتاج إلى مفردة واحدة في العينة.

(ب)

نقسم الإطار إلى فترات طول كل منها ٢٠ مفردة فتكون أرقام الفترة الأولى في الإطار هي

١-٢-٣-٤-٥-٦-٧-٨-٩-١٠-١١-١٢-١٣-١٤-١٥-١٦-١٧-١٨-١٩-٢٠

وأرقام الفترة الثانية في الإطار هي ٢١-٢٢-٢٣-٢٤-٢٥-٢٦-٢٧-٢٨-٢٩-٣٠

وهكذا حتى نهاية المفردات في المجتمع .

(جـ)

تستخدم الطريقة العشوائية البسيطة السابقة لاختيار مفردة واحدة من مفردات الفترة الأولى لتكون هي أول مفردة في العينة لنفرض أننا حصلنا على الرقم ١٧ مثلا .

(د)

بعد تحديد المفردة الأولى في العينة يتحدد تماما باقي مفردات العينة كل ما هو مطلوب أن نضيف طول الفترة إلى رقم المفردة الأولى لنحصل على رقم المفردة الثانية ثم نضيف طول الفترة إلى رقم المفردة الثانية لنحصل على رقم المفردة الثالثة وهكذا حتى نحصل على كل مفردات العينة . و بهذا تتكون العينة من المفردات التي أرقامها المسلسلة في الإطار هي :

١٧ - ٣٧ - ٥٧ - ٧٧ - ٩٧ - ١١٧ - ١٣٧ - ١٥٧ - ١٧٧

نلاحظ أن طريقة الاختيار في هذه العينة أسهل من العينة العشوائية البسيطة وذلك لأن الاختيار العشوائي يتم بالنسبة لأول مفردة فقط أما باقي المفردات فتتحدد تلقائيا حسب رقم أول مفردة وحجم العينة - كما أن العينة تكون منتشرة على كل أجزاء المجتمع وبالتالي تكون أكثر تمثيلا وخاصة إذا كان المجتمع غير متماثل - ولكن هذه الميزات يقابلها صعوبة في تحليل نتائج هذا النوع من العينات ولا يتسع المجال هنا للتعرض لمثل هذه الصعوبات التي تحتاج إلى قدر أكبر من الدراسة في نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية ونظرية التقدير لهذا فقد اكتفينا بتعريفها وتوضيح طريقة اختيارها فقط .

(٣) العينة الطبقيّة :

نلجأ إلى هذا النوع من العينات في الحالة التي يكون فيها المجتمع مكونا من طبقات غير متجانسة ويتحتم علينا تمثيل كل هذه الطبقات داخل العينة بحيث يتم تمثيل كل طبقة بعدد من المفردات يتناسب حجمه مع أهمية هذه الطبقة في المجتمع وبالتالي لا بد أن نختار مفردات العينة من جميع الطبقات بعد تحديد عدد المفردات التي يجب سحبها من كل طبقة ثم نختار هذه المفردات من داخل الطبقة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو بطريقة العينة العشوائية المنتظمة وذلك حسب ما يراه الباحث .

ومما هو جدير بالذكر أنه يوجد عدة أنواع أخرى من العينات منها العينات المتعددة المراحل والعينات العنقودية وغيرها مما لا يتسع المجال للتعرض لها بالتفصيل . لهذا نكتفي فقط بذكر الأنواع الثلاثة السابقة حيث أن هذا القدر من الدراسة يسمح لنا بتفهم تحليل نتائج العينات وهو موضوع الدراسة في الباب التالي .

نموذج من جدول الأعداد العشوائية

١٥	٤٩	٤٨	٠٢	٧٧	٩٥	١٦	٥٣	٥٠	٣٢
٢٨	١٢	٣٦	٦٧	٦٤	٨٢	٥١	٤٠	٥٣	٩٢
٣٤	٢٥	٤٣	٥٥	١٢	٥٩	٣٤	٢١	٧٠	٢٧
٢٣	٨٢	٧١	٣٧	١٦	٩١	٧٠	١٦	١٠	٢٥
٦٧	٨٣	٤٣	٤٢	٣٧	٨٣	٤٩	٣٣	١١	٣١
٧٦	٤١	٨٤	١٧	٤٤	١٤	٧٨	٧٧	٥٤	٤٠
٨٥	٥٩	٨٨	٧٦	٦٤	١٧	٤٧	٦٤	١١	٣٤
٩٢	٠٢	٨٠	٤٧	٢٨	٣٢	٦١	٣٧	٨٧	١٨
٥٨	٦٨	٦٥	٢١	٥٣	٧٩	٤٤	١٢	٦٧	٩٤
٢٧	٤٢	٩٨	٩٦	٥١	١٤	٢١	٤٤	٧٣	٤٠
٣١	٧٠	٧٩	٣٠	٣١	٩١	٥٨	١٤	١٧	٦٣
٤٠	٨٢	٨٤	١٥	٩٥	٩٦	١٨	١٥	٧٠	٣٩
٥٩	٩٥	٢٣	٠٦	٤٦	٥٤	١٠	٢٥	٩١	٥٩
٦٤	٦١	٣٠	٦٤	٨٤	٥٢	٦٨	٥٣	٢٨	٠٥
٤٣	٥٦	٤٢	٥٥	٢١	٣٥	٧٠	٨٢	١٢	٦٣

· 9	82	27	30	· 8	· 0	13	82	37	23
78	79	30	· 0	73	23	00	77	70	80
27	80	92	19	79	98	77	98	00	20
· 7	27	23	33	· 2	90	77	01	22	71
82	27	13	90	23	90	02	03	77	78

81	20	· 7	03	20	· 0	33	73	11	80
73	77	20	82	· 8	· 3	37	00	71	22
73	33	03	90	28	03	90	27	29	80
32	78	82	03	98	79	· 0	18	32	21
78	72	90	82	73	92	29	70	70	11

92	19	92	72	72	00	23	03	92	28
· 2	03	70	77	22	22	22	07	07	72
72	01	72	70	73	38	20	17	13	20
28	· 7	18	32	07	02	09	77	27	38
71	39	13	77	33	72	20	90	28	22

90	19	73	79	72	30	17	20	· 7	19
37	97	20	03	93	81	77	22	· 7	31
31	77	27	21	19	70	77	89	77	11

99	87	98	97	02	21	33	70	08	02
91	77	73	33	19	79	21	33	91	38
77	33	78	03	78	70	22	38	90	12
17	98	83	70	11	07	88	88	33	79
38	33	71	28	30	21	01	70	22	30
97	23	03	38	12	20	17	07	70	33
07	10	33	37	33	18	09	70	90	33
77	02	03	71	01	02	10	31	31	07
18	80	77	71	28	71	00	08	22	39
93	80	88	33	02	33	72	99	37	79
90	73	22	31	22	30	99	00	33	08
30	31	39	30	23	00	30	72	78	91
28	77	88	70	07	12	33	79	73	27
09	19	38	70	92	77	17	30	79	31
97	97	73	12	01	73	22	90	91	38
32	78	02	90	13	83	82	30	12	33
27	27	80	79	82	07	71	90	82	80

90	1	43	39	78	27	76	02	48	98
70	72	37	74	43	37	80	40	93	17
30	39	48	08	00	11	42	49	09	04
70	78	00	43	96	70	23	88	07	72
76	01	00	24	00	17	10	70	07	82

74	73	08	96	48	77	37	29	94	72
30	40	27	43	72	77	73	70	93	18
91	70	76	81	20	21	21	19	40	74
90	80	77	17	36	20	10	70	94	12
17	23	43	93	98	78	00	72	17	10

71	73	34	07	74	29	07	10	27	31
80	20	27	10	10	74	81	00	71	43
12	49	04	78	34	08	18	99	04	70
33	20	77	40	90	80	43	30	74	93
82	40	17	30	71	36	17	76	80	72

73	91	00	80	40	74	70	04	70	49
70	08	02	28	00	90	43	17	98	39
23	00	18	00	34	20	17	37	28	10

۸۳	۳۹	۲۹	۳۷	۴۴	۴۳	۳۲	۷۳	۸۶	۵۲
۹۸	۲۵	۱۹	۰۷	۳۲	۶۴	۸۹	۸۱	۷۱	۴۷
۶۱	۵۵	۲۵	۲۵	۶۶	۵۹	۸۴	۶۹	۹۵	۷۲
۷۲	۲۸	۱۱	۷۲	۱۶	۲۴	۶۱	۲۹	۹۴	۱۹
۴۵	۷۶	۰۳	۵۳	۱۲	۰۳	۴۰	۳۶	۲۲	۲۶
۵۸	۵۷	۷۶	۱۱	۷۵	۱۹	۶۶	۱۵	۶۵	۳۷
۲۲	۱۲	۹۹	۱۲	۳۶	۴۸	۵۰	۸۳	۹۰	۳۵
۸۸	۱۵	۸۰	۹۴	۹۶	۳۹	۹۹	۷۲	۵۸	۸۰
۱۳	۰۸	۳۷	۵۸	۲۵	۷۴	۹۱	۳۵	۰۶	۳۰
۷۵	۰۴	۶۲	۵۳	۳۲	۶۰	۲۴	۲۴	۵۲	۱۶
۷۵	۶۴	۴۵	۴۹	۷۱	۸۹	۲۲	۳۵	۳۵	۰۳
۵۷	۸۴	۹۱	۲۶	۳۸	۸۶	۷۳	۰۶	۰۷	۳۴
۳۴	۰۱	۴۲	۳۰	۸۸	۲۵	۷۳	۴۵	۱۸	۸۰
۷۵	۳۸	۶۹	۱۲	۷۵	۳۶	۹۶	۹۳	۴۸	۱۸
۲۱	۶۳	۶۳	۷۵	۶۹	۴۰	۶۰	۳۰	۹۱	۳۵
۳۷	۵۶	۷۳	۷۸	۱۱	۷۳	۳۱	۳۱	۹۶	۵۶
۱۹	۹۸	۶۴	۸۲	۶۷	۳۸	۷۸	۶۶	۳۲	۷۸

33	70	73	71	30	73	19	27	31	33
10	71	32	28	07	70	23	22	22	28
70	27	80	17	96	27	22	22	37	18
30	97	10	88	17	78	33	27	23	02
01	20	22	77	76	76	01	39	78	86

الباب الخامس

توزيعات المعاينة (العينات الكبيرة)

توزيعات المعاينة

(العينات الكبيرة)

(١-٥) - مقدمة :

في هذا الباب نقدم بعض الطرق الإحصائية التي تمكننا من استخدام العينات العشوائية في التعرف على خواص المجتمعات التي سحبت منها هذه العينات . فإذا كنا نهتم بمعرفة متوسط أجر العامل في صناعة معينة مثل صناعة المنسوجات فيمكن سحب عينة عشوائية من العمال في هذه الصناعة ونحسب متوسطها - نفرض أننا وجدنا متوسط أجر العامل في العينة هو ٣ آلاف ريال في الشهر فليس معنى ذلك أن يكون متوسط أجر العامل في الصناعة كلها ٣ آلاف ريال . وذلك لأن هذه العينة العشوائية قد يظهر فيها بالصدفة البحتة عدد كبير من العمال ذوي الأجور المرتفعة وبالتالي يكون متوسط أجر العامل في العينة أعلى من متوسط الأجر الحقيقي في المجتمع وقد يحدث العكس بأن تشتمل العينة على عدد كبير من العمال ذوي الأجور المنخفضة مما يجعل متوسط أجر العامل في العينة أقل من متوسط الأجر الحقيقي في المجتمع . وكما ترى تكون الصدفة وحدها هي التي قد تسبب هذه الاختلافات بالزيادة أو بالنقص بين متوسط الأجر في العينة ومتوسط الأجر في المجتمع . وهذا هو خطأ الصدفة الذي سبق أن تكلمنا عنه في الباب السابق و يهمننا الآن أن ندرس تأثير هذا الخطأ على أي مقياس إحصائي نحسبه من العينة سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو غيره من المقاييس . ولنبدأ الآن بدراسة أثر خطأ الصدفة على الوسط الحسابي للعينة وإلى أي حد يمكن أن يختلف عن الوسط الحسابي للمجتمع بفعل تأثير هذا الخطأ .

(٢-٥) - توزيعات المعاينة :

نفرض أن لدينا مجتمعا من المفردات يتبع توزيعا احتماليا معيناً (سواء كان هذا المجتمع كبيراً أو محدوداً) وأنها بصدد سحب عينة حجمها n من هذا المجتمع . بالطبع ليس معنى هذا أن هناك عينة واحدة يمكن سحبها ولكن يكون أمامنا عدد كبير من العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع والتي حجم كل منها هو n من المفردات .

والآن نفرض أننا سحبنا عينة حجمها n من هذا المجتمع وحسبنا من هذه العينة مقياساً معيناً (وليكن الوسط الحسابي) ثم سحبنا عينة ثانية لها نفس الحجم n وحسبنا منها نفس المقياس ثم سحبنا عينة ثالثة وحسبنا منها نفس المقياس وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع . سنجد أمامنا عدداً كبيراً من القيم لنفس المقياس ولا نتوقع أن تكون جميع القيم التي حصلنا عليها من العينات لهذا المقياس متساوية وإنما ستكون مختلفة عن بعضها وتكون مجتمعا آخر .

عدد مفرداته أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي . وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس على أنه متغير عشوائي يأخذ قيما مختلفة (هي التي حصلنا عليها من هذه العينات) و يتبع توزيعا معيناً ربما يختلف أو لا يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي يسمى بتوزيع المعاينة لهذا المقياس سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو نسبة المفردات التي لها صفة معينة أو الانحراف المعياري أو غيره من المقاييس الإحصائية .

مثال (١) : مجتمع مكون من ١٠ مفردات سحبت عينات حجمها ٣ من هذا المجتمع وحسبت من كل عينة مقياس احصائي معين (وليكن الوسط الحسابي) فكم قراءة يتكون منها مجتمع هذا المقياس ؟

الحل

عدد مفردات المجتمع الأصلي = ١٠ مفردات

حجم العينة = ٣ مفردات

إذن عدد العينات التي يمكن سحبها = $10 \text{ ق } 3 = 120$

وحيث أننا نحسب المقياس لكل عينة

إذن مجتمع هذا المقياس يتكون من ١٢٠ قراءة .

و بالمقارنة نجد أن عدد مفردات مجتمع المقياس أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي .

(٣-٥) - المجتمعات الكبيرة والمجتمعات المحدودة :

في دراستنا لتوزيعات المعاينة لا بد أن نفرق بين العينات المسحوبة من مجتمعات كبيرة أو لا نهائية وبين العينات المسحوبة من مجتمعات محدودة . فعند سحب عينة من المصاييح من إنتاج مصنع معين فإننا بلا شك نسحب من مجتمع كبير هو إنتاج المصنع . ولكن عند سحب عينة من طلبة قسم المحاسبة في كلية الاقتصاد والادارة في العام الحالي فإننا بلا شك نسحب من مجتمع محدود هو طلبة قسم المحاسبة لهذا العام . وكذلك عند سحب عينة مكونة من عشرة مفردات من بين مجتمع مكون من مائة مفردة . في هذه الحالة إذا كان في الإمكان سحب المفردة أكثر من مرة يمكن اعتبار المجتمع لا نهائياً أو كبير ولكن إذا لم يكن مسموحاً بسحب المفردة أكثر من مرة يكون المجتمع محدوداً . وأيضاً عند سحب كرات من كيس به عدد من الكرات فإذا كان السحب مع الإعادة فإننا نعتبر المجتمع الذي نسحب منه كأنه مجتمعاً لا نهائياً ونعامله على أنه مجتمع غير محدود وإذا كان السحب بدون إعادة فإننا نعتبر المجتمع الذي نسحب منه مجتمعاً محدوداً . وما هو جدير بالذكر أننا نهتم بالترقية بين المجتمع الكبير والمجتمع المحدود بسبب اختلاف خصائص توزيعات المعاينة للعينات المسحوبة من المجتمعات الكبيرة عن تلك المسحوبة من المجتمعات المحدودة كما سيتضح من دراستنا التالية .

(٤-٥) - مجتمع المتوسطات الحسابية وبعض خصائصه:

نفرض أن لدينا مجتمعا ولتكن مفرداته هي:

$$١٣ ، ٢٣ ، ٣٣ ، ٤٣ ، ٥٣ ، \dots$$

ونفرض أننا سحبنا من هذا المجتمع عينة حجمها n وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه \bar{s} ثم سحبنا عينة أخرى لها نفس الحجم وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه \bar{s}_2 ، ثم عينة ثالثة لها نفس الحجم ووجدنا أن وسطها الحسابي \bar{s}_3 وهكذا بالنسبة لكل العينات التي حجمها n والتي يمكن سحبها من هذا المجتمع. سنجد في النهاية أننا سنحصل على مجموعة جديدة من المفردات هي المتوسطات الحسابية لهذه العينات وهي تكون مجتمعا جديدا يسمى مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجمها n والتي يمكن سحبها من المجتمع الأصلي ويمكن كتابة مفردات المجتمع الجديد على النحو التالي:

$$\bar{s}_1 ، \bar{s}_2 ، \bar{s}_3 ، \bar{s}_4 ، \dots$$

وهذه المتوسطات تختلف عن بعضها تبعا لتأثير خطأ الصدفة على كل عينة كما أنها تكون مجتمعا جديدا له توزيع احتمالي يهمنها معرفته ودراسته. ومجتمع المتوسطات الحسابية \bar{s} كأى مجتمع آخر له توزيع احتمالي يتمتع بجميع صفات وخواص التوزيعات الاحتمالية وبالطبع له متوسط وانحراف معياري فلو كان:

$$\mu = \text{متوسط المجتمع الأصلي}$$

$$\sigma = \text{والانحراف المعياري للمجتمع الأصلي}$$

فيمكن باستخدام النظريات الإحصائية والرياضية إثبات أن:

$$\mu = \text{متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجم كل منها } n \text{ هو}$$

$$\sigma = \text{والانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية}$$

إذا كان المجتمع كبيرا.

$$\left. \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} =$$

$$\left. \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right\} =$$

وهذا يعني أن متوسط مجتمع المتوسطات هو نفسه متوسط المجتمع الأصلي. والانحراف المعياري هو الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي مضروبا في عامل معين. وهذه المعلومات صحيحة مهما اختلف التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات عن التوزيع الاحتمالي للمجتمع الأصلي.

وإذا نظرنا إلى الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات نلاحظ أن مجتمع المتوسطات أكثر تجانساً من المجتمع الأصلي أى أن مفرداته متجانسية وغير متشتتة إذا قورنت بمفردات المجتمع الأصلي وهذا من أهم الأسباب التي تجعلنا نعتمد على مجتمع المتوسطات في الاستدلال حول معالم المجتمع الأصلي.

فإذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي = ١٥

وحجم العينة = ١٠٠ مفردة

$$\text{فإن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات} = \frac{15}{\sqrt{100}} = 1.5$$

وهذا يوضح أن مجتمع المتوسطات أكثر تجانساً بقدر واضح من المجتمع الأصلي.

مثال (٢) : نفرض أن لدينا مجتمعاً مكوناً من المفردات التالية:

٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨

والمطلوب :

(أ) حساب متوسط المجتمع الأصلي.

(ب) حساب الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي.

(ج) حصر جميع العينات التي حجم كل منها مفردتين ويمكن سحبها مع الإرجاع.

(د) حساب المتوسط الحسابي لكل عينة.

(هـ) حساب متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية μ (٣٠).

(و) حساب الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية σ (٣٠).

(ز) قارن بين μ و μ (٣٠) وكذلك بين σ و σ (٣٠).

الحل

$$\text{(أ) متوسط المجتمع الأصلي } \mu = \frac{2 + 4 + 5 + 6 + 8}{5} = 5$$

(ب) الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي

$$\sigma = \sqrt{\frac{2^2(5-8) + 4^2(5-6) + 5^2(5-5) + 6^2(5-2)}{5}} =$$

(ج) بما أن حجم العينة $n = 2$

إذن كل العينات الممكنة سحبها مع الإرجاع من هذا المجتمع هي:

(٢ ، ٢) (٢ ، ٤) (٤ ، ٢) (٤ ، ٤) (٥ ، ٢) (٥ ، ٤) (٦ ، ٢) (٦ ، ٤) (٨ ، ٢) (٨ ، ٤)

(٢ ، ٤) (٤ ، ٤) (٥ ، ٤) (٦ ، ٤) (٨ ، ٤)

$$(٨ , ٥) (٦ , ٥) (٥ , ٥) (٤ , ٥) (٢ , ٥)$$

$$(٨ , ٦) (٦ , ٦) (٥ , ٦) (٤ , ٦) (٢ , ٦)$$

$$(٨ , ٨) (٦ , ٨) (٥ , ٨) (٤ , ٨) (٢ , ٨)$$

وعدد العينات هنا ٢٥ وهو يساوي تماما عدد طرق سحب مفردتين من بين ٥ مفردات عندما يكون السحب مع الإعادة وهو $٥ \times ٥ = ٢٥$ طريقة .

(د) والمتوسطات الحسابية لهذه العينات هي :

٥	٤	٣ر٥	٣	٢
٦	٥	٤ر٥	٤	٣
٦ر٥	٥ر٥	٥	٤ر٥	٣ر٥
٧	٦	٥ر٥	٥	٤
٨	٧	٦ر٥	٦	٥

والقيم السابقة تمثل مجتمع المتوسطات الحسابية حيث أن أول مفردة هي الوسط الحسابي للعيينة الأولى ($\bar{x} = \frac{٢ + ٢}{٢} = ٢$) وثاني مفردة هي الوسط الحسابي للعيينة الثانية

$$(\bar{x} = \frac{٤ + ٢}{٢}) وهكذا .$$

(هـ) و يكون متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية هو:

$$\bar{x} = \frac{١٢٥}{٢٥} = \frac{٨ + ٧ + ٥ + ٣ر٥ + ٣ + ٢}{٢٥} = (\bar{x})$$

وهي نفس قيمة μ .

(و) وكذلك الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية هو:

$$\sigma = \sqrt{\frac{٢(٥-٨)^٢ + ٢(٥-٧)^٢ + \dots + ٢(٥-٣ر٥)^٢ + ٢(٥-٣)^٢ + ٢(٥-٢)^٢}{٢٥}}$$

$$\sigma = \sqrt{٧}$$

(ز) وللمقارنة بين كل من μ ، $\mu(\bar{x})$ وكذلك بين σ و $\sigma(\bar{x})$

نجد أن:

$$\mu = \mu(\bar{x}) \text{ حيث أن كل منهما } = ٥$$

$$\sqrt{2} \sigma = (\bar{s}) \sigma \quad , \quad 2 = \sigma$$

$$\sqrt{2} \sigma = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = (\bar{s}) \sigma \quad \therefore$$

المثال السابق يعتبر مثالا عن حالة سحب عينة من مجتمع محدود ولكن السحب مع الإعادة أي أن كل مفردة يمكن تكرار تمثيلها في العينة مثل العينات:

$$(8, 8) - (6-6) - (5-5) - (4, 4) - (2, 2)$$

كما أن المفردتين (4, 2) يعتبران عينة والمفردتين (2-4) يعتبران عينة أخرى وهذه الحالة نعاملها معاملة المجتمعات غير المحدودة كما ذكرنا سابقا عند الكلام عن المجتمعات الكبيرة والمجتمعات المحدودة أما حالة السحب بدون إعادة فتعتبر كحالة السحب من مجتمع محدود لذلك لا بد لنا من مناقشة حالة السحب بدون إعادة من مجتمعات محدودة لمعرفة الفرق بين الحالتين .

فيما سبق ذكرنا في حالة السحب من مجتمع غير محدود أن متوسط مجتمع المتوسطات $\mu / (\bar{s})$ هو نفسه متوسط المجتمع الأصلي μ - أي أن $\mu = (\bar{s}) \mu$

كذلك وجدنا أن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات $\sigma / (\bar{s})$ يساوي الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي σ مقسوما على $\sqrt{2}$ أي أن $\sigma / (\bar{s}) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ ولكن الحال يختلف عند السحب بدون إعادة من مجتمع محدود له حجم معين وليكن n . سنجد أن الوسط الحسابي لمجتمع المتوسطات يساوي الوسط الحسابي للمجتمع الأصلي مثل الحالة السابقة تماما - ولكن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات في هذه الحالة يساوي الانحراف المعياري مقسوما على $\sqrt{2}$ ومضروبا في عامل معين هو $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$

حيث n هي حجم المجتمع ، v هي حجم العينة أي أن

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} = (\bar{s}) \sigma$$

ولتوضيح الفرق بين الحالتين ستقدم المثال التالي:

مثال (3) : نفرض أن لدينا نفس المجتمع الموجود في المثال السابق والذي مفرداته: 2، 4، 5، 6،

٨ .

والمطلوب:

(أ) حساب متوسط المجتمع الأصلي μ .

(ب) حساب الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي σ .

- (ج) حصر جميع العينات التي حجم كل منها مفردتين ويمكن سحبها بدون إرجاع .
 (د) حساب المتوسط الحسابي لكل عينة .
 (هـ) حساب متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية μ (\bar{x}) .
 (و) حساب الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية σ (\bar{s}) .
 (ز) قارن بين μ و μ (\bar{x}) وكذلك بين σ و σ (\bar{s}) .

الحل

(أ) $\mu = 5$ كما في المثال السابق

(ب) $\sigma = \sqrt{27}$ كما في المثال السابق

(ج) العينات التي حجم كل منها $n = 2$ والتي يمكن سحبها بدون إعادة هي :

(٤ ، ٢) (٥ ، ٢) (٦ ، ٢) (٨ ، ٢)

(٥ ، ٤) (٦ ، ٤) (٨ ، ٤)

(٦ ، ٥) (٨ ، ٥)

(٨ ، ٦)

ويجب ملاحظة أنه عند سحب العينة نقوم أولاً بسحب مفردة ثم نحتفظ بها ونسحب مفردة أخرى غيرها فلا يمكن أن يكون لدينا مثلاً عينة (٢، ٢) أو (٤، ٤) كما أن العينة (٤، ٢) هي نفس العينة (٢، ٤) أي لا نعتبرهما عينتين مختلفتين كما في المثال السابق .

(د) وبحساب المتوسط الحسابي لكل عينة نحصل على مجتمع المتوسطات في الصورة التالية :

٥	٤	٣٥	٣
	٦	٥	٤٥
		٦٥	٥٥

٧

(هـ) و يكون متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية هو

$$\mu = \frac{٧ + ٦٥ + ٥٥ + ٤ + ٣٥ + ٣}{١٠} = ٥ (\bar{x})$$

وهو نفس متوسط المجتمع الأصلي .

(و) و يكون كذلك الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية هو

$$\sqrt{\frac{(5-7)^2 + \dots + (5-30)^2 + (5-3)^2}{10}} = (\bar{x})\sigma$$

$$\sqrt{10} =$$

(ز) وللمقارنة بين μ و $\mu_{(3)}$ وكذلك بين σ و $\sigma_{(3)}$

$$\text{نجد أن: } \mu = \mu_{(3)} = 5$$

كما أن:

$$(\bar{x})\sigma = \sqrt{10} = \frac{2-5}{1-5} \sqrt{\frac{2}{27}} = \frac{3-3}{1-3} \sqrt{\frac{\sigma}{27}}$$

$$\therefore (\bar{x})\sigma = \frac{3-3}{1-3} \sqrt{\frac{\sigma}{27}}$$

(5-5) - التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية:

حتى الآن لم نتعرض لتوزيع مجتمع المتوسطات الحسابية - كل ما تعرضنا له هو الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ولكن شكل ونوع التوزيع الاحتمالي نفسه يعتمد على توزيع المجتمع الأصلي المسحوب منه العينات. وفيما يلي بعض النظريات الإحصائية التي تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية نذكرها بدون إثبات وذلك لأننا سوف نستخدمها كثيرا في الاستدلال حول معالم المجتمع الأصلي:

نظرية (1): إذا كان لدينا مجتمع نرمز لمفرداته بالرمز s يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري σ وسحبنا منه عينات حجم كل منها n فإن الوسط الحسابي \bar{x} للعينات يتبع كذلك

$$\text{توزيعا طبيعيا وسطه } \mu_{(3)} = \mu$$

وانحرافه المعياري:

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان المجتمع كبيرا} \\ \text{إذا كان المجتمع الأصلي محدودا وحجمه } n \end{array} \right\} = (\bar{x})\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

مثال (4): إذا كان أطوال طلاب الجامعات يتبع توزيعا طبيعيا وسطه 170 سم وانحرافه المعياري

٨ سم — سحبت منه عينة مكونة من ٦٤ طالبا فما احتمال أن يكون متوسط أطوالهم أكبر من ١٧٢ سم؟

الحل

$$\mu = ١٧٠ \text{ سم}$$

$$\sigma = ٨ \text{ سم}$$

$$\mu = (\bar{X}) = ١٧٠ \text{ سم}$$

$$\sigma = \frac{٨}{\sqrt{٦٤}} = (\bar{X}) = ١ \text{ سم}$$

وحيث أن المجتمع كبير فإن

وحيث أن المجتمع الأصلي س يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٧٠ سم وانحرافه المعياري ٨ سم فإن مجتمع المتوسطات س يتبع كذلك توزيعا طبيعيا وسطه ١٧٠ سم وانحرافه المعياري ١ سم .

والمطلوب حساب $P(\bar{X} \leq ١٧٢)$.
نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{١٧٠ - \bar{X}}{١}$$

$$\text{عندما } \bar{X} = ١٧٢$$

$$\text{فان } Z = \frac{١٧٠ - ١٧٢}{١} = -٢$$

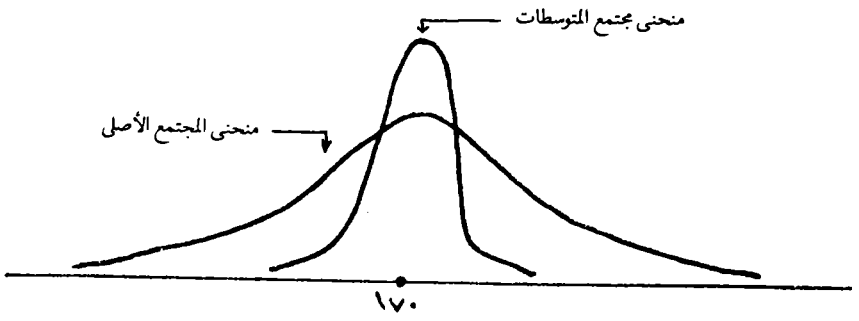
$$\text{إذن } P(\bar{X} \leq ١٧٢) = P(Z \leq -٢)$$

$$= ٠.٠٥٤٠ - ٠.٠٥٤٠ = ٠.٠٠٠٠$$

$$= ٠.٠٥٤٠ - ٠.٠٥٤٠ = ٠.٠٠٠٠$$

$$= ٠.٠٠٠٠$$

ملحوظة (١) : بمقارنة الانحرافين المعياريين لكل من المجتمع الأصلي ومجتمع المتوسطات يبرز مدى تجانس مجتمع المتوسطات عن المجتمع الأصلي ويمكن إيضاح ذلك برسم توزيع المجتمع الأصلي وتوزيع مجتمع المتوسطات في المثال السابق على رسم واحد كما يلي :



نظرية (٢) : إذا كان لدينا مجتمع س يتبع توزيعا احتماليا وسطه μ وانحرافه المعياري σ سحبنا منه عينات حجمها n وكانت n كبيرة فإن الوسط الحسابي \bar{x} يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري σ/\sqrt{n} :

إذا كان المجتمع كبيرا

$$\sigma/\sqrt{n} = (\sigma/\sqrt{n})$$

إذا كان المجتمع محدودا وحجمه n

$$\sigma/\sqrt{n} \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

تسمى هذه النظرية بنظرية النزعة المركزية وهي توضح أن توزيع المتوسطات الحسابية يتبع توزيعا طبيعيا بصرف النظر عن نوع التوزيع الاحتمالي للمجتمع الأصلي . كل ما نحتاج إليه أن يكون حجم العينة كبيرا وأن يكون المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع محدودا .

ملحوظة (٢) : تعتبر العينة كبيرة إذا زاد حجمها عن ٣٠ مفردة كما أن المجتمع المحدود يجب أن يكون حجمه أكبر من ضعف حجم العينة .

مثال (٥) : إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع تتبع التوزيع الاحتمالي التالي :

$$d(x) = 12x^2 (x-1) \quad \text{حيث } 0 \leq x \leq 1$$

سحبت عينة حجمها ١٠٠ مصباح فاحسب احتمال أن متوسط أعمارها يقل عن ٧٥ شهر.

الحل

$$\int_0^1 12x^2 (x-1) dx = \mu$$

$$12 = \int_0^1 12x^3 (x-1) dx$$

$$12 = \left[\frac{5}{0} - \frac{4}{4} \right]$$

$$12 = \left[\frac{1}{20} \right] \text{ سنة } 0.6$$

$$0.6 = \left[\frac{1}{20} \right] \text{ سنة } 0.6$$

$$12 = \left[\frac{5}{0} - \frac{4}{4} \right] \text{ سنة } 0.6$$

$$0.36 = \left[\frac{5}{0} - \frac{4}{4} \right]$$

$$12 = \left[\frac{1}{20} \right]$$

$$0.40 = 0.36 - 0.04$$

$$\therefore 0.2 = \sqrt{0.04} = \sigma$$

$$0.6 = \mu = (\bar{x}) \mu$$

$$0.2 = \frac{0.2}{1.00} = \frac{\sigma}{1.00} = (\bar{x}) \sigma$$

وحيث إن حجم العينة كبير ($n=100$) فإن \bar{x} تتبع توزيعا طبيعيا وسطه 0.6 سنة وانحرافه

المعياري 0.2 سنة والمطلوب حساب h ($\bar{x} \geq \frac{1}{4} 7$ شهر)

$$\frac{1}{4} 7 \text{ شهر} = \frac{15}{24} = \text{من السنة}$$

$$= 0.625 \text{ سنة}$$

أي أن المطلوب حساب h ($\bar{x} \geq 0.625$)

نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$ص = \frac{\bar{س} - ٠.٠٦}{٠.٠٢}$$

$$\text{عندما } \bar{س} = ٠.٠٦٢٥$$

$$ص = \frac{٠.٠٦ - ٠.٠٦٢٥}{٠.٠٢} = \frac{٠.٠٢٥}{٠.٠٢} = ١.٢٥$$

$$\therefore ح (\bar{س} \gg ٠.٠٦٢٥) = ح (ص \gg ١.٢٥)$$

$$= ٠.٠٥ + ح (صفر \gg ص \gg ١.٢٥)$$

$$= ٠.٠٥ + ٠.٣٩٤٤$$

$$= ٠.٩٩٤٤$$

مثال (٦): إذا كانت الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق تتبع توزيع بواسون بمتوسط حادثتين— أخذت عينة مكونة من ٦٤ أسبوعا فما احتمال أن يكون متوسط الحوادث فيها يزيد عن ٢.٢ حادثة؟

الحل

من التوزيع البواسوني نعلم أن: $\mu = ٢$

$$\sigma = ٢$$

$$\therefore \sigma = ٢$$

$$\mu = (\bar{س}) \mu$$

$$\sigma = (\bar{س}) \sigma = \frac{٢}{٨} = \frac{٢٧}{٦٤٧} = \frac{٥}{٥٧}$$

وحيث إن حجم العينة كبير ($n = ٦٤$) فإن $\bar{س}$ تتبع توزيعا طبيعيا وسطه ٢ وانحرافه المعياري

$$٠.١٧٧ \text{ والمطلوب حساب } ح (\bar{س} \leq ٢.٢)$$

نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$s = \frac{2 - \bar{s}}{177}$$

$$\text{عندما } \bar{s} = 2.2$$

$$s = \frac{2 - 2.2}{177} = \frac{-0.2}{177} = -0.00113$$

$$c: (s \leq 2.2) = c (s \leq -0.00113)$$

$$= 0.5 - c (0.00113 \leq s \leq 0.00113)$$

$$= 0.5 - 0.0000008 = 0.4999992$$

(٥-٦) - التوزيع الاحتمالي لمجتمع النسب:

عندما تكلمنا عن توزيعات المعاينة في البند (٥-٢) ذكرنا أنها توزيعات احتمالية للمقاييس الإحصائية التي نحسبها من العينات كما ذكرنا أن الوسط الحسابي \bar{s} والانحراف المعياري s للعينة ونسبة المفردات في العينة التي لها صفة معينة هي بعض هذه المقاييس وفي البند السابق حصلنا على التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية والآن نتعرف على التوزيع الاحتمالي لمجتمع النسب وسوف نتبع نفس الأسلوب الذي سلكناه في تقديم التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية.

نفرض أن لدينا مجتمعا كبيرا ونسبة المفردات التي لها صفة معينة في هذا المجتمع هي P فإذا سحبنا من المجتمع عينة عشوائية كبيرة من المفردات حجمها n ووجدنا أن من بينها r مفردة لها هذه الصفة المعينة الموجودة في المجتمع فإن النسبة $\frac{r}{n}$ والتي سنرمزها بالرمز \bar{p} تعتبر متغيرا عشوائيا لأنها تتغير من عينة لأخرى. وبالتالي فإن هذه النسبة \bar{p} يكون لها توزيع احتمالي تحدده النظرية التالية:

نظرية (٢): إذا كانت P هي نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما وسحبت من هذا المجتمع عينات كبيرة حجم كل منها n وكانت \bar{p} تمثل نسبة هذه الظاهرة في العينات فإن \bar{p} تتبع توزيعا طبيعيا وسطه P وانحرافه المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

مثال (٧): إذا علم أن نسبة الأحذية المعيبة التي تنتجها إحدى الآلات هي ٣% فإذا اشترى أحد المعارض ٤٠٠ حذاء من إنتاج هذه الآلة فما هو احتمال:

أ - أن يجد ٢٠ حذاء على الأقل معيبا؟

ب- أن يجد ١٦ حذاء على الأكثر معيبا؟

الحل

نسبة الأحذية المعيبة في إنتاج الآلة (المجتمع) $P = 0.03$.

وحجم العينة $n = 400$

نفرض أن نسبة الأحذية المعيبة في العينة $= L$

نعلم أن L تتبع توزيعا طبيعيا وسطه 0.03 وانحرافه المعياري:

$$0.0085 = \frac{0.03 \times 0.97}{\sqrt{400}} = \frac{(P-1)P}{n} = (L) \sigma$$

أ- والمطلوب معرفة احتمال أن يكون عدد الأحذية المعيبة في العينة ٢٠ حذاء على الأقل.

$$\text{ولكن العشرين حذاء تمثل نسبة } L = \frac{20}{400} = 0.05$$

في العينة وبهذا يكون المطلوب معرفة احتمال أن تكون نسبة المعيب في العينة 0.05 فأكثر أي

المطلوب:

$$\text{حساب } P(L \leq 0.05)$$

$$\frac{L - 0.03}{0.0085} = \frac{P - 0.03}{(L) \sigma} = \text{ضع : } z$$

∴ z تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا

$$\text{عندما } L = 0.05$$

$$\text{فإن } z = \frac{0.05 - 0.03}{0.0085} = 2.35$$

$$\therefore P(L \leq 0.05) = P(z \leq 2.35)$$

$$= 0.95 - P(z > 2.35) = 0.95 - 0.0094 = 0.9406$$

$$= 0.9406 - 0.0094 = 0.9312$$

ب- المطلوب معرفة احتمال أن يكون عدد الأحذية المعيبة في العينة ١٦ حذاء على الأكثر-

أي أن تكون نسبة الأحذية المعيبة في العينة هي $L = \frac{16}{400} = 0.04$ على الأكثر. أي المطلوب

حساب

$$P(L \geq 0.04)$$

نضع :

$$\frac{P - \mu}{(\mu) \sigma} = \text{ص}$$

$$\frac{0.03 - \mu}{0.0085} =$$

∴ ص تتبع توزيع طبيعي قياسي

$$\text{عندما } \mu = 0.04$$

$$\text{فإن ص} = \frac{0.03 - 0.04}{0.0085} = 1.18$$

$$\text{∴ ح} (\mu \geq 0.04) = \text{ح} (\text{ص} \geq 1.18)$$

$$= 0.05 + \text{ح} (\text{صفر} \geq \text{ص} \geq 1.18)$$

$$= 0.05 + 0.3810 = 0.4310$$

مثال (٨) : إذا كانت نسبة الطلاب الراسيين في جامعة ما هي ٩% وأخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠٠ طالب. فما هو احتمال أن نجد في هذه العينة ٧٠ طالبا على الأكثر راسيين؟

الحل

نسبة الطلاب الراسيين في الجامعة = ٠.٠٩

وحجم العينة $n = 1000$ طالب

نفرض أن $ل$ هي نسبة الطلاب الراسيين في عينات حجمها ١٠٠٠ طالب

∴ $ل$ تتبع توزيعا طبيعيا وسطه = ٠.٠٩ وانحرافه المعياري

$$\sigma = (\mu) \sigma = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.09 \times 0.91}{1000}} = 0.009$$

وبما أن عدد الطلاب الراسيين في العينة ٧٠ طالبا

نسبة الطلاب الراسيين في العينة = ٠.٠٧

والمطلوب هو حساب:

$$\text{ح} (\mu \geq 0.07)$$

نضع

$$\text{ص} = \frac{\mu - 0.07}{0.009}$$

∴ ص تتبع توزيع طبيعي قياسي

$$\text{عندما } l = 0.7$$

$$ص = \frac{0.7 - 0.9}{0.09} = \frac{0.2 - 0.9}{0.09} = -2.22$$

$$\therefore ح (l \geq 0.7) = ح (ص \geq -2.22)$$

$$= 0.5 - ح (ص \leq -2.22)$$

$$= 0.5 - 0.0122$$

$$= 0.4878$$

(٧-٥) - التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق بين متوسطين :

نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين من المفردات هما:

$$113, 213, \dots$$

$$133, 233, \dots$$

متوسط الأول μ_1 وتباينه σ_1^2 ومتوسط الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2 فإذا سحبنا عينة من المجتمع الأول حجمها n_1 مفردة ووجدنا وسطها الحسابي \bar{x}_1 وانحرافها المعياري s_1 وسحبنا عينة من المجتمع الثاني حجمها n_2 مفردة ووجدنا وسطها الحسابي \bar{x}_2 وانحرافها المعياري s_2 نفرض أننا حسبنا الفرق بين الوسطين فوجدنا:

$$ف = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

نلاحظ أن \bar{x}_1 ما هي لإقراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها n_1 والمسحوبة من المجتمع الأول و \bar{x}_2 ما هي كذلك لإقراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها n_2 مفردة والمسحوبة من المجتمع الثاني، وعلى ذلك فإن F تعتبر قراءة في مجتمع ثالث هو مجتمع الفروق بين متوسطات العينات التي يمكن أخذها من المجتمعين والتي حجمها n_1 مفردة من المجتمع الأول و n_2 من المجتمع الثاني. والنظرية الآتية تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق $F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ عندما يكون حجم العينات كبيراً.

نظرية (٣): مجتمع الفروق F يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه $(\mu_1 - \mu_2)$ وانحرافه المعياري σ (ف)

$$\sigma (ف) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

مثال (٩) : مصنعان لإنتاج المصابيح الكهربائية متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول ١٥٠٠ ساعة وانحرافه المعياري ٢٠٠ ساعة بينما متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني ١٢٠٠ ساعة وانحرافه المعياري ١٥٠ ساعة سحبت عينة عشوائية حجمها ١٥٠ مصباحا من المصنع الأول وعينة أخرى حجمها ١٢٥ مصباحا من إنتاج المصنع الثاني لاختبارهما فأوجد :

إحتمال أن يزيد متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول ٢٥٠ ساعة على الأقل عن متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني

الحل

$$\mu_1 = 1500 \text{ ساعة}$$

$$\sigma_1 = 200 \text{ ساعة}$$

$$n_1 = 150 \text{ مصباح}$$

$$\mu_2 = 1200 \text{ ساعة}$$

$$\sigma_2 = 150 \text{ ساعة}$$

$$n_2 = 125 \text{ مصباح}$$

نفرض أن \bar{X} هي متوسط عمر المصباح في العينة المسحوبة من المصنع الأول و \bar{Y} هي متوسط عمر المصباح في العينة المسحوبة من المصنع الثاني .

$$\therefore F = (\bar{X} - \bar{Y})$$

ف تتبع توزيعا طبيعيا وسطه $(\mu_1 - \mu_2)$ وانحرافه المعياري هو:

$$\sigma(F) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= 21 \text{ ساعة} = \sqrt{\frac{(150)^2}{125} + \frac{(200)^2}{150}}$$

و يكون المطلوب حساب :

$$P(F \leq 250)$$

$$P(F \leq 250) = \frac{250 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(F)} = \frac{250 - 300}{21}$$

حيث ص تعتبر متغيرا طبيعيا قياسيا .

عندما $F = 250$

$$ص = \frac{250}{21} - \frac{50}{21} = \frac{200}{21} = 238$$

$$\therefore ح (ف < 250) = ح (ص < 238)$$

$$= 0.95 + ح (ص > 238)$$

$$= 0.95 + 0.491 = 0.991$$

ملحوظة (3): إذا كانت العينتان مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس المتوسط (أي أن $\mu = \mu$) فإن مجتمع الفروق يكون له توزيع طبيعي وسطه الصفر وانحرافه المعياري σ (ف) حيث أن σ (ف) كما هي معرفة سابقا.

(5-8) - التوزيع الاحتمالي لمجتمع الانحرافات المعيارية:

نفرض أن لدينا مجتمعا كبيرا من المفردات له توزيع طبيعي وسطه μ وانحرافه المعياري σ ونفرض أننا سحبنا عينات حجم كل منها n من هذا المجتمع وحسبنا التباين s^2 لكل عينة - حيث:

$$E = \frac{1}{n} \sum (s - \bar{s})^2$$

، s هي مفردات العينة

نجد أن قيمة E تتغير من عينة لأخرى وعلى ذلك فإن E متغير عشوائي له توزيع احتمالي.

تعطيه النظرية الآتية:

نظرية (4): $\frac{E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ متغير عشوائي يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية $(n-1)$. ويعتبر التوزيع الاحتمالي للمقدار $\frac{E}{\sigma^2}$ من التوزيعات الاحتمالية التي يتطلب منا استخدامها المباشر في النواحي التطبيقية دراسة في نظرية الاحتمالات أعمق مما يمكن تقديمه على مستوى هذا الكتاب - لهذا نكتفي بذكر هذا التوزيع كما هو موضح في الفقرة السابقة وذلك حتى يمكن الاستفادة منه في الباب التالي عندما نتكلم عن تقدير فترة ثقة لتباين المجتمع σ^2 .

تمارين

- ١ مجتمع مكون من المفردات ٦، ٩، ١١، ١٥، ١٧
احصر كل العينات الممكن سحبها (مع الإرجاع) من هذا المجتمع والتي حجم كل منها مفردتان ثم أوجد:
أ — متوسط المجتمع وانحرافه المعياري .
ب — متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات وانحرافه المعياري .
ج — تحقق من صحة نتائجك بمقارنة النتائج في أ، ب .
- ٢ — حل التمرين السابق إذا كان سحب مفردات العينة من المجتمع يتم بدون إرجاع .
- ٣ — مصنع لإنتاج نوع معين من المصابيح الكهربائية — إذا علم أن متوسط عمر المصباح من إنتاج هذا المصنع ٨٠٠ ساعة والانحراف المعياري ٦٠ ساعة سحبت عينة عشوائية حجمها ٦٤ مصباحا فما هو احتمال أن متوسط عمر المصباح في العينة:
أ — ينحصر بين ٧٩٠، ٨١٠ ساعة؟
ب — يقل عن ٧٨٥ ساعة؟
ج — يزيد عن ٨٢٠ ساعة؟
- ٤ — وصل إلى أحد مستودعات للتخزين نوع معين من الطرود متوسط وزن كل منها ٨٠ كيلوجرام وانحرافه المعياري ١٦ كيلوجرام — فإذا وضع عشوائيا ٢٥ طردا على مصعد داخل المخزن لرفعهما إلى مكان تخزينها . فما هو احتمال أن لا تزيد هذه الحمولة عن الوزن المسموح به للمصعد وقدره ٢٢٠٠ كيلوجرام؟
- ٥ — إذا كانت نسبة المواليد الذكور في مجتمع ما هي ٥١ر٠، فما هو احتمال أن نحصل على:
أ — أقل من ٤٥% ذكور؟
ب — ما بين ٤٥% إلى ٦٠% إناث؟
ج — أكثر من ٥٥% ذكور؟
وذلك في ٢٠٠ حالة ولادة .
- ٦ — حل التمرين السابق إذا كان عدد الولادات ١٠٠ ولادة بدلا من ٢٠٠ — موضحا الفرق بين النتائج في الحالتين .
- ٧ — اشترى تاجر ١٠٠٠ صندوق تفاح من أحد مراكز توزيع الفاكهة والمعروف أن ٥% من التفاح الذي يعبئه هذا المركز فاسد . فما هو العدد المتوقع للصناديق التي تحتوي على:
أ — أكثر من ٩٠ تفاحة جيدة؟

ب- ٩٨ تفاحة أو أكثر جيدة؟

علما بأن كل صندوق يحتوي على ١٠٠ تفاحة .

٨- آلتان للإنتاج - معلوم لدينا أن متوسط عدد الوحدات التي تنتجها الآلة الأولى ٤٠٠٠ وحدة

في اليوم الواحد بانحراف معياري ٣٠٠ وحدة والمتوسط اليومي لعدد الوحدات المنتجة بالآلة

الثانية ٤٥٠٠ وحدة بانحراف معياري ٢٠٠ وحدة- أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠

يوم من إنتاج الآلة الأولى وعينة أخرى حجمها ٥٠ يوما من إنتاج الآلة الثانية- فما احتمال

أن يكون الفرق بين متوسطي إنتاج الآلتين (في العينتين) :

أ- ٦٠٠ وحدة على الأقل؟

ب- ٤٥٠ وحدة على الأكثر؟

٩- في أحد اختبارات الذكاء لمجموعة كبيرة من الطلاب كان متوسط الدرجات ٧٥ درجة

والانحراف المعياري ٨ درجات- اخترنا عشوائيا مجموعتين من هؤلاء الطلاب حجم

المجموعة الأولى ٣٠ طالبا وحجم المجموعة الثانية ٤٠ طالبا- فما هو احتمال أن يكون

الفرق بين متوسطي الدرجات في المجموعتين :

أ- ثلاث درجات أو أكثر؟

ب- منحصر بين درجتين وستة درجات؟

ج- خمسة درجات أو أقل؟

الباب السادس

تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة
(العينات الكبيرة)

تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة

(العينات الكبيرة)

(١-٦) - معالم المجتمع وإحصاءات العينة:

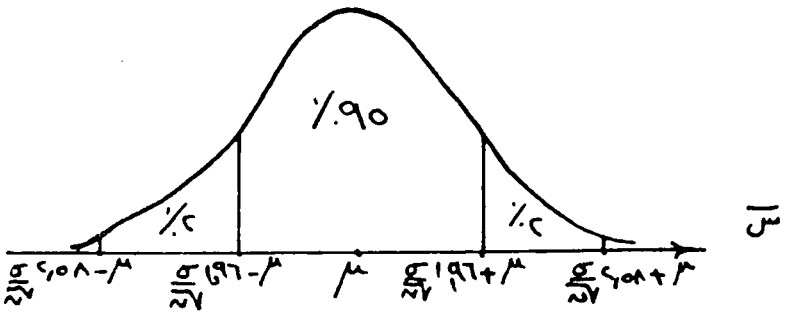
كما نعلم أن الهدف الأساسي من دراسة مجتمع ما هو إيجاد أو تقدير بعض خصائصه مثل المتوسط μ والانحراف المعياري σ ونسبة وجود ظاهرة معينة في المجتمع P وغير ذلك من أدلة توصيف المجتمعات. وهذه الخصائص تعتبر من أهم المعالم التي تحدد شكل كل مجتمع ولذلك فهي تسمى معالم المجتمع أو بارامترات المجتمع (parameters) - وهي ثابتة لأن قيمتها ثابتة لا تتغير. وهذه المعالم غالبا ما تكون مجهولة ونرغب في معرفة قيمتها.

وحيث أن العينة العشوائية تعتبر صورة مصغرة من المجتمع فإننا نلجأ دائما إلى حساب ما يقابل معالم المجتمع في العينة وذلك من بيانات العينة والمقياس المحسوب من العينة يسمى إحصاء (Statistic). ولكل إحصاء أسلوب خاص في حسابه سنتكلم عنه فيما بعد - والإحصاءات المناظرة للمعالم μ و σ هي الوسط الحسابي للعينة \bar{x} والانحراف المعياري للعينة s ونسبة الظاهرة في العينة p على الترتيب. والإحصاء يعتبر متغيرا لأنه يتغير من عينة لأخرى. فمثلا الوسط الحسابي الذي نحصل عليه من عينة ما يختلف عن ذلك الذي نحصل عليه من عينة أخرى حتى ولو كانت العينتان مسحوبتين من مجتمع واحد.

وحيث أن الإحصاءات متغيرات فإن لكل منها توزيعا احتماليا معيناً. فمثلا قد وجدنا أن الإحصاء \bar{x} متغير عشوائي له توزيع احتمالي طبيعي عندما يكون حجم العينة كبيرا.

(٢-٦) - تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة:

نفرض أن لدينا مجتمعا كبيرا وسطه μ وانحرافه المعياري σ ونرغب في معرفة القيمة المجهولة لمتوسط هذا المجتمع - لذلك نسحب عينة عشوائية كبيرة حجمها $(n < 30)$ مفردة ونحسب من هذه العينة الوسط الحسابي \bar{x} والانحراف المعياري s . كما نعلم فإن الإحصاء \bar{x} في هذه الحالة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. والآن نستخدم هذا التوزيع الاحتمالي في تقدير متوسط المجتمع μ . ويمكن رسم منحني هذا التوزيع كما يلي:



ومن خصائص التوزيع الاحتمالي السابق نعرف أن:

$$\text{احتمال أن تقع } \bar{S} \text{ بين } \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \text{ و } \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \text{ يساوي } ٠.٩٥.$$

يساوي ٠.٩٥.

أي أن احتمال أن تختلف \bar{S} عن μ بمقدار $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ بالزيادة أو بالنقص يساوي ٠.٩٥ ويمكن كتابة ذلك على النحو التالي:

$$ح \left[\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \bar{S} + \mu \geq \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \bar{S} - \mu \right] = ٠.٩٥$$

وهذا يعطينا لنا حدين، حد أعلى وحد أدنى تقع بينهما μ كما يحدد لنا قيمة احتمالية توضح لنا مدى ثقتنا في أن تقع μ بين هذين الحدين. وتسمى القيمة الاحتمالية بدرجة الثقة كما يسمى الحد $(\bar{S} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}})$ بحد الثقة الأدنى والحد $(\bar{S} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}})$ بحد الثقة الأعلى والفترة بينهما تسمى فترة الثقة: ويسمى المقدار $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ بالدرجة المعيارية وهي قيمة المتغير الطبيعي القياسي (ص) المناظر للاحتمال ٠.٩٥.

$$\text{بمعنى أن } ح (\bar{S} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \geq \mu \geq \bar{S} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = ٠.٩٥$$

وحيث أن $ص = ٢.٥٨$ تناظر احتمال ٠.٩٩، فيمكن استبدال القيمة $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ بالقيمة ٢.٥٨ واستبدال درجة الثقة ٠.٩٥ بدرجة الثقة ٠.٩٩، وبهذا نحصل على فترة الثقة التالية:

$$ح (\bar{S} - ٢.٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \geq \mu \geq \bar{S} + ٢.٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = ٠.٩٩$$

وبصفة عامة يمكن استخدام أي قيمة للتوزيع الطبيعي القياسي (ص) غير القيمتين ٢.٥٨، و٢.٥٨ وهذا يترتب عليه تغيير درجة الثقة. والصيغة العامة لفرات الثقة هي:

$$z = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{V}} \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{V}} \right) \geq \mu \geq \left(\frac{\sigma}{\sqrt{V}} \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{V}} \right) \quad \alpha - 1 =$$

حيث أن: $(\alpha - 1)$ هي درجة الثقة.

، \bar{X} هي قيمة المتغير الطبيعي القياسي المناظر لدرجة الثقة $(\alpha - 1)$.

فإذا أردنا استخدام درجة ثقة ٩٥% فإن $\bar{X} = 1.96$. وكذلك عند درجة الثقة ٩٩% نجد أن

$$\bar{X} = 2.58.$$

ويمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي لتحديد قيمة \bar{X} المناظرة لأي درجة ثقة

نرغبها.

ملحوظة (١): عند تقدير μ باستخدام فترات الثقة السابقة نجد أننا نحتاج لمعرفة σ التي عادة تكون مجهولة لذلك نستخدم الانحراف المعياري للعينة بدلاً من σ كنوع من التقريب.

مثال (٨): مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية. سحبت من إنتاجه عينة عشوائية حجمها ١٠٠ مصباح. فإذا كان متوسط عمر المصباح في العينة هو ١٢٠٠ ساعة وانحرافه المعياري هو ٢٥٠ ساعة فماذا تستنتج عن متوسط عمر المصباح في إنتاج المصنع كله؟

الحل

$$\bar{X} = 1200, \quad \sigma = 250$$

نفرض أن μ متوسط عمر المصباح في إنتاج المصنع.
عند درجة ثقة ٩٥% يكون:

$$z = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{V}} \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{V}} \right] \geq \mu \geq \left[\frac{\sigma}{\sqrt{V}} \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{V}} \right] \quad \alpha - 1 =$$

وحيث أن σ مجهولة نستخدم بدلاً منها وعلى ذلك فإن:

$$z = \left[\frac{250}{\sqrt{100}} \bar{X} + 1200 \right] \geq \mu \geq \left[\frac{250}{\sqrt{100}} \bar{X} - 1200 \right] \quad \alpha - 1 =$$

أي أن

$$z = \left[49 + 1200 \right] \geq \mu \geq \left[49 - 1200 \right] \quad \alpha - 1 =$$

$$\therefore \text{ح} [1249 \geq \mu \geq 1101] = 0.95$$

ومعنى هذا أننا نتوقع أن يتراوح عمر المصباح من إنتاج هذا المصنع بين 1101 ساعة و1249 ساعة وأتينا نتق في هذا القرار بدرجة ثقة 0.95.

ملحوظة (٢) : فترات الثقة السابقة كلها خاصة بالمجتمعات الكبيرة ولكن إذا كان المجتمع محدودا فإننا نستبدل الانحراف المعياري للوسط الحسابي $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بما يناظره في حالة المجتمعات المحدودة وهو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ وعلى ذلك فإن فترات الثقة في حالة المجتمعات المحدودة تكون كالآتي:

$$\text{ح} [\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}}]$$

$$\alpha - 1 = \left[\frac{n-1}{n} \right]$$

حيث أن : n هي حجم المجتمع ،
 n هي حجم العينة ،

مثال (٨) : سحبت عينة عشوائية مكونة من 50 طالبا من طلبة كلية الاقتصاد والإدارة البالغ عددهم ألف طالب. فإذا كان متوسط عمر الطالب في العينة 20 سنة والانحراف المعياري 3 سنوات فأوجد بدرجة ثقة 99% متوسط عمر الطالب في الكلية.

الحل

$$\bar{x} = 20 , \quad \sigma = 3$$

$$n = 1000 , \quad N = 50$$

وعلى ذلك فإن:

$$\text{ح} [\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}}]$$

$$0.99 = \left[\frac{n-1}{n} \right]$$

$$\therefore \text{ح} = [20 - 2058 \cdot \frac{3}{0.05} \sqrt{\frac{950}{999}}] \geq \mu \geq 2058 \times 20 \times \frac{3}{0.05} \sqrt{\frac{950}{999}}$$

$$0.99 = [20 - 2058 \cdot \frac{3}{0.05} \sqrt{\frac{950}{999}}] \geq \mu \geq 2058 \times 20 \times \frac{3}{0.05} \sqrt{\frac{950}{999}}$$

$$\therefore \text{ح} = [20 - 2058 \cdot \frac{3}{0.05} \sqrt{\frac{950}{999}}] \geq \mu \geq 2058 \times 20 \times \frac{3}{0.05} \sqrt{\frac{950}{999}}$$

$$\therefore \text{ح} = [2058 \cdot \frac{3}{0.05} \sqrt{\frac{950}{999}}] \geq \mu \geq 2058 \times 20 \times \frac{3}{0.05} \sqrt{\frac{950}{999}}$$

أي أن متوسط عمر الطالب في الكلية يتراوح بين 1893 عاماً و 2107 عاماً تقريباً وذلك بدرجة ثقة 99%.

مثال (9): سحبت عينة مكونة من 50 طالباً من طلبة كلية الاقتصاد والإدارة البالغ عددهم ألف طالب وكان توزيع أعمار الطلبة في العينة كما يلي:

فئات العمر بالسنوات	17 -	19 -	21 -	23	25-27	المجموع
عدد الطلبة	13	25	6	4	2	50

والمطلوب: تقدير متوسط العمر بدرجة ثقة 99%.

نبدأ أولاً بإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري من بيانات العينة كما يلي:

فئات العمر	عدد الطلبة ك	مراكز الفئات س	س - 20	س - 20 = ح	ح × ك	ح × ك × ح
17-	13	18	2-	1 -	13 -	13
19-	25	20	صفر	صفر	صفر	صفر
21-	6	22	2	1	6	6
23-	4	24	4	2	8	16
25-27	2	26	6	3	6	18
المجموع	50				7	52

$$\bar{س} = 20 + 2 \times \frac{7}{50} = 20.28 = 20.28 \text{ سنة}$$

$$ع = 2 \times \sqrt{\left(\frac{7}{50}\right) - \frac{52}{50}}$$

$$\sqrt{1.04} \times 2 = \sqrt{1.067} \times 2 =$$

$$سنة 2.04 = 1.02 \times 2 =$$

والآن يمكن استكمال الحل كما في المثال السابق تماما حيث أن:

$$س = 2.028 ، ع = 2.04$$

$$ن = 1.000 ، هـ = 0.50$$

وعلى ذلك يكون :

$$ح [2.058 - 2.028 \geq \sqrt{\frac{2.04}{0.5}} \times 2.058 - 2.028] \geq \sqrt{\frac{0.5 - 1.000}{1 - 1.000}}$$

$$0.99 = \left[\frac{0.5 - 1.000}{1 - 1.000} \right] \sqrt{\frac{2.04}{0.5}}$$

$$ح [0.73 - 2.028 \geq \sqrt{\frac{2.04}{0.5}} \times 0.73 + 2.028] \geq 0.99$$

$$ح [21.01 \geq \sqrt{\frac{2.04}{0.5}} \times 19.05] \geq 0.99$$

أي أننا نتوقع أن ينحصر متوسط عمر الطالب في الكلية بين 19.05 عاما و 21.01 عاما ودرجة ثققتنا في هذا القرار هي 99%.

(٦-٣) - تقدير نسبة وجود ظاهرة معينة في المجتمع :

أحيانا يكون من المرغوب فيه معرفة نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما مثل نسبة الأميين في مدينة كبير— أو نسبة العاطلين في الدولة— أو نسبة الذكور في بلد ما أو ما شابه ذلك .

في هذه الحالة يمكن استخدام بيانات العينة لتقدير هذه النسبة في المجتمع . تماما مثل حالة الوسط الحسابي— ولإيضاح ذلك سنرمز للنسبة في المجتمع بالرمز P والنسبة المحسوبة من العينة بالرمز p . وكما تكلمنا عن نظرية النزعة المركزية نود أن نذكر أنه يوجد نظرية أخرى تسمى نظرية الأعداد الكبيرة للعالم الإحصائي «دي موافر» وفيما يلي نص هذه النظرية :

نظرية (١) : إذا كانت P هي نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما وسحبت منه عينات كبيرة حجم كل منها n وكانت p هي نسبة هذه الظاهرة في العينات فإن p تتبع توزيعا طبيعيا وسطه P وانحرافه المعياري σ (ل) .

حيث إن:

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\frac{(P-1)P}{n}} \\ & \sqrt{\frac{n-n}{1-n}} \sqrt{\frac{(P-1)P}{n}} \end{aligned} \right\} = \sigma (J)$$

إذا كان المجتمع كبيرا

إذا كان المجتمع محدودا وحجمه n .

وعادة عند حساب $\sigma (J)$ نستخدم نسبة الظاهرة في العينة l بدلا من النسبة P حيث تكون P عادة مجهولة وعلى هذا يمكن استخدام النظرية السابقة لإيجاد فترة الثقة للنسبة P على الصورة التالية:

$$c [J - \frac{c}{100} \sigma (J) \leq P \leq J + \frac{c}{100} \sigma (J)] = 1 - \alpha$$

حيث $\frac{c}{100}$ هي قيمة المتغير الطبيعي القياسي السابق تعريفها.

مثال (١٠): في مصنع لإنتاج الأحذية أخذت عينة عشوائية حجمها $n=500$ حذاء ووجد أن ١٠٠ حذاء منها معيبة—أوجد بدرجة ثقة ٩٥% نسبة المعيب في الإنتاج كله.

الحل

عند درجة الثقة ٩٥% تكون $\frac{c}{100} = 1.96$
 نسبة المعيب في العينة $l = \frac{100}{500} = 0.2$
 حجم العينة $n = 500$
 نفرض أن نسبة المعيب في الإنتاج كله P

$$\therefore \sigma (J) = \sqrt{\frac{(P-1)P}{n}}$$

وحيث أن P مجهولة لذلك نستخدم النسبة l بدلا من P كنوع من التقريب في تقدير $\sigma (J)$ وبذلك تكون

$$\sigma (J) = \sqrt{\frac{(J-1)J}{n}} = \sqrt{\frac{(0.2-1)0.2}{500}} = 0.0179$$

وحيث أن:

$$c [J - \frac{c}{100} \sigma (J) \leq P \leq J + \frac{c}{100} \sigma (J)] = 0.95$$

$$\therefore c [0.2 - 1.96 \times 0.0179 \leq P \leq 0.2 + 1.96 \times 0.0179] = 0.95$$

$$\therefore \text{ح} [0.165 \leq P \leq 0.235] = 0.95$$

أي نتوقع أن تقع P بين 0.165، 0.235 وذلك بدرجة ثقة 95%.

مثال (11): أخذت عينة عشوائية حجمها 100 رجل من إحدى القرى الصغيرة ووجد أن نسبة الأميين فيها 75%، فما الذي تستنتج عن نسبة الأميين من الرجال في القرية كلها إذا علمت أن عدد رجال القرية 500 رجل؟

الحل

نستخدم مثلاً درجة ثقة 99% فتكون $n = 208$ والنسبة في العينة $l = 75$ ووحجم العينة $n = 100$

نفرض أن نسبة الأميين بين رجال القرية P وحيث أن المجتمع حجمه 500 فرد فهو مجتمع محدود وعلى هذا تكون

$$\sigma(l) = \sqrt{\frac{l(l-1)}{n} \times \frac{n-l}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{208 \times 75}{100} \times \frac{100-75}{100-1}} = 0.39$$

$$\therefore \text{ح} [l - \sigma(l) \leq P \leq l + \sigma(l)] = 0.99$$

$$= 0.99$$

$$\therefore \text{ح} [0.75 - 0.39 \leq P \leq 0.75 + 0.39] = 0.99$$

$$= 0.99$$

$$\therefore \text{ح} [0.165 \leq P \leq 0.85] = 0.99$$

أي نتوقع أن تنحصر نسبة الأميين لرجال القرية بين 65%، 85% وذلك بدرجة ثقة 99%.

ملحوظة (3): عندما نقول أن درجة الثقة في نتيجة معينة 95% يكون معنى ذلك أن 95% من العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأصلي تعطي مثل هذه النتيجة.

(6-4) — إنشاء فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين:

نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين المجتمع الأول متوسطه μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 والمجتمع الثاني متوسطه μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 ونفرض أن متوسطي المجتمعين مجهولان ولا يهمننا معرفة كل منهما على حدة ولكن يهمننا تقدير الفرق بينهما أي نرغب في تقدير $(\mu_1 - \mu_2)$ بفترة ثقة مناسبة.

ويمكننا إيجاد فترة الثقة المطلوبة وذلك باتباع الخطوات الآتية:

أ - نسحب عينة كبيرة حجمها n_1 من المجتمع الأول ثم نحسب متوسطها الحسابي \bar{x}_1 وانحرافها المعياري s_1 .

ب - نسحب عينة كبيرة حجمها n_2 من المجتمع الثاني ونحسب متوسطها الحسابي \bar{x}_2 وانحرافها المعياري s_2 .

ج - نعلم من نظرية (3) في البند (5-7) أن الفرق

$$F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \text{ يتبع توزيع طبيعي وسطه } (\mu_1 - \mu_2)$$

$$\text{وانحرافه المعياري: } \sigma(F) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\text{وعلى ذلك فإن } \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = V$$

$$V = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

يتبع توزيعاً طبيعياً قياسياً.

د - من خواص التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن:

$$P[-1.96 \leq V \leq 1.96] = 0.95$$

وهذا الاحتمال يكافئ:

$$P[-1.96 \leq \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq 1.96] = 0.95$$

$$P[-1.96 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leq 1.96 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}] = 0.95$$

وهذا يوضح أن احتمال أن تختلف $F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ عن $(\mu_1 - \mu_2)$

بمقدار ١٩٦٥ (ف) بالزيادة أو النقص يساوي ٠.٩٥.

أي احتمال أن تنحصر ($\mu_1 - \mu_2$) بين ف -

$$١٩٦٥ (ف)$$

، ف + ١٩٦٥ (ف) يساوي ٠.٩٥.

هذه العبارة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$ح [ف - ١٩٦٥ (ف) \geq \mu_1 - \mu_2 \geq ١٩٦٥ (ف)]$$

$$٠.٩٥ = [ف + ١٩٦٥ (ف)]$$

أي نستطيع القول بأن الفرق بين متوسطي المجتمعين ($\mu_1 - \mu_2$)

ينحصر بين ف \pm ١٩٦٥ (ف) وذلك بدرجة ثقة ٩٥%.

وعلى ذلك تكون فترة الثقة المطلوبة هي:

$$ف - ١٩٦٥ (ف) ، ف + ١٩٦٥ (ف)$$

بدرجة ثقة ٩٥%.

وإذا أردنا إيجاد فترة ثقة بدرجة ثقة ٩٩% فكما نعلم نستبدل ١٩٦٥ بالقيمة ٢٠٥٨.

وبصفة عامة يمكن كتابة فترة الثقة في الصورة الآتية:

$$ح [ف - \sigma_{\mu} (ف) \geq \mu_1 - \mu_2 \geq \sigma_{\mu} (ف)]$$

$$\alpha - ١ = [ف + \sigma_{\mu} (ف)]$$

حيث أن:

($\alpha - ١$) هي درجة الثقة

، σ_{μ} هي قيمة المتغير الطبيعي القياسي التي تحصر على يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{٢}$.

وبذلك يكون:

$$\text{الحد الأدنى لفترة الثقة} = ف - \sigma_{\mu} (ف)$$

$$\text{، الحد الأعلى لفترة الثقة} = ف + \sigma_{\mu} (ف)$$

$$\alpha - ١ = \text{درجة الثقة}$$

حيث أن:

$$ف = \bar{S} - \bar{S}$$

$$\sigma (ف) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}}$$

ملحوظة (١) : عادة تكون σ ، σ مجهولتان لذلك فإننا في مثل هذه الحالات نستخدم بدلا منهما الانحراف المعياري للعينة الأولى \bar{x} والانحراف المعياري للعينة الثانية \bar{y} على الترتيب .

مثال (١٢) : أخذت مجموعتان متماثلتان من التلاميذ الأولى بهاء ٥٠ تلميذاً والثانية بها ١٠٠ تلميذاً واستعملت طريقة خاصة لتدريس الرياضيات المعاصرة للمجموعة الأولى بينما استعملت طريقة أخرى عادية للمجموعة الثانية . وفي نهاية الدورة الدراسية وجد أن متوسط درجات المجموعة الأولى ٦٥ درجة والانحراف المعياري ٤ درجات بينما كان متوسط المجموعة الثانية ٦٠ درجة والانحراف المعياري ٥ درجات - كَوْن لنا فكرة واضحة عن مدى تأثير الطريقة الخاصة في التدريس وذلك بإنشاء فترة ثقة مناسبة للفرق بين المتوسطين .

الحل

$$\begin{array}{l} \bar{x} = 50 \quad \bar{s} = 65 \text{ درجة} \quad \bar{y} = 4 \text{ درجات} \\ \bar{m} = 100 \quad \bar{m} = 60 \text{ درجة} \quad \bar{m} = 5 \text{ درجات} \end{array}$$

إذا اخترنا درجة الثقة ٩٥٪ فإن فترة الثقة تكون كما يلي :

$$\therefore ف = 65 - 60 = 5$$

$$\sigma (ف) = \sqrt{\frac{25}{100} + \frac{16}{50}} = 0.775$$

∴ الحد الأدنى لفترة الثقة $ف - 1.96 \sigma (ف)$

$$= 5 - 1.96 \times 0.775$$

$$= 3.48 \text{ درجة}$$

$$= 5 + 1.96 \times 0.775$$

، الحد الأعلى لفترة الثقة

$$= 6.48 \text{ درجة}$$

$$\therefore ح [3.48 \leq \mu - 1.96 \sigma \leq \mu + 1.96 \sigma \leq 6.48] = 0.95$$

وهذا يبين لنا بوضوح أنه بدرجة ثقة ٩٥%، تؤدي الطريقة الخاصة إلى رفع متوسط درجات الرياضة المعاصرة بمقدار يتراوح بين ثلاثة درجات ونصف إلى ستة درجات ونصف.

كذلك إذا استخدمنا درجة الثقة ٩٩% فسوف نجد أن ارتفاع الدرجات يتراوح بين ٣١ درجة إلى ٦٩ درجة.

(٥-٦) - تقدير تباين المجتمع من بيانات العينة:

في بعض الدراسات الإحصائية نجد أنفسنا بحاجة إلى معرفة تباين المجتمع σ^2 وكثيرا ما يكون هذا التباين مجهولا غير معروف لنا. لهذا نلجأ إلى بيانات العينة لتقدير تباين المجتمع. فمثلا عند تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة استطعنا إيجاد فترات ثقة مناسبة كما هو مبين في البند (٦-٢) ولكن كانت فترات الثقة تعتمد على الانحراف المعياري للمجتمع σ ، وأحيانا تكون σ مجهولة لذلك أشرنا في ملحوظة (١) بند (٦-٢) أننا في مثل هذه الحالة نستخدم الانحراف المعياري للعينة s كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع σ - أي أننا نستخدم تباين العينة s^2 كتقدير لتباين المجتمع σ^2 . وهذا التقدير يسمى التقدير بنقطة - أي أننا من بيانات العينة يمكننا الحصول على قيمة عددية وحيدة لتباين العينة s^2 واعتبرناها تقديرا لتباين المجتمع. أي أن التقدير بنقطة هو التقدير بقيمة عددية وحيدة وهو تقدير مقبول وجيد ويستخدم في كثير من الدراسات الإحصائية - ولكننا الآن نرغب في إيجاد فترة ثقة للانحراف المعياري للمجتمع σ كما فعلنا في حالة متوسط المجتمع.

لكي نحصل على فترات الثقة المرغوبة نتذكر الآتي:

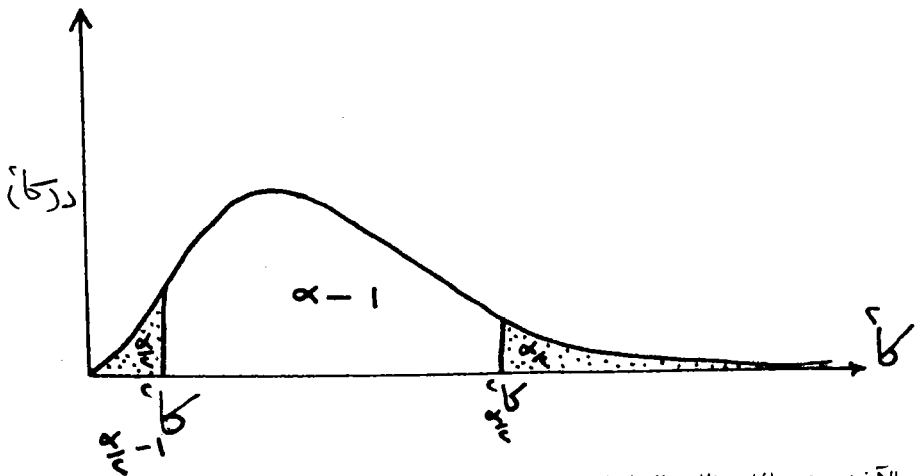
أ - نعلم أنه إذا سحبنا عينة حجمها n من المشاهدات المستقلة s ، s ، \dots ، s_n من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 فإن: $\frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{\sigma^2}$ تعتبر متغيرا عشوائيا يتبع توزيع كاي^٢ بدرجات حرية $(n-1)$ ، حيث أن:

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{\sigma^2}\right) = n - 1$$

ب - نعلم من معلوماتنا عن توزيع كاي^٢ كما يتضح من البند (٣-٩) أن:

$$P\left(\frac{\alpha}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{\sigma^2} \leq \frac{\beta}{n}\right) = 1 - \alpha$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



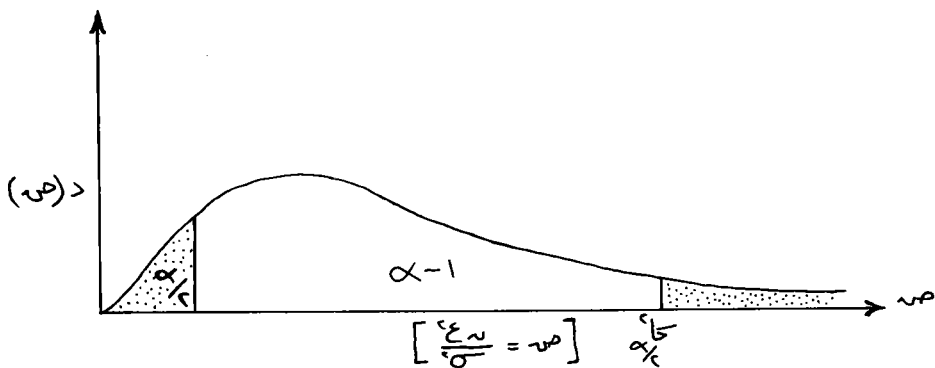
والآن نستخدم الملاحظات السابقة:

حيث أن:

$$\frac{1}{\sigma} (\bar{x} - s) \approx \frac{1}{\sigma} = \frac{z_{\alpha/2} \sqrt{n}}{\sigma} = z_{\alpha/2}$$

يتبع توزيع كا² بدرجات حرية (n - 1) فإن:

$$\alpha - 1 = \left[\frac{z_{\alpha/2}^2}{\frac{1}{n}} \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \sqrt{n}}{\sigma} \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{\frac{1}{n}} \right] z$$



ولكن الاحتمال السابق يكافئ الاحتمال:

$$\alpha - 1 = \left[\frac{1}{\frac{1}{n}} \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{z_{\alpha/2}^2 \sqrt{n}} \geq \frac{1}{\frac{1}{n}} \right] z$$

وهذا يكافئ :

$$\alpha - 1 = \left[\frac{\sqrt{V} \varepsilon}{\frac{\alpha}{2} - 1 \sqrt{V}} \geq \sigma \geq \frac{\sqrt{V} \varepsilon}{\frac{\alpha}{2} \sqrt{V}} \right] c$$

علما بأن درجات الحرية = n-1 . وهذا يعطي فترة ثقة لها الحدان التاليان :

$$\frac{\sqrt{V} \varepsilon}{\frac{\alpha}{2} \sqrt{V}} = \text{الحد الأدنى لفترة الثقة}$$

$$\frac{\sqrt{V} \varepsilon}{\frac{\alpha}{2} - 1 \sqrt{V}} = \text{والحد الأعلى لفترة الثقة}$$

$$\alpha - 1 = \text{ ودرجة الثقة}$$

وهذه تسمى فترة ثقة مركزية بمعنى أن مستوى المعنوية α منقسم إلى قسمين متساو بين $\frac{\alpha}{2}$ في الذيل الأيمن من توزيع χ^2 ، $\frac{\alpha}{2}$ في الذيل الأيسر كما هو واضح من الرسم السابق حيث نجد أن المساحتين المظلتين متساويتان وكل منهما تساوي $\frac{\alpha}{2}$.

فمثلا إذا أردنا استخدام درجة الثقة $\alpha - 1 = 95\%$ سيكون مجموع المساحتين المظلتين في الرسم السابق 5% وعلى هذا يمكن تحديد فترة الثقة باستخدام $\chi^2_{0.025}$ ، $\chi^2_{0.975}$ فتكون فترة الثقة هي :

$$0.95 = \left[\frac{\sqrt{V} \varepsilon}{\frac{\alpha}{2} \sqrt{V}} \geq \sigma \geq \frac{\sqrt{V} \varepsilon}{\frac{\alpha}{2} - 1 \sqrt{V}} \right] c$$

وكذلك إذا استخدمنا درجة ثقة 99% فإننا نحدد فترة الثقة باستخدام $\chi^2_{0.005}$ ، $\chi^2_{0.995}$ وتكون فترة الثقة هي :

$$0.99 = \left[\frac{\sqrt{V} \varepsilon}{\frac{\alpha}{2} \sqrt{V}} \geq \sigma \geq \frac{\sqrt{V} \varepsilon}{\frac{\alpha}{2} - 1 \sqrt{V}} \right] c$$

مثال (١٣) : سحبت عينة حجمها ١٦ طالبا من طلبة إحدى المدارس وقيست أوزانهم فوجد أن الانحراف المعياري لأوزان الطلاب في العينة ٢٤ كيلوجرام . أوجد فترة ثقة للانحراف المعياري لأوزان الطلاب في المدرسة كلها :

أولا : باستخدام درجة ثقة ٩٥%

ثانيا : باستخدام درجة ثقة ٩٩%

الحل

عند درجة الثقة ٩٥% ستحدد فترة الثقة من الاحتمال الآتي :

$$0.95 = \left[\frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sigma \sqrt{25}} \geq \sigma \geq \frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sigma \sqrt{25}} \right] c$$

وبما أن حجم العينة $n = 16$

إذن درجات الحرية $m = 15$

ويكون :

$$\frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sigma \sqrt{25}} = \text{الحد الأدنى لفترة الثقة}$$

$$\frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sigma \sqrt{25}} = \text{والحد الأعلى لفترة الثقة}$$

لمعرفة قيمة α نبحث في جدول توزيع χ^2 عند درجات الحرية $m = 15$

والاحتمال $\alpha = 0.025$ أي أنها عند تقاطع الصف $m = 15$ مع العمود $\alpha = 0.025$

وسنجد أن $\chi^2_{\alpha} = 27.4884$

وبالمثل سنجد $\chi^2_{1-\alpha} = 6.97$ عند تقاطع الصف $m = 15$ مع العمود $\alpha = 0.975$ ونحصل على $\chi^2_{1-\alpha}$

$$= 6.97$$

وبهذا تكون فترة الثقة للانحراف المعياري σ هي :

$$\text{الحد الأدنى} = \frac{\sqrt{n} \epsilon}{\sigma \sqrt{25}} = \frac{16 \sqrt{24} \times 24}{27.4884 \sqrt{25}} = \frac{96}{5.4976} = 1.74$$

$$3.84 = \frac{9.6}{2.5} = \frac{16 \sqrt{2.4}}{\sqrt{7.2614}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1.815}} = \text{والحد الأعلى}$$

وذلك بدرجة ثقة ٩٥%

و بهذا يمكن القول أن الانحراف المعياري لأوزا طلبة المدرسة جميعهم ينحصر بين ١.٨٣ ، ٣.٨٤ كيلوجرام وأن درجة ثقتنا في هذا الكلام هو ٩٥%

ثانياً: بأسلوب مماثل لما تتبعناه في أولاً ولكن باستخدام درجة ثقة ٩٩. سنجد أن فترة الثقة يمكن تحديدها من الاحتمال الآتي:

$$0.99 = \left[\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1.815}} \geq \sigma \geq \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1.815}} \right] c$$

ومن جدول كآ نجد أنه عند درجات الحرية م = ١٥ يكون:

$$3.28013 = \sqrt{1.815}$$

$$4.60094 = \sqrt{1.815}$$

$$1.676 = \frac{9.6}{5.727} = \frac{16 \sqrt{2.4}}{5.727} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3.28013}} = \text{الحد الأدنى لفترة الثقة}$$

$$4.476 = \frac{9.6}{2.14498} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4.60094}} = \text{والحد الأعلى لفترة الثقة}$$

إذن عند درجة الثقة ٩٩% نجد أن الانحراف المعياري للمجتمع ينحصر بين ١.٦٧٦ ، ٤.٤٧٦ كيلوجرام.

نلاحظ أنه كلما زادت درجة الثقة كلما اتسعت فترة الثقة— فعندما كانت درجة الثقة ٩٥% كانت فترة الثقة (١.٨٣ — ٣.٨٤) بينما أصبحت درجة الثقة ٩٩% أصبحت فترة الثقة (١.٦٧٦ ، ٤.٤٧٦) وبهذا تكون الزيادة في الثقة على حساب دقة الفترة نفسها.

الباب السابع

اختبار الفروض الإحصائية

اختبار الفروض الإحصائية

(٧-١) — مقدمة :

تعتبر نظرية التقدير واختبارات الفروض الإحصائية من أهم الطرق الإحصائية بصفة عامة. وقد ناقشنا في الباب السادس طريقة تقدير بعض معالم المجتمع مثل متوسط المجتمع — الانحراف المعياري للمجتمع — ونسبة ظاهرة معينة في المجتمع — أما هذا الباب فسيخصص للتعرف على مبادئ اختبارات الفروض الإحصائية دون الدخول في التفاصيل الأساسية وستكلم عن الفرض الإحصائي وعن الاختبار الإحصائي وكيفية إجرائه. ولتوضيح هذه المفاهيم نأخذ مثالا من الواقع.

كما نعلم في كثير من الحالات العملية وفي مجالات العمل المختلفة قد يجد الإنسان نفسه في موقف معين يتطلب منه اتخاذ قرار بناء على معلومات معينة وطبيعي أن يتخذ هذا القرار بشيء من الحكمة وبأقل قدر ممكن من المخاطر إذ أن هذا القرار قد يترتب عليه نفقات قد تكون طائلة وبالتالي لا بد أن يكون لها ما يبررها. فمثلا نفرض أن مصنعا لإنتاج بعض أنواع المعلبات يستخدم نوعا معيناً من الآلات لتعبئة الإنتاج النهائي في علب معدنية وكان معلوما لدى مدير المصنع أن متوسط عدد الوحدات التي تعبئها الآلة من هذا النوع هو ١٥٠ علبة في الساعة ونفرض أنه ظهر في الأسواق نوع جديد من آلات التعبئة وادعى منتج هذا النوع من الآلات أن الآلة تقوم في المتوسط بتعبئة عدد أكبر من العلب في الساعة عما تقوم به الآلة من النوع الأول. في مثل هذه الحالات قد يرغب مدير المصنع استبدال الآلات الموجودة في مصنعه بالآلات من النوع الجديد ولكن هذا القرار سوف يترتب عليه تحميل المصنع نفقات كبيرة تتمثل في الاستغناء عن الآلات الموجودة وشراء آلات جديدة قد تكون بمبالغ طائلة بالإضافة إلى تعطيل المصنع فترة لتركيب الآلات الجديدة. لهذا لا بد لمدير المصنع أولاً أن يتأكد من أن متوسط الإنتاج للآلات من النوع الجديد أعلى فعلاً من النوع القديم وليس أمامه إلا طريقة واحدة هي أن يجرب آلة من النوع الجديد وذلك بتشغيلها عدة ساعات (كعينة) ويحصّر عدد الوحدات المنتجة في كل ساعة وكذلك متوسط عدد الوحدات في كل العينة — نفرض أنه وجد أن متوسط عدد الوحدات المنتجة هو ١٧٠ علبة في الساعة — فهل معنى ذلك أن النوع الجديد يعطي وحدات أكبر من النوع الأول أم أن هذا الفرق راجع إلى مجرد الصدفة.

إذا استطاع مدير المصنع أن يعرف بطريقة ما وبشيء من الثقة أن هذا الفرق لا يمكن أن يكون راجعاً إلى مجرد الصدفة فإن معنى ذلك أن الآلة من النوع الجديد تقوم فعلاً بتعليب عدد أكبر من الوحدات في المتوسط عما تقوم به الآلة من النوع الأول وبالتالي يكون من الحكمة اتخاذ قرار بتغيير الآلات. أما إذا ظهر لنا بأسلوب ما أن هذا الفرق راجع إلى مجرد الصدفة وحدها وأن النوع الجديد من الآلات لا يعطي وحدات أكبر من النوع الأول فلا داعي إذن لاستبدال الآلات.

من المثال السابق يمكننا التعرف على معنى كل من المفاهيم التالية:

أ - الفرض الإحصائي .

ب - اختبار الفرض الإحصائي .

ج - درجة الثقة .

ج - مستوى المعنوية .

إن ادعاء منتج النوع الجديد من الآلات بأن متوسط عدد الوحدات التي تعيها الآلة من هذا النوع أكبر من متوسط عدد الوحدات للنوع الأول - هذا الادعاء يسمى فرضا إحصائيا لأنه يفترض أن متوسط عدد الوحدات للآلة من النوع الجديد أكبر من ١٥٠ وحدة وهو متوسط العدد للآلة من النوع الأول كما أن الأسلوب أو الطريقة التي بواسطتها يستطيع مدير المصنع الحكم على صحة هذا الفرض تسمى بالاختبار الإحصائي للفرض .

إن الاختبار الإحصائي لفرض ما هو مجموعة من القواعد تمكننا من قبول أو رفض هذا الفرض . ومقدار ثقتنا في القرار المتخذ بالرفض أو القبول يسمى درجة الثقة - كما أن مقدار عدم الثقة يسمى مستوى المعنوية .

إن المواقف التي نكون فيها بصدد اتخاذ قرار ما هي مواقف كثيرة ومتعددة وما المثال السابق إلا واحد من هذه المواقف - فمثلا قد يكون من المطلوب بناء على بيانات عينة أن نقرر ما إذا كان دواء جديد له تأثير فعال ومفيد في علاج مرض معين أو إذا كانت طريقة معينة لتدريب العمال تؤدي إلى رفع كفاءتهم الإنتاجية أو مدى تأثير السمنة على حياة الإنسان أو مدى تأثير التدخين في زيادة احتمال الإصابة بمرض السرطان أو غير ذلك . ولكن في كل حالة يكون مطلوب منا تنفيذ ثلاث خطوات هي :

(أ) صياغة الفرض الإحصائي .

(ب) إجراء الاختبار الإحصائي بأسلوب معين .

(ج) اتخاذ القرار إما بقبول أو رفض الفرض وذلك بدرجة ثقة معينة .

وستتكم بصورة سريعة عن كل خطوة من الخطوات الثلاث السابقة لإلقاء بعض الضوء عليها .

(أ) صياغة الفرض الإحصائي :

دائما نصيغ الفرض الإحصائي بصورة معاكسة تماما للحالة التي نريد اختبارها - فمثلا في حالة التفرقة بين نوعين من الآلات تستخدم في الإنتاج وكان هناك ادعاء أن متوسط إنتاج الآلة من النوع الثاني أكبر من متوسط إنتاج الآلة من النوع الأول و يراد إجراء اختبار إحصائي لهذا الادعاء فإننا نفترض دائما حسن النية ونبدأ بوضع الفرض الإحصائي الآتي :

تمارين

١ - الجدول التالي يوضح توزيع عينة من الأسر في إحدى القرى حسب الإنفاق اليومي بالريال

فئات الانفاق بالريال	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٣٥٠	٤٠٠	المجموع
عدد الأسر	١٠	١٣	١٥	٢٥	١٧	١٢	٨	١٠٠

والمطلوب تقدير متوسط الإنفاق اليومي في هذه القرية وذلك بدرجة ثقة ٩٥% في الحالتين الآتيتين:

أولاً : إذا كانت هذه القرية كبيرة

ثانياً: إذا كانت هذه القرية صغيرة وعدد الأسر فيها ٣٠٠ أسرة.

٢ - حل التمرين السابق مع اعتبار درجة ثقة ٩٩%.

٣ - عينة عشوائية مكونة من ٦٤ صماماً أليكترونيا عاشت في المتوسط ٨٥٠ ساعة مع انحراف معياري ٤٨ ساعة. أوجد فترة ثقة باحتمال ٩٥% لمتوسط أعمار جميع الصمامات.

٤ - مصنع ينتج قضباناً حديدية، أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٥٠ قضيب من إنتاج هذا المصنع وقيست أطوالها فكانت كما يأتي:

الطول بالمليمتر	٩٨٠	٩٩٠	١٠٠٠	١٠١٠	١٠٢٠	١٠٣٠	المجموع
عدد القضبان	١٩	٣٢	٥١	٢٥	١٤	٩	١٥٠

ما الذي تستنتجه عن الوسط الحسابي لطول القضيب في الإنتاج الكلي لهذا المصنع؟

٥ - تحتفظ شركة ببيانات عن الإنتاج اليومي لكل من عمالها وتضع هذه البيانات في اعتبارها عند النظر في زيادة أجور هؤلاء العمال. وعند النظر في حالة أحد العمال أعطيت البيانات التالية عن إنتاجه في التسعين يوماً الأخيرة على اعتبار أن هذه البيانات عينة عشوائية من إنتاجه العام.

ما الذي تستنتجه من هذه البيانات عن الوسط الحسابي لإنتاج هذا العامل؟

عدد الوحدات المنتجة في اليوم	١٧٠	١٨٠	١٩٠	٢٠٠	٢١٠	٢٢٠	المجموع
عدد الأيام	٩	١٦	٢٥	٢٠	١٢	٨	٩٠

٦ — الجدول التالي يبين توزيع عينة من ١٣٠٠ من عمال المحال التجارية بحسب أعمارهم .

فئات الأعمال بالسنة	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	٦٠ الى أقل من ٧٠	المجموع
عدد العمال	٢٨٨	٢٩٧	٢٩٩	١٨٢	١٠٢	٣٢	١٣٠٠

باستخدام بيانات الجدول السابق استنتج :

أ — نسبة عمال التجارة الذين تقل أعمارهم عن ٣٠ سنة في المجتمع كله

ب — نسبة عمال التجارة الذين تبلغ أعمارهم ٥٠ سنة فأكثر في المجتمع كله .

ج — عدد عمال التجارة الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٠ ، ٤٠ سنة .

وذلك إذا علمت أن عدد عمال التجارة في المجتمع كله هو ١٥٠ ألف عامل .

٧ — إذا عرفنا الأسر الصغيرة بأنها الأسر المكونة من ٣ أفراد أو أقل والأسر المتوسطة بأنها الأسر التي يتراوح عدد أفرادها بين ٤ ، ٦ أفراد والأسر الكبيرة بأنها تلك التي يزيد عدد أفرادها عن ٦ أفراد . فاستعمل بيانات الجدول التالي في إيجاد نسبة الأسر من كل من هذه الأحجام الثلاثة في المجتمع الذي أخذت منه العينة .

(الجدول التالي يبين توزيع ٥٠٠ أسرة بحسب عدد الأفراد)

عدد الافراد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
عدد الأسر	١٨	٣٩	٧١	١٠٢	١٤٧	٨٦	٣٠	٧	٥٠٠

٨ — مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية سحبت منه عينة مكونة من عشرة مصابيح ووجد أن الانحراف المعياري لعمر المصباح في العينة ١٢٠ ساعة — قدر بفترة ثقة مناسبة الانحراف المعياري لعمر المصباح في إنتاج المصنع وذلك :

أ — بدرجة ثقة ٩٥%

ب — بدرجة ثقة ٩٩%

٩ — حل التمرين السابق إذا كان حجم العينة ٢٥ مصباحا والانحراف المعياري ١٢٠ ساعة كما هو .

«نفترض عدم وجود اختلاف بين متوسطي الإنتاج للنوعين من الآلات» ويسمى هذا الفرض بفرض العدم ونرمز له بالرمز F_0 ثم نجري الاختبار وتكون نتيجة الاختبار إما قبول F_0 أو رفضه فإذا كان القرار قبول F_0 كان معنى ذلك أنه لا يوجد اختلاف بين متوسطي الإنتاج في النوعين من الآلات وأن الاختلاف الموجود لدينا هو اختلاف ظاهري نتيجة للصدفة وحدها ودائما في الواقع يقابل فرض العدم F_0 فرض معاكس له يسمى الفرض البديل ويرمز له بالرمز F_1 — فإذا كان فرض العدم هو: «عدم وجود اختلاف» — يكون الفرض البديل F_1 هو:

«وجود اختلاف حقيقي وليس ظاهري». وقبول فرض العدم F_0 معناه الفرض البديل F_1 — ورفض فرض العدم F_0 يكون معناه أنه لا يوجد لدينا من المبررات ما يكفي لرفض الفرض البديل F_1 وفي هذه الحالة لا يكون في وسعنا إلا قبوله.

(ب) إجراء الاختبار الإحصائي:

دائما نجري الاختبار لرفض أو قبول فرض معين نبدأ به ونسميه فرض العدم F_0 — ثم نسحب عينة عشوائية ومن بيانات العينة نحسب إحصاء معين مثل المتوسط (\bar{X}) أو النسبة (P) أو الانحراف المعياري (σ) أو أي دالة معينة في أحد هذه الإحصاءات أو غير ذلك.

والخطوات التالية تلقي مزيدا من الضوء على كيفية إجراء الاختبار الإحصائي:

١ — نفرض أن لدينا مجتمعا ما يتبع توزيعا احتماليا معيناً وأن هذا التوزيع الاحتمالي يعتمد على بعض المعالم (مثل متوسط التوزيع μ أو الانحراف المعياري σ أو نسبة ظاهرة معينة في هذا المجتمع P).

٢ — نفرض أن المطلوب اختبار فرض عدم معين في حول أحد هذه المعالم أو أي دالة فيها.

٣ — نبحث عن إحصاء معين يعتبر أحد تقديرات المعلمة التي يدور حولها الفرض أو دالة في هذا التقدير وسبق أن أوضحنا في بند (٦-١) أن الإحصاء ما هو إلا متغير عشوائي يتبع توزيعا معيناً.

٤ — باعتبار أن فرض العدم صحيح نبحث عن التوزيع الاحتمالي لهذا الإحصاء ونقوم برسم شكل التوزيع الاحتمالي للإحصاء باعتبار أن المحور الأفقي هو قيم الإحصاء والمحور الرأسي يمثل دالة الاحتمال علما بأن جميع الإحصاءات التي سوف نتناولها لها توزيعات احتمالية سبق دراستها.

٥ — بناء على درجة الثقة المطلوبة يمكن تقسيم محور المتغير العشوائي (محور الإحصاء) إلى منطقتين إحداهما تسمى منطقة القبول والأخرى تسمى منطقة الرفض. حيث أن المساحة أسفل منحنى التوزيع وأعلى منطقة القبول تساوي درجة الثقة، بينما المساحة أسفل منحنى التوزيع، وأعلى منطقة الرفض تسمى مستوى المعنوية.

٦ — نسحب عينة عشوائية من المجتمع ومنها نحسب القيمة المشاهدة لهذا الإحصاء ونحاول رصد هذه القيمة على المحور الأفقي الذي يمثل قيم الإحصاء — سنجد — أن هذه القيمة إما أن تقع في منطقة القبول أو تقع في منطقة الرفض .

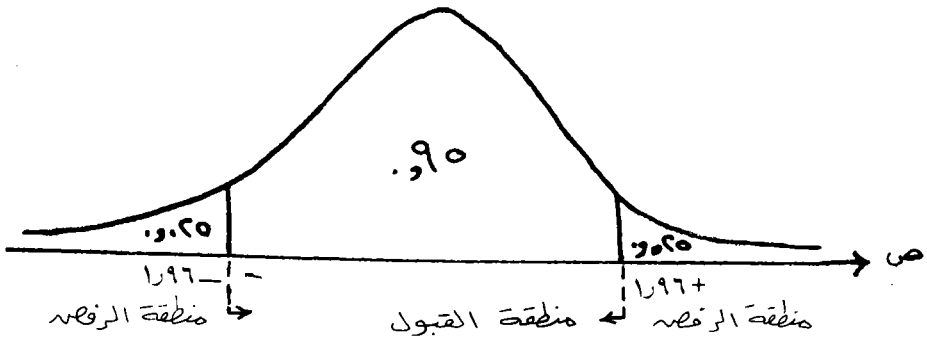
(ج) اتخاذ القرار:

إذا وقعت القيمة المشاهدة للإحصاء والمحسوبة من بيانات العينة في منطقة القبول ، فإننا نقبل فرض العدم فبدرجة الثقة المحددة وعلى ذلك نرفض البديل ف— أما إذا وقعت القيمة المشاهدة في منطقة الرفض كان معنى ذلك أننا نرفض ف. أو بمعنى آخر ليس لدينا المبرر الكافي لرفض ف وفي هذه الحالة نقبل الفرض البديل ف.

فمثلا لو كان الإحصاء الذي نستخدمه في إجراء الاختبار هو الوسط الحسابي \bar{X} وكان فرض العدم هو:

ف: توزيع المعاينة للإحصاء \bar{X} هو توزيع معتاد توقعه μ (\bar{X}) وانحرافه المعياري σ (\bar{X}) .

فكما سبق أن أوضحنا في الباب الخامس أن المتغير $Z = \frac{(\bar{X}) - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})}$ له توزيع طبيعي قياسي ويمكن رسم منحنى هذا التوزيع وتحديد درجة الثقة ٩٥% في الرسم كما يلي :

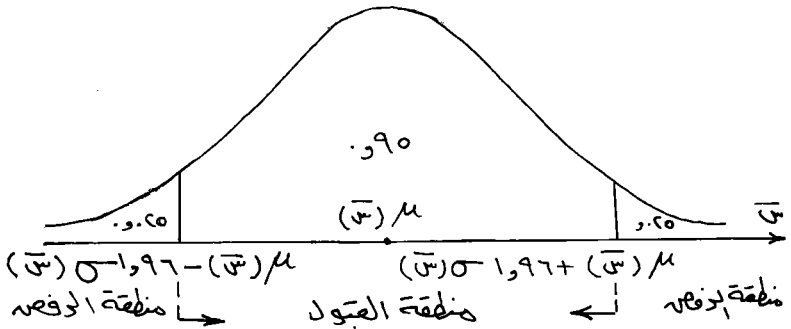


وكما يتضح من الرسم أنه إذا كان فرض العدم ف صحيحا سوف نكون واثقين بدرجة ٩٥% أن القيمة المشاهدة للمتغير ص والمحسوبة من بيانات العينة ستقع في منطقة القبول . أي أن ص لن تقل عن ١.٩٦ — ولن تزيد عن ١.٩٦+ إلا في حالات نادرة لا يتعدى احتمالها ٥% . وعلى هذا لو حسبنا قيمة ص من بيانات العينة المسحوبة ووجدنا أن قيمة ص تقع خارج المنطقة من ١.٩٦ — إلى ١.٩٦+ فإننا نستبعد أن يكون فرض العدم صحيحا ونحصل على مثل هذه النتيجة في ٥% من الحالات وبناء على ذلك نرفض ف ونقول أن قيمة ص تختلف معنويا عما هو متوقع بناء على صحة الفرض ف وأن مستوى المعنوية ٥% . أما إذا وقعت قيمة ص في الفترة (١.٩٦+ ، ١.٩٦ —) نقول أن قيمة ص المشاهدة لا تختلف عما هو متوقع وبالتالي فإننا نقبل ف. وذلك بدرجة ثقة ٩٥% .

من الواضح أنه يمكننا استخدام درجة ثقة ٩٩% أو أي درجة ثقة نرغب فيها . كذلك بناء على صياغة فرض العدم يمكن تحديد منطقتي القبول والرفض على شكل آخر فنحن نعلم أن فرض العدم في متعلق بالإحصاء \bar{S} كما يلي :

ف: توزيع المعاينة للإحصاء \bar{S} هو توزيع طبيعي توقعه μ (\bar{S}) وانحرافه المعياري σ (\bar{S}) .

وعلى هذا يمكن رسم توزيع المتغير \bar{S} مباشرة حسب معلوماتنا من فرض العدم عند درجة الثقة ٩٥% سيكون الرسم كما في الشكل التالي :



فإذا كان فرض العدم صحيحا ستكون واثقين بدرجة ٩٥% أن القيمة المشاهدة للمتغير \bar{S} المحسوبة من بيانات العينة ستقع في منطقة القبول . أي أن \bar{S} لن تقع خارج المنطقة من μ (\bar{S}) - ١.٩٦ σ (\bar{S}) إلى μ (\bar{S}) + ١.٩٦ σ (\bar{S}) إلا في حالات نادرة لا يتعدى احتمال حدوثها ٥% . لهذا فإننا نحسب المتوسط \bar{S} من بيانات العينة فإذا وقعت القيمة المحسوبة للمتغير \bar{S} في منطقة القبول نقول أن \bar{S} المشاهدة لا تختلف عما هو متوقع بناء على افتراض صحة F ، لهذا فإننا نقبل F بدرجة ثقة ٩٥% أي أننا نرفض أي فرض مرادف F يختلف عن F . والعكس صحيح إذا وقعت \bar{S} المشاهدة في منطقة الرفض .

ومما هو جدير بالذكر أن الاختبار الموضح أعلاه سواء باستخدام المتغير S أو المتغير \bar{S} يعتمد على وضع منطقة الرفض على جانبي منطقة القبول أي في ذيلي التوزيع ، لهذا فإن الاختبار من هذا النوع يسمى الاختبار ذو الذيلين ولكن يوجد اختبار ذو ذيل واحد وذلك إذا جعلنا كل مستوى المعنوية α في أحد الذيلين أي جعلنا منطقة الرفض في ذيل واحد وليس في الذيلين .

(٧-٢) - اختبار فرض معين حول توقع المجتمع :

إذا كان لدينا مجتمع ما يتبع توزيعا احتماليا معيناً - وأخذنا من هذا المجتمع عينة

عشوائية كبيرة حجمها n وحسبنا وسطها الحسابي \bar{x} وانحرافها المعياري σ فيمكننا أن نختبر أي فرض إحصائي حول توقع المجتمع μ وذلك عن طريق حساب المقدار:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z$$

وذلك باتباع الخطوات الموضحة في البند السابق (٧-١) — وذلك بتحديد توزيع المتغير z بناء على صحة الفرض المراد اختباره وتحديد منطقتي الرفض والقبول لمستوى المعنوية المطلوب — فإذا وقعت قيمة z المشاهدة في منطقة الرفض نرفض الفرض أما إذا وقعت في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض والمثال التالي يوضح لنا ذلك .

مثال (١) : شركة متخصصة في صناعة لعب الأطفال تعاقدت لشراء نوع جديد من الخيوط الصناعية يدعى صانع هذه الخيوط أن متوسط قوة تحمل الخيط ١٥ كيلو جرام بانحراف معياري نصف كيلو جرام .

ولاختبار صحة ادعاء الصانع أخذت عينة عشوائية مكونة من ٥٠ خيطا وتم اختبارها فوجد أن متوسط قوة التحمل في العينة ١٤.٨ كيلو جرام . فهل يمكننا تأييد ادعاء المدير . (استخدم درجة ثقة ٩٩٪) .

الحل

يمكن صياغة الحل في الخطوات الآتية:

أ — صياغة الفرض الإحصائي

ف. ب : $\mu = 15$ كجم

و. ف. كما يتضح هو فرض العدم — أي افتراض عدم وجود اختلاف بين المتوسط الحقيقي وبين المتوسط الذي يدعيه الصانع .

وفي هذه الحالة يمكن افتراض أن الفرض البديل هو:

ف. ب : $\mu \neq 15$ كجم .

ب — إجراء الاختبار الإحصائي .

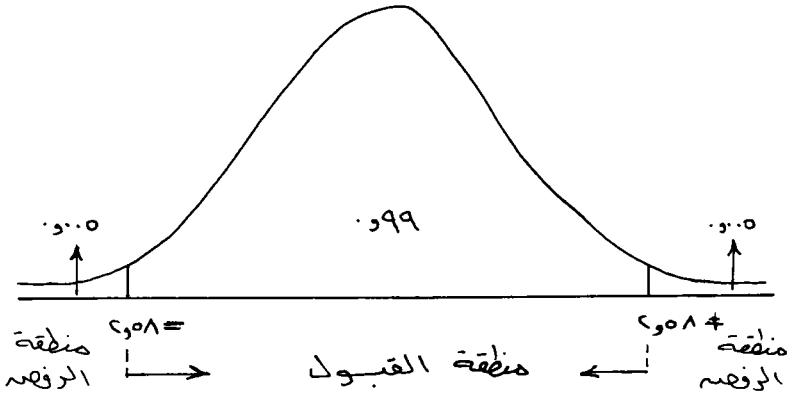
١ — لهذا نبحث عن إحصاء معين يعتبر أحد تقديرات المعلمة μ — هذا الإحصاء هو \bar{x} . وكما

نعلم أن:

$$ص = \frac{\mu - \bar{س}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

تعتبر دالة في هذا الإحصاء

- ٢- باعتبار أن فرض العدم (ف) صحيح يكون ص له توزيع معناد قياسي .
- ٣- عند درجة الثقة ٩٩% وباستخدام معلوماتنا السابقة عن التوزيع المعناد القياسي يمكن تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض كما في الشكل التالي:



٤- نحسب قيمة ص المشاهدة من بيانات العينة نجد أنها:

$$ص = \frac{\mu - \bar{س}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

حيث $\bar{س} = 148$ كجم

$$\sigma = 0.05 \text{ كجم} , \quad n = 50$$

$$\therefore ص = \frac{15 - 148}{\frac{0.05}{\sqrt{50}}} = -2.82$$

ج- اتخاذ القرار:

نجد أن قيمة ص المشاهدة أقل من -2.58 (وهي أقل قيمة في منطقة القبول) أي أن ص المشاهدة تقع في منطقة الرفض لهذا فإن القرار هو:

«رفض ف» .

ونستنتج من ذلك أن متوسط قوة تحمل الخيط μ لا تساوي ١٥ كجم حيث أن قيمة ص المشاهدة تقع في الجانب الأيسر من منطقة الرفض— بل أكثر من ذلك يمكننا استنتاج أن μ أقل من ١٥ كجم .

في بعض الأحيان يكون من المطلوب اختبار الفرض القائل أن متوسط المجتمع μ يساوي قيمة معينة μ_0 مثلا وذلك في مقابل الفرض البديل ف: $\mu < \mu_0$ أو $\mu > \mu_0$ وفي هذه الحالة يمكن تكوين اختبار إحصائي يسمى اختبار ذو ذيل واحد— وذلك بوضع منطقة الرفض في ذيل واحد من التوزيع الاحتمالي أما الذيل الأيمن أو الذيل الأيسر .

مثال (٢) : في عينة عشوائية مكونة من تسجيل ١٠٠ حالة وفاة في قرية معينة تبين أن متوسط العمر في العينة ٦٧,٥ عاما والانحراف المعياري ٨ أعوام . فهل هذا يوضح أن متوسط العمر في هذه القرية أكبر من ٦٥ عاما؟

استخدم مستوى معنوية ٥% .

الحل

نفرض أن μ متوسط العمر في هذه القرية .

أ— صياغة الفرض الإحصائي .

فرض العدم ف: $\mu = 65$ عاما .

الفرض البديل ف: $\mu < 65$ عاما .

ب— إجراء الاختبار الإحصائي .

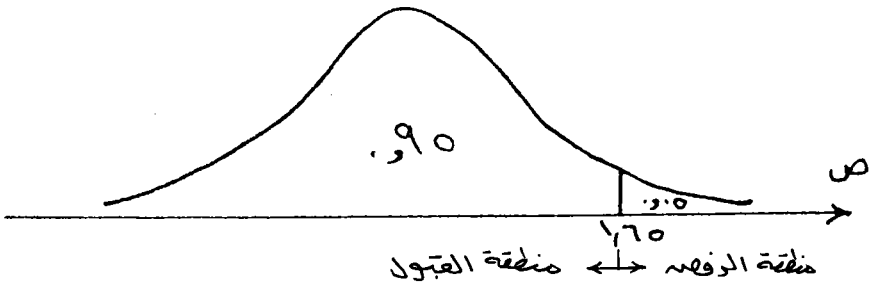
$$1 - \text{نعلم أن ص} = \frac{\mu - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

لها توزيع طبيعي قياسي

٢— عند درجة الثقة ٩٥% وباستخدام معلوماتنا السابقة عن التوزيع الطبيعي القياسي يمكن تحديد

منطقة القبول أو الرفض كما في الشكل التالي بحيث تكون منطقة الرفض هي الذيل الأيمن

للتوزيع .



أي أن منطقة الرفض هي المنطقة التي فيها $ص < ٦٦٥$
 ٣ - من بيانات العينة نجد أن:

$$\bar{X} = ٦٧٥ \text{ عاما}$$

$$s \approx ٨ \text{ أعوام}$$

$$n = ١٠٠ \text{ مفردة}$$

$$\text{إذن قيمة } ص \text{ المشاهدة} = \frac{٦٥ - ٦٧٥}{\frac{٨}{\sqrt{١٠٠}}} = \frac{٢٥}{٠.٨}$$

$$= ٣١.٢٥$$

ج - اتخاذ القرار:

نجد أن قيمة $ص$ المشاهدة أكبر من ٦٦٥ لهذا فإن $ص$ المشاهدة تقع في منطقة الرفض لهذا فإن القرار هو رفض H_0 .

ونستنتج من ذلك أن متوسط العمر في هذه القرية أكبر من ٦٥ عاما أي أن H_0 هو الفرض الصحيح المقبول.

ويمكن من المثال السابق ملاحظة أنه لا اختبار أن μ أقل من قيمة معينة يمكن عمل نفس الاختبار ولكن مع وضع منطقة الرفض في الذيل الأيسر. وذلك لأن تحديد منطقة الرفض يتوقف على الفرض البديل.

(٧-٣) - اختبار فرض معين حول النسبة في المجتمع P :

في كثير من الحالات العملية نجد أنفسنا محتاجين لاختبار فرض معين حول نسبة معينة في مجتمع ما.

فمثلا قد يحتاج السياسي لمعرفة نسبة الذين سوف ينتخبوه في الانتخاب القادم P . كذلك قد تحتاج الشركات الصناعية لمعرفة نسبة التألف P في بضاعتها بسبب الشحن مثلا وغير ذلك الكثير من الحالات العملية.

في مثل هذه الحالات يكون الاهتمام منصبا على النسبة P للظاهرة محل الدراسة.

وقد سبق لنا في الباب السادس في البند (٦-٣) أن تكلمنا عن إنشاء فترة الثقة للنسبة P . ولكننا الآن سنتناول بالدراسة مشكلة اختبار الفرض الإحصائي القائل بأن النسبة P تساوي قيمة معينة. أي أننا سوف نختبر فرض العدم في: القائل أن $P = P_0$ مثلا ضد الفرض البديل في: القائل أن: $P < P_0$ أو $P > P_0$ أو $P \neq P_0$.

عند إنشاء فترة ثقة للنسبة P في البند (٦-٣) ذكرنا أنه عندما تكون العينة كبيرة تكون النسبة ل في العينة لها تقريبا توزيع معتاد متوسطه $P = (N) \mu$ وانحرافه المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{P(1-P)}{N}}$ وعلى هذا يمكن تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض باستخدام التوزيع الطبيعي القياسي والفرض البديل.

نعلم أن

$$Z = \frac{P - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)}}$$

وذلك باعتبار أن فرض العدم H_0 صحيح

وبناء على ما تقدم وباستخدام مستوى المعنوية α يمكن رسم منحني التوزيع الطبيعي القياسي وتحديد منطقتي الرفض والقبول عليه وإجراء الاختبار كما في حالة الوسط الحسابي تماما. ولا نجد داعيا هنا لإعادة ذكر الخطوات لأن ذلك يكون تكرارا مملا لا مبرر له وإنما نكتفي بالمثال التالي:

مثال (٣): يدعى مدير شركة لإنتاج نوع معين من السجائر أن ٢٠٪ من المدخنين يفضلون هذا النوع من السجائر. ولاختبار ادعاء المدير أخذت عينة عشوائية تتكون من ٤٠٠ مدخن وسئل كل منهم عن نوع السجائر الذي يفضله فإذا أجاب ١٠٠ فرد بأنهم يفضلون ذلك النوع المراد اختباره فماذا نستنتج من ذلك؟

استخدم مستوى معنوية ١٪.

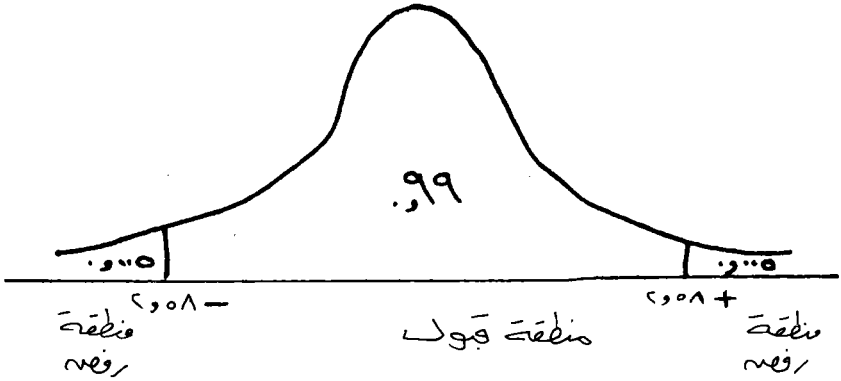
ملحوظة (١): في حل هذا المثال لا نلجأ إلى الإسراف في شرح خطوات الحل كما في المثال السابق لأن المقصود بالإسهاب في المثاليين السابقين هو توضيح طريقة وخطوات الاختبار أما الآن فيكفينا ذكر الحل في خطوات مختصرة.

الحل

$$1 - \text{ف.} = P = 0.20 \quad \text{ف.} = P \neq 0.20$$

$$2 - \frac{P - J}{\sqrt{P(1-P)}} = \text{ص} \quad \text{لها توزيع طبيعي قياسي .}$$

3 - عند مستوى المعنوية 1% أي عند درجة الثقة 99% يمكن تحديد منطقتي القبول والرفض من منحنى التوزيع الطبيعي القياسي كما في الشكل التالي :



4 - نحسب قيمة ص المشاهدة من بيانات العينة - حيث

$$J = \frac{100}{400} = 0.25, \quad N = 400$$

$$\therefore \text{ص المشاهدة} = \frac{0.20 - 0.25}{\sqrt{400 \cdot (0.20 - 1) \cdot 0.20}} = \frac{0.05}{\sqrt{400 \cdot (-0.8) \cdot 0.20}} = \frac{0.05}{\sqrt{-64}} = \frac{0.05}{8i} = 0.00625i$$

5 - نجد أن قيمة ص المشاهدة تقع داخل منطقة القبول لذلك نقبل فرض العدم ونستنتج أن ادعاء المدير صحيح .

ويمكن باستخدام نفس الأساليب السابقة في البند (7-2) اختبار الفرض القائل بأن P أكبر من قيمة معينة وذلك بوضع منطقة الرفض في الذيل الأيمن من توزيع ص أو اختبار الفرض القائل بأن P أقل من قيمة معينة وذلك بوضع منطقة الرفض في الذيل الأيسر من توزيع ص .

ملاحظة (2) : في نهاية البند (8-1) ذكرنا أنه بناء على الأسلوب الذي يصاغ به فرض العدم فإنه يمكن تحديد منطقتي القبول والرفض على شكل غير الشكل السابق وذلك برسم التوزيع الاحتمالي للإحصاء المراد اختبار المعلمة التي تناظره في المجتمع وتحديد منطقتي القبول والرفض على المحور الذي يمثل قيم الإحصاء مباشرة دون اللجوء إلى التحويل إلى المتغير الطبيعي القياسي ص . وسوف نتبع هذه الطريقة في البند التالي (7-4) كوسيلة إلى التعرف على هذا الأسلوب .

(٤-٧) - اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين :

أحيانا يكون لدينا عينتان ويكون الهدف هو مقارنة متوسطيهما، فقد نجد اختلافا بين المتوسطين، كأن نجد متوسط العينة الأولى أكبر من متوسط العينة الثانية - فهل يكون معنى ذلك أن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع متوسطه أكبر من متوسط المجتمع المسحوب منه العينة الثانية - أم أن هذا الاختلاف بين متوسطيهما راجع إلى الصدفة البحتة وأن العينتان مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس المتوسط .

فمثلا إذا كان لدينا آلتان لإنتاج سلعة معينة في أحد المصانع ثم سجلنا بيانات عن إنتاج الآلة الأولى لمدة ٦٠ يوما (كعينة من العمر الإنتاجي لهذه الآلة) فوجدنا متوسط الإنتاج اليومي لهذه الآلة ٢٥٠ وحدة ثم سجلنا بيانات عن آلة من نوع آخر لإنتاج نفس السلعة وذلك لمدة ٧٠ يوما (كعينة أخرى من العمر الإنتاجي للآلة الثانية) فوجدنا أن متوسط الإنتاج اليومي لها ٣٠٠ وحدة . ويهمننا أن نعرف سبب هذا الفرق . فإذا كان سبب هذا الفرق هو أن الآلة الثانية أكفأ من الأولى فإن إدارة المصنع قد تتخذ قرارا بوقف استخدام الآلة الأولى واستبدالها بالآلة من النوع الثاني . أما إذا كان هذا الفرق راجعا إلى مجرد الصدفة البحتة فسترى إدارة المصنع أنه لا داعي لاستبدال الآلة . هذا التحليل يعتبر اختبارا لمقارنة متوسطي مجتمعين ويمكن إيضاح هذا الاختبار بصورة عامة وكيفية إجرائه في الخطوات التالية :

(١) نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين من المفردات هما :

١١ س ، ٢١ س ، ٠٠٠٠٠٠ ، ١٢ س ، ٢٢ س ، ٠٠٠٠٠

متوسط الأول \bar{X}_1 وتباينه S_1^2 ومتوسط الثاني \bar{X}_2 وتباينه S_2^2

(٢) نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من المجتمع الأول حجمها n_1 مفردة ووجدنا وسطها

الحسابي \bar{x}_1 وسحبنا عينة عشوائية من المجتمع الثاني حجمها n_2 مفردة ووجدنا وسطها الثاني

الحسابي \bar{x}_2 وحسبنا الفرق بين الوسطين فوجدناه $F = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

(٣) نلاحظ أن S_1 ما هي إلا قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها

n_1 والمسحوبة من المجتمع الأول و S_2 كذلك قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات

التي حجم كل منها n_2 مفردة والمسحوبة من المجتمع الثاني، كما أن F ما هي إلا قراءة

في مجتمع ثالث هو مجتمع الفروق بين متوسطات العينات العشوائية التي يمكن أخذها من

المجتمعين والتي حجمها $n_1 n_2$ مفردة من المجتمع الأول و $n_1 n_2$ مفردة من المجتمع الثاني .

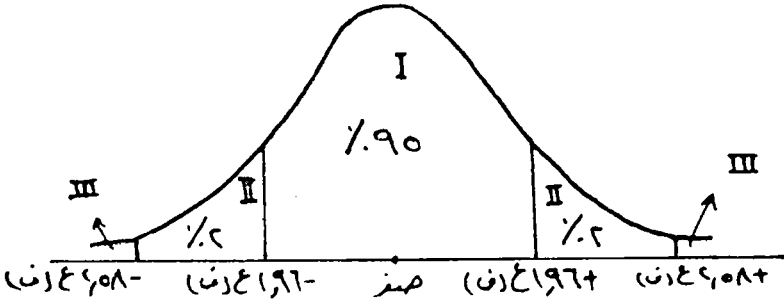
(٤) هناك نظرية إحصائية تنص على أنه :

إذا كان متوسطي المجتمعين الأصليين متساويان يكون التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق

F يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا وسطه الصفر وانحرافه المعياري :

$$E(F) = \frac{25}{\sqrt{2}} + \frac{15}{\sqrt{2}}$$

(٥) بتطبيق ما سبق دراسته عن فترات الثقة وعن التوزيع الطبيعي يمكن رسم توزيع مجتمع الفروق ف وتحديد فترات الثقة عليه كما يلي:



$$0.95 = [2058 - 1966 \leq F \leq 1966 + 2058]$$

$$0.99 = [2081 - 1966 \leq F \leq 1966 + 2081]$$

وهاتان الفترتان تم بناؤهما على أساس افتراض أن المجتمعين الأصليين لهما نفس المتوسط.

ونتيجة الاختبار نتوقف على موقع الفرق ف بالنسبة لهاتين الفترتين ويكون أمامنا ثلاث حالات.

الحالة الأولى: أن تقع ف داخل الفترة الأولى (في المنطقة I) على الرسم ويكون معنى هذا أنه يحتمل أن يكون المجتمعان المسحوب منهما العينتان لهما نفس المتوسط ومع ذلك يظهر هذا الفرق بين متوسطي العينتين وهذا الاحتمال قدره ٩٥% هو احتمال كبير لهذا نستبعد وجود اختلاف بين متوسطي المجتمعين الأصليين ونعزي الفرق ف إلى مجرد الصدفة.

الحالة الثانية: أن تقع ف خارج الفترة الثانية (في المنطقة III على الرسم) ومعنى هذا أن احتمال أن يكون المجتمعان لهما نفس المتوسط أقل من ١% وهو احتمال صغير وعليه يكون الفرق ف فرقا حقيقيا (معنويا) غير راجع إلى مجرد الصدفة.

الحالة الثالثة: أن تقع ف بين الفترة الأولى والثانية (في المنطقة II على الرسم) ومعنى هذا أن احتمال أن يكون المجتمعان لهما نفس المتوسط أقل من ٢% وهذا احتمال صغير أي أن احتمال أن يكون الفرق ف راجعا للصدفة هو احتمال ضعيف ويرجح أن يكون هناك فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين الأصليين لهذا يجب سحب عينتين أخريتين لاستخدامهما في الحكم إذا أمكن ذلك. أما

إذا كان ذلك متعذرا فيكون القرار مثل القرار في الحالة الأولى تماما ولكن مع شيء من الحذر.

ملاحظة (٣): في الخطوة (٤) نجد أن قيمة ع (ف) تعتمد على تباين المجتمعين الأصليين σ_1^2 ، σ_2^2 وحيث أنهما عادة يكونان مجهولين. لذا يمكن الاستعاضة عنهما بتباين العينتين s_1^2 ، s_2^2 ع و يكون:

$$ع (ف) = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

ملاحظة (٤): في الخطوة (١) كان كلامنا مقتصرًا على المجتمعات الكبيرة. أما إذا كان أحد المجتمعين محدودًا أو كلاهما محدود فالتغيير الوحيد في كل ما سبق في تقدير ع (ف). فإذا كان المجتمع الأول محدودًا وحجمه n_1 تكون ع (ف) كما يلي:

$$ع (ف) = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \left(\frac{n_1 - 1}{n_1 - 2}\right) \frac{s_1^2}{n_1}}$$

وبالمثل إذا كان المجتمع الأول كبيرًا والثاني محدودًا وحجمه n_2 تكون

$$ع (ب) = \sqrt{\left(\frac{n_2 - 1}{n_2 - 2}\right) \frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

أما إذا كان المجتمعان محدودين، حجم الأول n_1 والثاني n_2 تكون:

$$ع (ف) = \sqrt{\left(\frac{n_1 - 1}{n_1 - 2}\right) \frac{s_1^2}{n_1} + \left(\frac{n_2 - 1}{n_2 - 2}\right) \frac{s_2^2}{n_2}}$$

مثال (٤): أخذت عينة مكونة من ٢٠٠ عامل من إحدى الصناعات فوجد أن متوسط أجرهم اليومي ٧٠ ريالًا مع انحراف معياري ١٢ ريالًا وأخذت عينة أخرى حجمها ٥٠ من العاملات من نفس الصناعة فوجد أن متوسط أجرهن اليومي ٦٠ ريالًا مع انحراف معياري ٥ ريالًا فهل يمكن أن نستنتج من هذه المعلومات أن العمال يتقاضون أجورًا أعلى من العاملات في هذه الصناعة؟

الحل

$$\bar{x}_1 = 70 \text{ ريال} \quad s_1 = 12 \text{ ريال} \quad n_1 = 200 \text{ عامل}$$

$$\overline{س} = 60 \text{ ريال} \quad \overline{ع} = 5 \text{ ريال} \quad \overline{ن} = 50 \text{ عملة}$$

$$\text{الفرق} = \overline{س} - \overline{ع} = 60 - 5 = 55 \text{ ريال}$$

$$\sqrt{\frac{25}{50} + \frac{144}{200}} = \sqrt{\frac{2^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{2^2}{1^2 \cdot 5}} = (ف) ع$$

$$111 = \sqrt{50 + 72} =$$

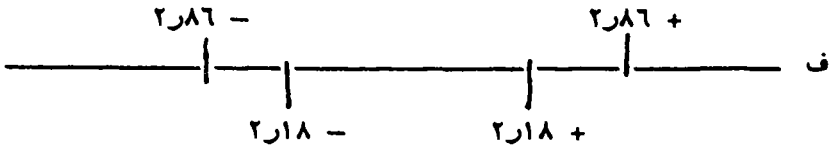
وتكون فترة الثقة ٩٥% ، ٩٩% بفرض عدم وجود اختلاف بين أجور العمال والعاملات كما

يلي:

$$\text{الفترة الأولى: } \underline{+} 196 = 111 \times \underline{+} 218$$

$$\text{الفترة الثانية: } \underline{+} 258 = 111 \times \underline{+} 286$$

وبرسم فترتي الثقة على محور ف نجدهما كما يلي:



والآن نرى موقع ف على المحور نجد أنها تقع خارج الفترة الثانية فإننا نستنتج أن أجور العمال أكبر من أجور العاملات في هذه الصناعة.

مثال (٥): أخذت عينة حجمها ٥٠ طالبا من طلبة كلية الأرصاء البالغ عددهم ١٥٠ طالبا فوجد أن متوسط الطول في العينة ١٦٥ سم والانحراف المعياري للطول ٥ سم وأخذت عينة أخرى حجمها ٦٠ طالبا من طلبة كلية العلوم البالغ عددهم ٣٠٠ طالب فوجد أن متوسط الطول في العينة ١٧٥ سم والانحراف المعياري للطول ٧ سم. فهل نستنتج من هذه المعلومات أن طلبة كلية العلوم أطول قامة من طلبة كلية الأرصاء؟

الحل

$$\overline{س} = 175 \text{ سم} \quad \overline{ع} = 165 \text{ سم} \quad \overline{ن} = 300 \quad \overline{ن} = 60 \quad \overline{ن} = 1$$

$$\overline{س} = 165 \text{ سم} \quad \overline{ع} = 5 \text{ سم} \quad \overline{ن} = 50 \quad \overline{ن} = 2 \quad \overline{ن} = 150$$

$$\text{الفرق} = \overline{س} - \overline{ع} = 175 - 165 = 10 \text{ سم}$$

تكون فترتا الثقة ٩٥%، ٩٩% ولذا نحسب ع (ف).
وحيث أن المجتمعين الأصليين محدودان فإن:

$$\left(\frac{2^N - 2^0}{1 - 2^0} \right) \frac{2^2 \epsilon}{2^2} + \left(\frac{1^N - 1^0}{1 - 1^0} \right) \frac{1^2 \epsilon}{1^2} \sqrt{=} (ف) \epsilon$$

$$\left(\frac{50 - 100}{1 - 100} \right) \frac{25}{50} + \left(\frac{60 - 300}{1 - 300} \right) \frac{49}{60} \sqrt{=}$$

$$\frac{0.17 \times 0.8 + 0.18 \times 0.7}{0.99} \sqrt{=}$$

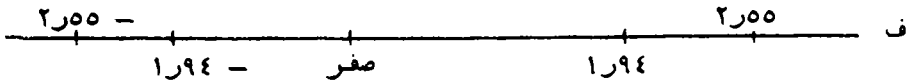
$$0.99 = \sqrt{0.235 + 0.125}$$

وعلى ذلك تكون حدود فترتي الثقة هما:

$$\text{الأولى: } 1.96 \pm = 0.99 \times 1.96 \pm = 1.94 \pm$$

$$\text{الثانية: } 2.58 \pm = 0.99 \times 2.58 \pm = 2.55 \pm$$

وبرسم فترتي الثقة على محور ف نجدهما كما يلي:



وحيث أن قيمة ف = ١٠ وهي تقع خارج الفترة الثانية فإننا نستنتج أن طلبة كلية العلوم أطول قامه من طلبة كلية الأرصاد.

(٥-٧) - اختبار مدى عشوائية العينة:

تكلمنا في الباب السابق عن طرق اختيار العينات العشوائية واتضح لنا كيف أن الصدفة تلعب دورا كبيرا في هذا الاختيار. لهذا يهمننا دائما بعد اختيار العينة أن نختبر مدى عشوائيتها - أي إلى مدى تعتبر هذه العينة صورة حقيقية أو صورة مصغرة للمجتمع الذي سحبت منه. ولاجراء مثل هذا الاختبار نستخدم أثناء جمع بيانات العينة الحصول على بيانات إضافية تفيدنا في حساب مقياس معين يكون معلوما لدينا قيمته الحقيقية في المجتمع الأصلي وذلك سواء من تعداد سابق أو بأي وسيلة أخرى فيكون لدينا قيمتان لهذا المقياس هما قيمته الحقيقية في المجتمع وقيمته المحسوبة من العينة المختارة، ومقارنة هاتين القيمتين باستخدام فترات الثقة يمكن الحكم على مدى عشوائية العينة وسنقوم

بإيضاح ذلك مستخدمين الوسط الحسابي \bar{x} ثم النسبة ل كمقياسين إحصائيين للحكم على عشوائية العينة وذلك كما يلي:

أولاً : باستخدام الوسط الحسابي \bar{x} :

١- نفرض أن المتوسط والانحراف المعياري في المجتمع هما μ ، σ قيمتان معلومتان في هذه الحالة .

٢- نحسب الوسط الحسابي من بيانات العينة .

٣- نعلم من البند (٦-٢) عند بناء فترة الثقة للوسط الحسابي بأن:

$$\text{احتمال أن تقع } \bar{x} \text{ بين } (\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \text{ هو } 0.95$$

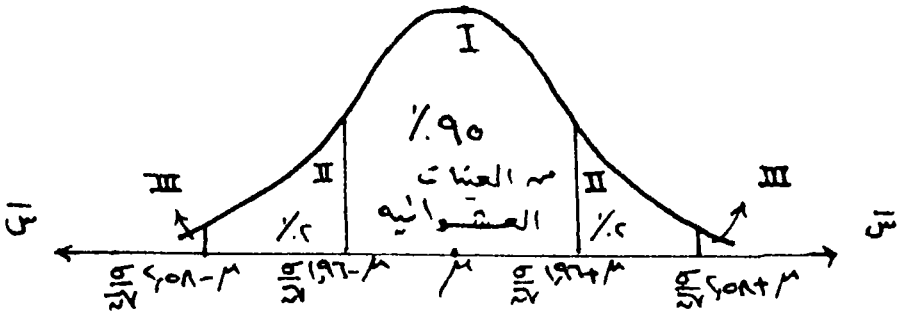
أي أنه في ٩٥% من العينات العشوائية تقع \bar{x} بين

$$(\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

وكذلك في ٩٩% من العينات العشوائية تقع \bar{x} بين

$$(\mu - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

٤- برسم هاتين الفترتين على محور التوزيع الطبيعي كما يلي :



٥- نبحث عن موقع الوسط الحسابي \bar{x} بالنسبة إلى فترتي الثقة السابقتين فيكون لدينا ثلاث

حالات :

(أ) إذا وقعت \bar{S} داخل الفترة الأولى (٩٥٪) أي في المنطقة I كان معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة تتحقق في ٩٥٪ من العينات العشوائية مما يطمئننا على عشوائية العينة. ولهذا نعتبر أن العينة المسحوبة عشوائية.

(ب) إذا وقعت \bar{S} خارج الفترة (٩٩٪) أي في المنطقة II يكون معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة لا تتحقق إلا في أقل من ١٪ من العينات العشوائية وفي هذه الحالة يمكن الحكم بأن العينة غير عشوائية ولا يمكن استخدام بياناتها بأي حال من الأحوال لهذا لا بد من استبدال العينة بعينة أخرى أكثر عشوائية.

(ج) إذا وقعت \bar{S} خارج الفترة الأولى (٩٥٪) ولكن داخل الفترة الثانية (٩٩٪) أي في المنطقة III كان معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة لا تتحقق إلا في أقل من ٢٪ من العينات العشوائية وهذا يجعلنا نشك في عشوائية العينة وفي هذه الحالة يفضل استبدال هذه العينة بعينة أخرى أكثر عشوائية إذا أمكن ذلك أما إذا لم يكن ذلك ممكنا أو كان يكلف تكلفة كبيرة فنستخدم بيانات هذه العينة ولكن بشيء من الحذر.

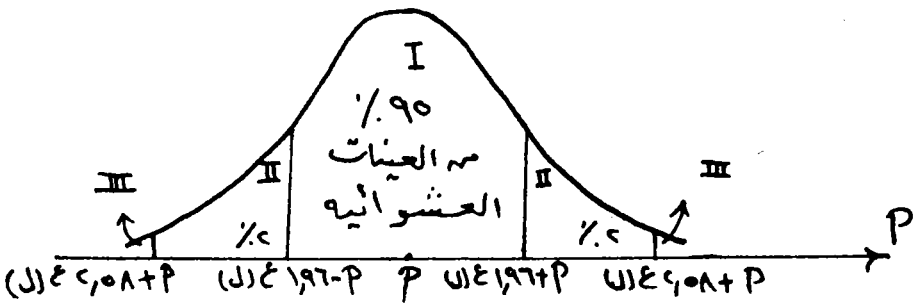
ثانياً : باستخدام النسبة ل :

نفرض أننا نعرف النسبة P في المجتمع ثم حسبنا النسبة ل من العينة فإن فترتي الثقة ٩٥٪ ، ٩٩٪ يمكن كتابتها في الصورة التالية :

احتمال أن تقع ل بين $\pm 1.96 \sigma$ (ل) يساوي ٩٥٪ .
 ، احتمال أن تقع ل بين $\pm 2.58 \sigma$ (ل) يساوي ٩٩٪ .

$$\frac{(P - 1) P}{n} \sqrt{\quad} = (L) \sigma$$

وعلى هذا يمكن رسم هاتين الفترتين على محور التوزيع المعتاد كما يلي :



وبنفس الأسلوب السابق يكون أمامنا ثلاث حالات :
 (أ) إذا وقعت ل (المحسوبة من العينة) في المنطقة I تعتبر العينة عشوائية .

(ب) إذا وقعت في المنطقة II نشك في عشوائية العينة .

(ج) إذا وقعت ل خارج المناطق I ، II
 نقطع بأن العينة غير عشوائية .

مثال (٦) : سحبت عينة حجمها ١٠٠ مفردة من إحدى القرى وذلك لدراسة ميزانية الأسرة في الريف . فإذا كان متوسط العمرين أفراد العينة هو ٢٥ سنة وإذا كان معلوم من بيانات تعداد سابق أن متوسط العمر في القرية كلها ٣٠ سنة : والانحراف المعياري ٥ سنوات فماذا يكون حكمك على عشوائية هذه العينة ؟

الحل

نعلم أن متوسط العمر في المجتمع $\mu = 30$ سنة
 والانحراف المعياري للعمر $\sigma = 5$ سنوات
 وحجم العينة $n = 100$
 ومتوسط العمر في العينة $\bar{x} = 25$ سنة .

فترة الثقة ٩٥% هي $(\frac{0}{100} \times 1.96 \pm 30)$

، فترة الثقة ٩٩% هي $(\frac{0}{100} \times 2.58 \pm 30)$

أي أن فترة الثقة الأولى هي (٢٩٠٢ - ٣٠٩٨) بدرجة ثقة ٩٥%
 وأن فترة الثقة الثانية هي (٢٨٧١ - ٣١٢٩) بدرجة ثقة ٩٩%
 وحيث أن \bar{x} المحسوبة من العينة هي ٢٥ تقع خارج الفترتين السابقتين فإنه في حكم المؤكد أن هذه العينة غير عشوائية .

مثال (٧) : إذا كانت نسبة الأميين في إحدى القرى الكبيرة تساوي ٧٠% من السكان وكانت نسبتهم في عينة مكونة من ١٠٠ فرد من نفس القرية هي ٦٧% فماذا يكون حكمك على عشوائية هذه العينة ؟

الحل

فترة الثقة الأولى هي $(0.7 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{100}})$ بدرجة ثقة ٩٥%

أي أن الفترة الأولى هي (٧٩% ، ٦١%) بدرجة ثقة ٩٥%

ولما كانت النسبة ل في العينة ٦٧٪ تقع داخل هذه الفترة الأولى فمعنى ذلك أن العينة عشوائية ولا داعي إذن لحساب الفترة الثانية.

تمارين

- ١ — إذا كان متوسط أعمار المصاييح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ٩٥٠ ساعة مع انحراف معياري ١٢٠ ساعة .
ادعى مدير المصنع أنه قد أدخلت تعديلات على وسائل الإنتاج مما أطال أعمار هذا الإنتاج— ولاختبار ادعاء المدير أخذت عينة مكونة من ٨١ مصباحا وأضيئت حتى انحرقت جميعها وحسب متوسط أعمارها فوجد ١١٠٠ ساعة فهل يمكنك تأييد ادعاء المدير؟
- ٢ — البيانات التالية توضح الأجر الأسبوعي بالريالات لمجموعتين من العمال والعاملات في إحدى المصانع:

الأجر الأسبوعي بالريالات	-٢٠٠	-٤٠٠	-٦٠٠	-٨٠٠	-١٠٠٠	-١٤٠٠	المجموع
عدد العمال	١٥	٢٥	٤٠	١٠	٥	٥	١٠٠
عدد العاملات	١٥	٢٢	١٧	٣	٢	١	٦٠

هل ترى من هذه البيانات أن أجور العمال أعلى من أجور العاملات في هذا المصنع؟ وضح إجابتك في الحالتين التاليتين:

- الأولى: إذا كان عدد العمال والعاملات في المصنع كبيرا .
ثانيا: إذا كان عدد العمال في المصنع ٣٠٠ عامل والعاملات ٢٠٠ عاملة .
- ٣ — إذا كانت نسبة الأفراد الذين يقل سنهم عن ٢٠ سنة في إحدى المدن تساوي ٤٠٪ وكانت نسبتهم في عينة مكونة من ١٠٠ فرد من نفس المدينة ٤٥٪ فهل يمكن أن نستنتج من هذا الفرق بين النسبتين أن العينة لم تكن عشوائية؟
- ٤ — اختبر عشوائية العينة في التمرين السابق إذا كان حجمها ٥٠٠ بدلا من ١٠٠ .
- ٥ — من المعروف أن متوسط الإنتاج اليومي للعامل في إحدى الصناعات ٦٠ قطعة والانحراف المعياري لهذا الإنتاج اليومي يساوي ٧ قطع . أخذت عينة عشوائية مكونة من ٩٠ عاملا من هذه الصناعة ودرّبوا تدريبا مهنيا وبعدهم التدريب وجد أن متوسط إنتاجهم اليومي ٦٥ قطعة . فهل يدلنا هذا الفرق على أن التدريب المهني يرفع من إنتاج العامل؟
- ٦ — من المعروف أن نسبة الذكور بين المواليد تبلغ ٥١٫٥٪ وفي إحدى القرى ذات الدخل المنخفض كان عدد المواليد في عام ما ٢٥٠ من بينهم ١٣٥ من الذكور . فهل يدل ذلك على أن انخفاض الدخل يرفع من نسبة الذكور بين المواليد؟

٧- مصنع ينتج نوعا معيناً من المسامير طوله ٨ سم . أراد صاحبه التأكد من دقة الآلات فأخذ عينة عشوائية مكونة من ٥٠٠ مسامير ووجد أن توزيعها بحسب الأطوال كما يلي :

الطول بالمليمتر	- ٧٨	- ٧٩	- ٨٠	- ٨١	- ٨٢	٨٤ - ٨٣
عدد المسامير	٣٠	٦٠	١٠٠	٢٠٠	٨٠	٣٠

ولما كان متوسط هذه العينة يزيد عن الطول المطلوب فقد أمر صاحب المصنع بوقف الآلات على اعتبار أن الإنتاج أطول من اللازم . اختبر سلامة الأمر الذي أصدره صاحب المصنع .

٨- من المعروف أن نسبة الإصابة بمرض معين في إحدى المناطق ٧٠٪- ما رأيك في عشوائية عينة أخذت من هذه المنطقة ووجد أن نسبة الإصابة فيها ٦٥٪ وذلك في كل من الحالات الآتية :

أ- إذا كان حجم العينة ٢٠٠ فرد .

ب- إذا كان حجم العينة ٣٠٠ فرد .

ج- إذا كان حجم العينة ٥٠٠ فرد .

٩- أخذت مجموعتان متماثلتان من التلاميذ الأولى بها ٨١ تلميذاً والثانية بها ١٠٠ تلميذ

واستعمل في تدريس مادة الرياضيات المعاصرة للمجموعة الأولى طريقة خاصة بينما استعملت الطريقة العادية في تدريس هذه المادة للمجموعة الثانية- وفي نهاية العام وجد أن متوسط درجات المجموعة الأولى ٧٠ درجة والانحراف المعياري ٦ درجات بينما كان متوسط درجات المجموعة الثانية ٦٥ درجة والانحراف المعياري ٦ درجات . فهل يمكننا أن نستنتج من هذه المعلومات أن الطريقة الخاصة تزيد من تحصيل التلاميذ؟

الباب الثامن

تحليل نتائج العينات الصغيرة

تحليل نتائج العينات الصغيرة

(١-٨) مقدمة:

تكلمنا في الباب السادس عن طريقة تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة كما هو مبين في بند (٦-٢) وذكرنا أنه إذا كان لدينا مجتمع ما متوسطه μ وتباينه σ^2 وسحبنا منه عينات كبيرة حجم كل منها n ووسطها \bar{x} وتباينها s^2 فإن الوسط الحسابي \bar{x} يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه $\frac{\sigma^2}{n}$ أي أن:

$$\frac{\mu - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z$$

يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا قياسيا. وقد استخدمنا هذه النتيجة الهامة في إيجاد تقدير لمتوسط المجتمع μ . ولكن في كثير من الدراسات يكون تباين المجتمع σ^2 مجهولا لذلك فإننا نستعيض عنه بتباين العينة s^2 وفي هذه الحالة يظل المتغير

$$\frac{\mu - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = z$$

يتبع تقريبا توزيع طبيعي قياس طالما كان حجم العينة كبيرا. أما إذا كان حجم العينة صغيراً أي أقل من ٣٠ مفردة فإن المتغير:

$$\frac{\mu - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

لم يعد يتبع التوزيع الطبيعي القياسي وإنما يتبع توزيع ت بدرجات حرية $(n - 1)$. ومن ذلك نلاحظ أن المتغير:

$$\frac{\mu - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

يتبع توزيعا طبيعيا قياسيا إذا كان حجم العينة n كبيرا بينما يتبع توزيع ت بدرجات حرية

(١ - ١) إذا كان حجم العينة صغيرا وعلى ذلك تكون أساليب تحليل نتائج العينات الصغيرة هي نفس أساليب تحليل نتائج العينات الكبيرة مع استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغير ت.

ملاحظة (١):

عندما يكون حجم العينة كبيرا فإن تباينها يحسب من الصيغة:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n}$$

أما في حالة العينات الصغيرة فإن تباين العينة يحسب من الصيغة:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n - 1}$$

وذلك لأسباب إحصائية لا نريد التعرض لها الآن.

(١-٢) - تقدير متوسط المجتمع باستخدام عينة صغيرة:

نفرض أن لدينا مجتمعا يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري σ مجهولان، ونرغب في تقدير متوسط هذا المجتمع وذلك باستخدام عينة عشوائية صغيرة مسحوبة منه. نحسب متوسط العينة \bar{s} وكذلك انحرافها المعياري σ ، وباستخدام نفس الأسلوب المتبع في بند (١-٢) عند تحديد فترة ثقة للمتوسط μ مع مراعاة أن المتغير: $\frac{\bar{s} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ يتبع توزيع ت بدرجات حرية (١ - n) نجد أن:

$$c = \left[\bar{s} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{c}{2}}, \bar{s} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{c}{2}} \right] \quad \mu \in [c]$$

حيث $\alpha_{\frac{c}{2}}$ هما قيمتا المتغيرات اللتان تحصران بينهما احتمال قدرة (١ - α) وهذا يعني أن:

$$\bar{s} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{c}{2}} < \mu < \bar{s} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{c}{2}}$$

بدرجة ثقة قدرها (١ - α). وهذه فترة ثقة حدها الأدنى $(\bar{s} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{c}{2}})$

وحدها الأعلى $(\bar{s} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \alpha_{\frac{c}{2}})$

مثال (١): أخذت عينة عشوائية مكونة من ٢٥ عاملا من عمال صناعة ما فوجد أن متوسط أجرهم الشهري ٤٢٥٠ ريالاً مع انحراف معياري ٤٠٠ ريال.

والمطلوب إيجاد فترة ثقة لمتوسط الدخل الشهري لعمال هذه الصناعة وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

الحل

١- نفرض أن μ متوسط الدخل الشهري لعمال هذه الصناعة.

٢- $n = 25$ ، $\bar{x} = 4250$ ريال، $s = 400$ ريال

٣- تكون فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

بدرجة ثقة (١ - α).

٤- حيث أن درجة الثقة (١ - α) = ٩٥٪، ودرجات الحرية $n - 1 = 24$ - نبحث

في جدول t أمام الصف $m = 24$ نجد أن قيمة t التي تجعل مساحة الذيلين تساوي ٥٪،

$$t_{\alpha/2} = 2.064$$

$$80 = \frac{400}{\sqrt{25}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$16512 = 80 \times 2.064 = \frac{s}{\sqrt{n}} \times t_{\alpha/2}$$

∴ الحد الأدنى لفترة الثقة = $4250 - 16512 = 408488$ ريالاً

والحد الأعلى لفترة الثقة = $4250 + 16512 = 441512$ ريالاً

وبهذا يمكن القول أن متوسط الأجر الشهري لعمال الصناعة كلها يتراوح بين ٤٠٨٤٨٨، و٤٤١٥١٢ ريالاً وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

كما سبق يتضح لنا جلياً عدم وجود أي اختلاف في تقدير متوسط المجتمع من بيانات عينات صغيرة عنه باستخدام بيانات عينات كبيرة إلا في استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغيرات - وهذا ينطبق على اختبار الفروض.

(٨ - ٣) اختبار فرض معين حول متوسط المجتمع:

نفرض أن لدينا مجتمعاً وسطه μ وتباينه σ^2 مجهولان ونرغب في اختبار فرض معين حول المتوسط μ باستخدام عينات صغيرة. نتبع نفس الأسلوب المستخدم في البند (٧ - ٢) مع استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغيرات كما يتضح من المثال التالي:

مثال (٢): إذا كان متوسط الوقت الذي يستغرقه العامل في صناعة معينة لتغليف سلعة ما هو ٥٠ دقيقة. أدخلت تعديلات على عملية التغليف بهدف اختصار الوقت ولاختبار ذلك أخذت عينة مكونة من ١٢ عامل فوجد أن متوسط الوقت اللازم لعملية التغليف هو ٤١ دقيقة مع انحراف معياري ١٠ دقائق.

فهل ترى أن هناك أثرا حقيقيا للتعديلات التي أدخلت على عملية التغليف؟ استخدم مستوى معنوية ٠.٠٥.

الحل

أولا: الفرض الإحصائي:

فرض العدم $F_0: \mu = 50$ دقيقة.

الفرض البديل $F_1: \mu > 50$ دقيقة

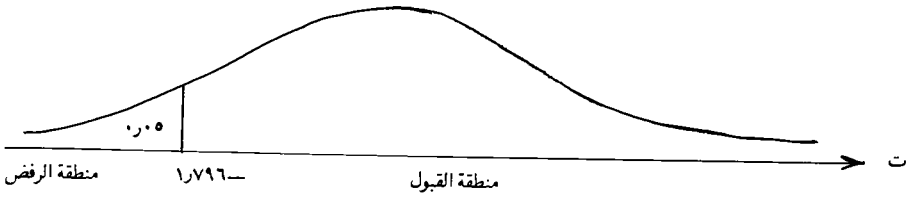
ثانيا: الاختبار الإحصائي:

$$(أ) \text{ باعتبار أن فرض العدم صحيح نعلم أن: } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{50 - 41}{\frac{10}{\sqrt{12}}}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية (١١ - ١).

(ب) من الفرض البديل ($\mu > 50$) وعند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يمكن استخدام

جدول توزيع ت عند درجات الحرية $m = 11$ لتحديد منطقتي القبول والرفض على محور ت كما في الشكل الآتي:



$$(م = ١١)$$

(ج) من بيانات العينة نحسب قيمة ت

$$\text{قيمة ت المحسوبة} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{50 - 41}{\frac{10}{\sqrt{12}}}$$

$$311 - = \frac{50 - 41}{10} = \frac{9}{127}$$

ثالثا : اتخاذ القرار:

بما أن $t = 311$ تقع في منطقة الرفض لذلك نرفض فرض العدم عند مستوى المعنوية ٥% وهذا يعني أن متوسط الوقت اللازم لعملية التغليف قد انخفض بالفعل وأصبح أقل من ٥٠ دقيقة وهذا يبرر استخدام الطريقة الجديدة في عملية التغليف .

ملاحظة (٢) :

يجب أن نتذكر أنه لو كان الفرض البديل هو $\mu < 50$ فإن منطقة الرفض تكون على الذيل الأيمن من توزيع t كذلك لو كان الفرض البديل هو $\mu \neq 50$ فإن منطقة الرفض تكون على ذيلي توزيع t .

(٤-٨) - إنشاء فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين :

كثيرا ما نحتاج لتقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين بفترة ثقة مناسبة . فمثلا قد يرغب مزارع في معرفة مدى جودة نوع جديد من بذور القمح وذلك بأن يستخدم هذا النوع الجديد في الزراعة ثم يقدر الفرق بين متوسط المحصول من هذا النوع الجديد ومتوسط المحصول من النوع القديم الذي اعتاد على زراعته .

والآن نفرض أن لدينا مجتمعين يتبعان توزيعا طبيعيا متوسط الأول μ_1 ومتوسط الثاني μ_2 وأن تباينهما σ_1^2 متساو ومجهول . فإذا أخذنا عينات عشوائية صغيرة حجم كل منها n_1 من المجتمع الأول ومتوسطها \bar{x}_1 وتباينها s_1^2 وأخذنا عينات عشوائية صغيرة من المجتمع الثاني حجم كل منها n_2 ومتوسطها \bar{x}_2 وتباينها s_2^2 فإن هناك نظرية إحصائية تنص على أن المتغير:

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

يتبع توزيع t بدرجات حرية $(n_1 + n_2 - 2)$ حيث أن \bar{x} هي تقدير للتباين σ^2 محسوبة من بيانات العينتين من العلاقة :

$$\frac{\frac{1}{n_1} (1 - \frac{1}{n_1}) + \frac{1}{n_2} (1 - \frac{1}{n_2})}{2 - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \frac{2}{n_1 + n_2}$$

وباستخدام هذه النظرية وخواص توزيعات التي سبق دراستها في البند (٣-٨) نستطيع القول

إن:

$$c \left[\alpha_{\frac{\gamma}{2}} - \frac{(\mu_2 - \mu_1) - (\bar{s}_2 - \bar{s}_1)}{\sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}} \right] \geq \alpha_{\frac{\gamma}{2}} - 1 =$$

وباستخدام نفس الأساليب السابقة في حالة العينات الكبيرة فإننا نستطيع القول إن:

$$c \left[\alpha_{\frac{\gamma}{2}} - \frac{(\bar{s}_2 - \bar{s}_1)}{\sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}} \right] \geq \mu_2 - \mu_1 \geq$$

$$\alpha - 1 = \left[\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} \right] \epsilon \alpha_{\frac{\gamma}{2}} + (\bar{s}_2 - \bar{s}_1)$$

وعلى ذلك تكون فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_2 - \mu_1)$ بدرجة ثقة $(\alpha - 1)$

هي:

$$\left(\bar{s}_2 - \bar{s}_1 \right) \pm \epsilon \alpha_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}$$

مثال (٣): ورغب وزارة المعارف في دراسة الفرق بين مستوى طلاب الرياضيات المعاصرة وطلاب الرياضيات التقليدية، فأخذت عينة مكونة من ١٢ طالبا من طلاب الرياضيات المعاصرة وعشرة من طلاب الرياضيات التقليدية وأعطتهم امتحانا عاما في الرياضيات— فكان متوسط درجات طلبة الرياضيات المعاصرة ٨٥ درجة مع انحراف معياري ٤ درجات بينما كان متوسط درجات طلاب الرياضيات التقليدية ٨١ درجة مع انحراف معياري ٥ درجات— والمطلوب إيجاد فترة ثقة للفرق بين مستوى طلاب الرياضيات الحديثة والتقليدية وذلك بدرجة ثقة ٩٠٪.

الحل

١- نفرض أن μ_1 و μ_2 هما متوسطي درجات طلاب الرياضيات المعاصرة والرياضيات التقليدية على الترتيب.

٢- المطلوب إيجاد فترة ثقة للفرق $(\mu_2 - \mu_1)$ بدرجة ثقة ٩٠٪.

٣ - نعلم أن :

عدد طلاب العينة الأولى $n_1 = 12$ ، $s_1^2 = 85$ ، $\bar{x}_1 = 14$ ، $\epsilon = 4$ ،
عدد طلاب العينة الثانية $n_2 = 10$ ، $s_2^2 = 81$ ، $\bar{x}_2 = 14$ ،
تقدير التباين المشترك هو :

$$\frac{n_1^2 (1 - \nu) + n_2^2 (1 - \nu)}{n_1 + n_2} = \nu$$

$$20.05 = \frac{25 \times 9 + 16 \times 11}{2 - 10 + 12} =$$

$$4978 = \sqrt{20.05} = \epsilon$$

٤ - درجة الثقة المطلوبة ٩٠٪ .

∴ $\alpha = 0.10$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ ، ومن جداول وعند درجات الحرية .

$$m = n_1 + n_2 = 12 + 10 + 2 = 24$$

$$1725 = 20.05$$

٥ - وبهذا تكون فترة الثقة الفرق $\mu_1 - \mu_2$ عند درجة الثقة ٩٠٪ هي :

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \right) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\epsilon \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

وبالحساب نجد أن فترة الثقة هي :

$$(81 - 85) \pm 1.725 \times \sqrt{4978 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{10} \right)}$$

$$\text{الحد الأدنى لفترة الثقة} = 331 - 4 = 327$$

$$\text{والحد الأعلى لفترة الثقة} = 331 + 4 = 335$$

وبهذا يكون حدى الثقة الأدنى والأعلى موجبان وهذا يوضح ارتفاع مستوى طلاب الرياضيات المعاصرة عن طلاب الرياضيات التقليدية .

(٨-٥) - اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين :

كثير من الدراسات تتطلب مقارنة بين متوسطي مجتمعين بناء على معلومات من عينات صغيرة

مسحوبة من كل من المجتمعين . فمثلا قد ترغب الجامعة عمل مقارنة بين الطلبة والطالبات لمعرفة مستوى التحصيل لكل منهما— أو كأن تقوم الدولة بدراسة مقارنة بين متوسط دخل الأسر في منطقتين معينتين أو كأن تقوم وزارة المعارف بدراسة لمعرفة الفرق بين نظامين من أنظمة التعليم لتتبنى الأفضل منهما .

في مثل هذه الدراسات يكون المطلوب اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين فنفرض أن لدينا مجتمعا يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 وأن هناك مجتمعا آخر يتبع كذلك توزيعا طبيعيا وسطه μ_2 وله نفس التباين σ_2^2 . والآن نرغب في إجراء الاختبار الإحصائي الآتي :

$$(1) - \text{فرض العدم} : \text{ف} : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{او} \quad \mu_1 - \mu_2 = \text{صفر}$$

وهذا يعني أنه لا يوجد فرق بين متوسطي المجتمعين .

— والفرض البديل ف يكون أحد الحالات الآتية :

$$(I) \quad \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{اي} \quad \mu_1 - \mu_2 \neq \text{صفر}$$

$$(II) \quad \mu_1 < \mu_2 \quad \text{اي} \quad \mu_1 - \mu_2 < \text{صفر}$$

$$(III) \quad \mu_1 > \mu_2 \quad \text{اي} \quad \mu_1 - \mu_2 > \text{صفر}$$

(ب) لذلك نسحب عينة عشوائية صغيرة حجمها n_1 من المجتمع الأول وليكن وسطها الحسابي \bar{x}_1 وتباينها σ_1^2 ونسحب عينة عشوائية صغيرة من المجتمع الثاني وليكن وسطها الحسابي \bar{x}_2 وتباينها σ_2^2 .

(ج) من النظرية الموضحة في بند (٨-٤) و باعتبار أن فرض العدم صحيح يكون

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية $(n_1 + n_2 - 2)$.

(د) باستخدام الفرض البديل ف ومستوى المعنوية α تحدد منطقتي القبول والرفض على محور توزيع ت .

(هـ) بحساب قيمة ت المشاهدة نستطيع اتخاذ القرار المناسب حسب وقوعها في منطقة القبول أو منطقة الرفض كما يتضح من المثال الآتي:

مثال (٤) : لمقارنة متوسط أوزان الطلبة والطالبات أخذت عينة حجمها ١٠ طلاب فكانت أوزانهم بالكيلو جرام هي:

٦٧ - ٧٥ - ٧٤ - ٧٢ - ٨٠ - ٧١ - ٥٩ - ٦٦ - ٥٤ - ٨٢ وأخذت عينة مكونة من ٨ طالبات فكانت أوزانهم بالكيلو جرام كما يلي:

٥٢ - ٧٣ - ٦٢ - ٦٨ - ٦٧ - ٦٣ - ٦٧ - ٦٨
 فهل يمكن القول أن الطالبات أقل وزنا من الطلاب؟
 استخدم مستوى المعنوية ٥%.

الحل

نفرض أن μ_1 متوسط أوزان الطلاب.

μ_2 متوسط أوزان الطالبات

فرض العدم ف: $\mu_1 = \mu_2$ أي أن $\mu_1 - \mu_2 = 0$ صفر

الفرض البديل ف: $\mu_1 < \mu_2$ أي أن $\mu_1 - \mu_2 < 0$ صفر

نحسب الوسط الحسابي والتباين لكل عينة كما يلي:

$\sum (x_i - \bar{x})^2$	$\sum x_i - n\bar{x}$	$\sum x_i$	$\sum (x_i - \bar{x})^2$	$\sum x_i - n\bar{x}$	$\sum x_i$
١٦٩	١٣ -	٥٢	٩	٣ -	٦٧
٦٤	٨	٧٣	٢٥	٥	٧٥
٩	٣ -	٦٢	١٦	٤	٧٤
٩	٣	٦٨	٤	٢	٧٢
٤	٢	٦٧	١٠٠	١٠	٨٠
٤	٢ -	٦٣	١	١	٧١
٤	٢	٦٧	١٢١	١١ -	٥٩
٩	٣	٦٨	١٦	٤ -	٦٦
			٢٥٦	١٦ -	٥٤
			١٤٤	١٢	٨٢
٢٧٢		٥٢٠	٦٩٢		٧٠٠

$$\frac{272}{9} = 30.22 \text{ كجم} \quad \bar{x}_2 = \frac{700}{10} = 70$$

$$\frac{272}{\sqrt{7}} = \sqrt{2} \epsilon \quad \text{كجم} \quad 60 = \frac{520}{8} = \sqrt{2} \bar{x}$$

$$\frac{\sqrt{2} \epsilon (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \epsilon (1 - \sqrt{1})}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{1}} = \sqrt{2} \epsilon$$

$$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1})}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{1}} =$$

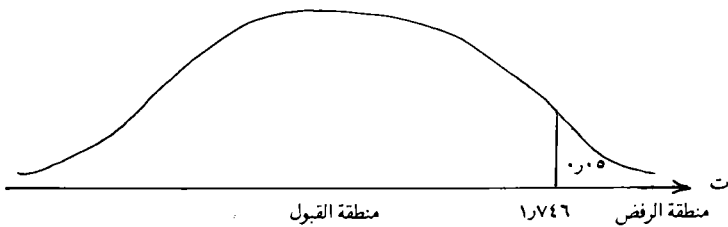
$$60.25 = \frac{964}{16} = \frac{272 + 692}{2 - 8 + 10} =$$

$$\therefore \epsilon = \sqrt{60.25} = 7.76 \text{ كجم}$$

باعتبار أن فرض العدم صحيح فإن:

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}}} \epsilon$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية $(n_2 - 1 + n_1 - 1)$ -
 باستخدام الفرض البديل $(\mu_1 < \mu_2)$ وعند مستوى المعنوية 0.05 تحدد منطقة الرفض على الذيل الأيمن من محور توزيع ت كما هو مبين على الشكل الآتي:



تُحسب قيمة ت المشاهدة من بيانات العينة باعتبار أن فرض العدم صحيح .

$$\therefore \text{ت المشاهدة} = \frac{65 - 70}{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}} \sqrt{2776} = \frac{5}{378} = 1.36$$

بما أن ت المشاهدة تقع في منطقة القبول فعليه تقبل فرض العدم وهذا يعني أنه ليس هناك أي فرق بين متوسط أوزان الطلاب ومتوسط أوزان الطالبات وأن الفرق الذي يظهر من بيانات العينتين يرجع إلى مجرد الصدفة .

تمارین

تمارين

١ - أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠ علب من علب السمنة التي ينتجها أحد المصانع فكانت أوزانها بالكيلو جرام كما يلي:

٩ر٨ - ١٠ر١ - ١٠ر٤ - ٩ر٩ - ٩ر٨ - ١٠ر٠ - ١٠ر٢ - ٩ر٧ - ٩ر٩ - ١٠ر٣
والمطلوب:

أ - أوجد فترة ثقة لمتوسط وزن العلبه من إنتاج هذا المصنع بدرجة ثقة ٩٥%.

ب - هل يمكن تأييد ادعاء مدير المصنع بأن متوسط وزن العلبه ١٠ كيلو جرام؟

٢ - قام خمسة من المساحين بقياس مساحة قطعة أرض فكانت المساحة التي حصل عليها كل منهم هي:

٨ر٢٨ - ٨ر٢٥ - ٨ر٢٢ - ٨ر٢٩ - ٨ر٢٣

استخدم هذه المعلومات في إيجاد فترة ثقة ذات درجة ثقة ٩٨% للمساحة الحقيقية لهذه القطعة.

٣ - لاختبار تأثير نوع جديد من السماد على محصول القمح في مزرعة نموذجية تم تخصيص

٢٤ قطعة أرض متساوية المساحة والخصوبة والرعاية - وتم زراعة القطع جميعها

بمحصول القمح مع معالجة نصف القطع بالسماد الجديد وترك النصف الثاني بدون

سماد. فإذا كان متوسط وزن المحصول من القطع التي لم تعالج بالسماد الجديد هو

٤ر٨ كجم بانحراف معياري ٢ر٣ كجم بينما كان متوسط وزن المحصول الناتج من

القطع المعالجة بالسماد الجديد هو ٥ر١ كجم بانحراف معياري ١ر٨ كجم - فهل

تستنتج من ذلك أن السماد الجديد يؤدي إلى رفع إنتاج محصول القمح؟

استخدم مستوى المعنوية التالي:

أ - $\alpha = 1\%$

ب - $\alpha = 5\%$

٤ - في أربع تجارب لاختبار تأثير نوعين أ، ب من السماد على محصول البطاطس وجد أن

الإنتاج قد زاد عند استعمال السماد أ عنه عند استعمال السماد ب بالمقادير الآتية في

الفدان: ٥٤٦٤ر٠ - ٣٠١٣ر٠ - ٥٢٤١ر١ - ٦٧٨٦ر٠ طنا.

(I) هل ترى أن السماد ب مكافئ للسماد أ؟

(II) أنشئ فترة ثقة للفرق بين تأثيري هذين النوعين من السماد.

٥ - أخذت عينتان من إنتاج مصنعين من مصانع المصابيح الكهربائية فوجد أن أعمار

المصابيح بالساعات في العينتين كما يلي:

العينة الأولى : (١٦٠٠ - ١٦١٠ - ١٦٥٠ - ١٦٨٠ - ١٧٠٠ - ١٧٢١ - ١٨٠٠)

العينة الثانية: (١٥٨٠ - ١٦٤٠ - ١٧٠٠ - ١٧٥٠).

مع افتراض أن تباين أعمار إنتاج المصنعين متساويان.
أ- أنشئ فترة ثقة ذات درجة ثقة ٩٩٪ للفرق بين متوسطي أعمار المصاييح في المصنعين.

ب- اختبر تساوي متوسطي أعمار المصاييح التي ينتجها المصنعان.



المراجع

أولا : المراجع العربية :

- ١ — « طرق التحليل الإحصائي » د. أحمد عباده سرحان — دار المعارف ١٩٦٥ .
- ٢ — « أسس الإحصاء » د. أحمد عباده سرحان — د. صلاح الدين طلبه
- ٣ — « مقدمة الإحصاء التطبيقي » د. أحمد عباده سرحان — د. سعد الدين الشيال — د. ثابت محمود الشريف .
- ٤ — « مبادئ الطرق الإحصائية » د. عبدالرحمن البدرى — دار النهضة العربية — ١٩٦٤ .
- ٥ — « مقدمة الطرق الإحصائية » د. عبداللطيف عبدالفتاح — د. أحمد محمد عمر .
- ٦ — « الإحصاء التطبيقي » د. محمد فتحي محمد علي — مكتبة عين شمس .
- ٧ — « الإحصاء في اتخاذ القرارات » د. محمد فتحي محمد علي مكتبة عين شمس .
- ٨ — « مبادئ في علم الإحصاء » د. مدني دسوقي مصطفى — دار النهضة العربية — ١٩٦٥ .
- ٩ — « أسس الإحصاء » د. مصطفى أحمد علي ١٩٧٣ .



- 1 - A. H. Pollard " Introductory Statistics A Service Course."
Perganon Press (Australia) Pty Limited.
- 2 - Fredrick E. Croxton, Dudley J. Cowden and Sidney Kelein, " Applied General Statistics" Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.
- 3 - Neil R. Vllman, "Elementary Stätistics-An Applied Approach". John Wiley & Sons.
- 4 - Ronald E. Walpole, "Elementary Statistical Concepts Macmillan Publising Co., Inc. New York Collier Macmillan Publishers London.



فهرست

الصفحة	الموضوع
١٣	الباب الأول: مبادئ الاحتمالات
٤١	الباب الثاني: التوزيعات الاحتمالية
٥٩	الباب الثالث: بعض التوزيعات الاحتمالية
١٠٣	الباب الرابع: العينات
١١٩	الباب الخامس: توزيعات المعاينة (العينات الكبيرة)
١٤١	الباب السادس: تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة (العينات الكبيرة)
١٥٩	الباب السابع: اختبار الفروض الإحصائية
١٨٥	الباب الثامن: تحليل نتائج العينات الصغيرة



سلسلة: الكتاب العربي السعودي

صدر منها:

- الجبل الذي صار سهلاً (نقد)
- من ذكريات مسافر
- عهد الصبا في البادية (قصة مترجمة)
- التنمية قضية (نقد)
- قراءة جديدة لسياسة محمد علي باشا (نقد)
- الظمأ (مجموعة قصصية)
- الدوامة (قصة طويلة)
- غداً أنسى (قصة طويلة) (نقد)
- موضوعات اقتصادية معاصرة
- أزمة الطاقة إلى أين؟
- نحو تربية إسلامية
- إلى ابنتي شيرين
- رفات عقل
- شرح قصيدة البردة
- عواطف إنسانية (ديوان شعر) (نقد)
- تاريخ عمارة المسجد الحرام (نقد)
- وقفة
- خالتي كدرجان (مجموعة قصصية) (نقد)
- أفكار بلا زمن
- كتاب في علم إدارة الأفراد (الطبعة الثانية)
- الإبحار في ليل الشجن (ديوان شعر)
- طه حسين والشيخان
- التنمية وجهها لوجه
- الحضارة تحد (نقد)
- غير الذكريات (ديوان شعر)
- لحظة ضعف . (قصة طويلة)
- الرجولة عماد الخلق الفاضل
- ثمرات قلم
- بائع التبغ (مجموعة قصصية مترجمة)
- أعلام الحجاز في القرن الرابع عشر للهجرة (ترجم)
- النجم الفريد (مجموعة قصصية مترجمة)
- مكاذك تحمدي
- قال وقلت
- نبض
- نبت الأرض
- السعد وعد (مسرحية)
- الأستاذ أحمد قنديل
- الأستاذ محمد عمر توفيق
- الأستاذ عز يز ضياء
- الدكتور محمود محمد سفر
- الدكتور سليمان بن محمد الغنام
- الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري
- الدكتور عصام خوقير
- الدكتور أمل محمد شطا
- الدكتور علي بن طلال الجهني
- الدكتور عبدالعز يز حسين الصويغ
- الأستاذ أحمد محمد جمال
- الأستاذ حمزة شحاتة
- الأستاذ حمزة شحاتة
- الدكتور محمود حسن زيني
- الدكتور مريم البغدادي
- الشيخ حسين عبدالله باسلامة
- الدكتور عبدالله حسين باسلامة
- الأستاذ أحمد السباعي
- الأستاذ عبدالله الحصين
- الأستاذ عبدالوهاب عبدالواسع
- الأستاذ محمد الفهد العيسى
- الأستاذ محمد عمر توفيق
- الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي
- الدكتور محمود محمد سفر
- الأستاذ طاهر زغشري
- الأستاذ فؤاد صادق مفتي
- الأستاذ حمزة شحاتة
- الأستاذ محمد حسين زيدان
- الأستاذ حمزة بوقري
- الأستاذ محمد علي مغربي
- الأستاذ عز يز ضياء
- الأستاذ أحمد محمد جمال
- الأستاذ أحمد السباعي
- الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري
- الدكتور فانتة أمين شاكر
- الدكتور عصام خوقير

● قصص من سورست موم (مجموعة قصصية مترجمة)

● عن هذا وذاك (الطبعة الثانية)

● الأصداف (ديوان شعر)

● الأمثال الشعبية في مدن الحجاز (نقد)

● أفكار تربوية

● فلسفة الجانين

● خدعتني بجمها (مجموعة قصصية)

● نقر العصافير (ديوان شعر)

● التاريخ العربي وديانته (الطبعة الثالثة)

● المجاز بين النجاة والحجاز (الطبعة الثانية)

● تاريخ الكعبة المعظمة (الطبعة الثانية)

● خواطر جريئة

● السنيورة (قصة طويلة)

● رسائل إلى ابن بطوطة (ديوان شعر)

● جسور إلى القمة (تراجم)

● تأملات في دروب الحق والباطل

● الحمى (ديوان شعر)

● قضايا ومشكلات لغوية

● ملامح الحياة الاجتماعية في الحجاز في القرن الرابع عشر للهجرة

● زيد الخير

● الشوق إليك (مسرحة شعرية)

● كلمة ونصف

● شيء من الحصاد

● أصداء قلم

● قضايا سياسية معاصرة

● نشأة وتطور الإذاعة في المجتمع السعودي

● الإعلام موقف

● الجنس الناعم في ظل الإسلام

● ألحان مغترب (ديوان شعر) (الطبعة الثانية)

● غرام ولادة (مسرحة شعرية) (الطبعة الثانية)

● سير وتراجم (الطبعة الثالثة)

● الموزون وانحزرون

● لجام الأقلام

● نقاد من الغرب

● حوار .. في الحزن الدافئ

● صحة الأسرة

● سباعيات (الجزء الثاني)

● خلافة أبي بكر الصديق

● البترول والمستقبل العربي (الطبعة الثانية)

● إليها .. (ديوان شعر)

● من حديث الكتب (ثلاثة أجزاء) (الطبعة الثانية)

● أيامي

الأستاذ عز يز ضياء

الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي

الأستاذ أحمد قنديل

الأستاذ أحمد السباعي

الدكتور ابراهيم عباس نتو

الأستاذ سعد البواردي

الأستاذ عبدالله بوقس

الأستاذ أحمد قنديل

الأستاذ أمين مدني

الأستاذ عبدالله بن خيس

الشيخ حسين عبدالله باسلامة

الأستاذ حسن بن عبدالله آل الشيخ

الدكتور عصام خوقير

الأستاذ عبدالله عبدالوهاب العباسي

الأستاذ عز يز ضياء

الشيخ عبدالله عبدالغني خياط

الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي

الأستاذ أحمد عبدالغفور عطار

الأستاذ محمد علي مغربي

الأستاذ عبدالعزيز الرفاعي

الأستاذ حسين عبدالله سراج

الأستاذ محمد حسين زيدان

الأستاذ حامد حسن مطاوع

الأستاذ محمود عارف

الدكتور فؤاد عبدالسلام الفارسي

الأستاذ بدر أحمد كرم

الدكتور محمود محمد سفر

الشيخ سعيد عبدالعزيز الجندول

الأستاذ طاهر زعشيري

الأستاذ حسين عبدالله سراج

الأستاذ عمر عبدالجبار

الشيخ أبو تراب الظاهري

الشيخ أبو تراب الظاهري

الأستاذ عبدالله عبدالوهاب العباسي

الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري

الدكتور زهير أحمد السباعي

الأستاذ أحمد السباعي

الشيخ حسين عبدالله باسلامة

الأستاذ عبدالعز يز مؤمنة

الأستاذ حسين عبدالله سراج

الأستاذ محمد سعيد العامودي

الأستاذ أحمد السباعي

- التعليم في المملكة العربية السعودية (الطبعة الثانية)
- أحاديث وقضايا إنسانية
- البعث (مجموعة قصصية)
- شمعة ظمأى (ديوان شعر)
- الإسلام في نظر أعلام الغرب (الطبعة الثانية)
- حتى لا ننقد الذاكرة
- مدارسنا والتربية (الطبعة الثالثة)
- وحي الصحراء (الطبعة الثانية)

- الأستاذ عبد الوهاب عبد الواسع
- الدكتور عبد الرحمن بن حسن النفيسة
- الأستاذ محمد علي مغربي
- الدكتور أسامة عبد الرحمن
- الشيخ حسين عبدالله باسلامة
- الأستاذ سعد البواردي
- الأستاذ عبد الوهاب عبد الواسع
- الأستاذ عبدالله بلخير
- الأستاذ محمد سعيد عبدالمقصود خوجه
- الأستاذ ابراهيم هاشم فلالي
- الأستاذ عزيز ضياء
- الأستاذ حسن بن عبدالله آل الشيخ
- الدكتور عصام خوقر
- الأستاذ محمد بن أحمد العقيلي
- الشيخ أبو عبد الرحمن بن عقيل الظاهري
- الأستاذ ابراهيم هاشم فلالي
- الأستاذ ابراهيم هاشم فلالي
- الدكتور عبدالله حسين باسلامة
- الأستاذ محمد سعيد العامودي
- الدكتور غازي عبد الرحمن القصيبي

- طيور الأبايل (ديوان شعر) (الطبعة الثانية)
- قصص من تاغور (ترجمة)
- التنظيم القضائي في المملكة العربية السعودية
- زوجتي وأنا (قصة طويلة)
- معجم اللهجة المحلية في منطقة جازان
- لن تلحد
- عمر بن أبي ربيعة
- رجالات الحجاز (تراجم)
- حكاية جيلين
- من أوراقي
- في رأيي المتواضع

نحت الطبع :

- الأستاذ عزيز ضياء
- الأستاذ حسين عرب
- الأستاذ ابراهيم هاشم فلالي
- الأستاذ عبدالله عبد الجبار
- الشيخ سعيد عبدالعز يز الجندول
- الأستاذ عبد الرحمن المعمر
- الأستاذ عزيز ضياء
- الأستاذ عبدالله عبد الوهاب العباسي
- الشيخ أبو عبد الرحمن بن عقيل الظاهري
- الدكتور عبد الهادي طاهر
- الدكتور بهاء بن حسين عزوي
- الدكتور محمد بن سعد بن حسين
- الدكتور محمود محمد سفر
- الدكتور سليمان بن محمد الغنام
- الدكتور أمل محمد شطا
- الشيخ حسين عبدالله باسلامة
- الأستاذ أحمد السباعي
- الدكتور محمود محمد سفر
- الأستاذ أحمد قنديل

- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)
- (الطبعة الثانية)

- ماما زبيدة (مجموعة قصصية)
- ديوان حسين عرب
- لارق في القرآن
- من مقالات عبدالله عبد الجبار
- الإسلام في معترك الفكر
- البرق والبريد والهاتف وصلتها بالحب والأشواق والعواطف
- عام ١٩٨٤ لجوج أورويل (قصة مترجمة)
- وجيز النقد عند العرب
- هكذا علمني ورد زورث
- الطاقة نظرة شاملة
- العالم إلى أين والعرب إلى أين ؟
- محمد سعيد عبدالمقصود خوجه (حياته وآثاره)
- التنمية قضية
- قراءة جديدة لسياسة محمد علي باشا
- غداً أنسى (قصة طويلة)
- تاريخ عمارة المسجد الحرام
- خالتي كدرجان (مجموعة قصصية)
- الحضارة تحد
- الجيل الذي صار سهلاً

- الإدارة : دراسة تحليلية للوظائف والقرارات الإدارية
- الجراحة المتقدمة في سرطان الرأس والعنق (باللغة الإنجليزية)
- النمو من الطفولة إلى المراهقة
- الحضارة الإسلامية في صقلية وجنوب إيطاليا
- النفط العربي وصناعة تكريره
- الملامح الجغرافية لدروب الحجيج
- علاقة الآباء بالأبناء (دراسة فقهية)
- مبادئ القانون لرجال الأعمال
- الاتجاهات العديدة والتنوعية للدوريات السعودية
- قراءات في مشكلات الطفولة
- شعراء التروبادور (ترجمة)
- الفكر التربوي في رعاية الموهوبين
- النظرية النسبية
- أمراض الأذن والأنف والحنجرة (باللغة الإنجليزية)
- المدخل في دراسة الأدب
- الرعاية التربوية للمكفوفين
- أوضاع على نظام الأسرة في الإسلام
- الوحدات التقديرية المملوكية
- الأدب المقارن (دراسة في العلاقة بين الأدب العربي والآداب الأوروبية)
- هندسة النظام الكوني في القرآن الكريم
- التجربة الأكاديمية لجامعة البترول والمعادن
- مبادئ الطرق الإحصائية
- تحت الطبع :
- المنظمات الاقتصادية الدولية
- الاقتصاد الإداري
- التعلم الصفي
- الاقتصاد الصناعي
- مبادئ الأحصاء
- دراسات في الإعراب
- الدكتور مندي عبدالقادر علاقي
- الدكتور فؤاد زهران
- الدكتور عدنان جمجوم
- الدكتور محمد عيد
- الدكتور محمد جميل منصور
- الدكتور فاروق سيد عبدالسلام
- الدكتور عبدالمنعم رسلان
- الدكتور أحمد رمضان شقلية
- الأستاذ سيد عبدالمجيد بكر
- الدكتور سعاد ابراهيم صالح
- الدكتور محمد ابراهيم أبوالعنين
- الأستاذ هاشم عبده هاشم
- الدكتور محمد جميل منصور
- الدكتور مريم البغدادي
- الدكتور لطفي بركات أحمد
- الدكتور عبدالرحمن فكري
- الدكتور محمد عبدالمهادي كامل
- الدكتور أمين عبدالله سراج
- الدكتور سراج مصطفى زقروق
- الدكتور مريم البغدادي
- الدكتور لطفي بركات أحمد
- الدكتور سعاد ابراهيم صالح
- الدكتور سامح عبدالرحمن فهمي
- الدكتور عبدالوهاب علي الحكيمي
- الدكتور عبدالعليم عبدالرحمن خضر
- الدكتور خضير سعود الخضير
- الدكتور جلال الصياد
- الدكتور عبدالحמיד محمد ربيع
- الدكتور حسين عمر
- الدكتور فرج عزت
- الدكتور محمد زياد حدان
- الدكتور سليم كامل درويش
- الدكتور جلال الصياد
- الأستاذ عادل سمرة
- الدكتور عبدالمهادي الفضلي

سلسلة :

رسائل جامعية

صدر منها :

- صناعة النقل البحري والتنمية في المملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية)
- الخراسانيون ودورهم السياسي في العصر العباسي الأول
- الملك عبدالعزيز ومؤتمر الكويت
- العثمانيون والإمام القاسم بن علي في اليمن
- القصة في أدب الجاحظ
- تاريخ عمارة الحرم المكي الشريف
- النظرية التربوية الإسلامية
- نظام الحسبة في العراق.. حتى عصر المأمون
- المقصد العلمي في زوائد أبي يعلى الموصلي (تحقيق ودراسة)
- الجانب التطبيقي في التربية الإسلامية
- الدولة العثمانية وغربي الجزيرة العربية
- دراسة ناقدة لأساليب التربية المعاصرة في ضوء الإسلام
- الحياة الاجتماعية والاقتصادية في المدينة المنورة في صدر الإسلام
- دراسة اثنوغرافية لمنطقة الأحساء (باللغة الإنجليزية)
- عادات وتقاليد الزواج بالمنطقة الغربية من المملكة العربية السعودية (دراسة ميدانية اثروبولوجية حديثة)
- افتراءات فيليب حتي وكارل بروكلمان على التاريخ الإسلامي
- دور المياه الجوفية في مشروعات الري والصرف بمنطقة الأحساء بالمملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية)
- تقوم الفو الجسماني والنشوء
- الدكتور بهاء حسين عزّي
- الأستاذة ثريا حافظ عرفة
- الأستاذة موضي بنت منصور بن عبدالعزيز آل سعود
- الأستاذة أميرة علي المداح
- الأستاذ عبدالله باقازي
- الأستاذة فوزية حسين مطر
- الأستاذة آمال حمزة المرزوقي
- الأستاذ رشاد عباس معتوق
- الدكتور نايف بن هاشم الدعيس
- الأستاذة ليلى عبدالرشيد عطار
- الأستاذ نبيل عبدالحفي رضوان
- الأستاذة فتحية عمر حلواني
- الأستاذة نورة بنت عبدالملك آل الشيخ
- الدكتور فايز عبدالحميد طيب
- الأستاذ أحمد عبدالاله عبدالجبار
- الأستاذ عبدالكريم علي باز
- الدكتور فايز عبدالحميد طيب
- الدكتور لطلال محمود رضا

تحت الطبع :

- الطلب على الإسكان من حيث الاستهلاك والاستثمار
- العقوبات التفويضية وأهدافها في ضوء الكتاب والسنة
- العقوبات المقدره وحكمة تشريعها في ضوء الكتاب والسنة
- تطور الكتابات والنقوش في الحجاز منذ فجر الإسلام وحتى منتصف القرن الثالث عشر
- التصنيع والتحضّر في مدينة جدة
- الدكتور فاروق صالح الخطيب
- الدكتور مطيع الله دخيل الله اللهيبي
- الدكتور مطيع الله دخيل الله اللهيبي
- الأستاذ محمد فهد عبدالله الفرع
- الدكتور عواطف فيصل بياري

صدر منها :

- حارس الفندق القديم (مجموعة قصصية)
- دراسة نقدية لفكر زكي مبارك (باللغة الإنجليزية)
- التخلف الإملائي
- ملخص خطة التنمية الثالثة للمملكة العربية السعودية
- ملخص خطة التنمية الثالثة للمملكة العربية السعودي (باللغة الإنجليزية) إعداد إدارة النشر بتهامة
- تسالي (من الشعر الشعبي) (الطبعة الثانية) الدكتور حسن يوسف نصيف
- كتاب مجلة الأحكام الشرعية على مذهب الإمام أحمد بن حنبل الشيباني
- النفس الإنسانية في القرآن الكريم
- واقع التعليم في المملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية) (الطبعة الثانية) الدكتور عبد الوهاب إبراهيم أبو سليمان
- صحة العائلة في بلد عربي متطور (باللغة الإنجليزية) الدكتور محمد إبراهيم أحمد علي
- مساء يوم في آذار (مجموعة قصصية) الأستاذ إبراهيم سرسيق
- النيش في جرح قديم (مجموعة قصصية) الدكتور عبد الله محمد الزيد
- الرابضة عند العرب في الجاهلية وصدر الإسلام الدكتور زهير أحمد السباعي
- الاستراتيجية النفطية ودول الأوبك الأستاذ محمد منصور الشقحاء
- الدليل الأبجدي في شرح نظام العمل السعودي الأستاذ السيد عبدالرؤوف
- رعب على ضفاف بحيرة جنيف الدكتور محمد أمين ساعاتي
- العقل لا يكفي (مجموعة قصصية) الأستاذ أحمد محمد طاشكندي
- أيام مبعثرة (مجموعة قصصية) الدكتور عاطف فخري
- مواسم الشمس المقبلة (مجموعة قصصية) الأستاذ شكيب الأموي
- ماذا تعرف عن الأمراض؟ الأستاذ محمد علي الشيخ
- جهاز الكلية الصناعية الأستاذ فؤاد عنقاوي
- القرآن وبناء الإنسان الأستاذ محمد علي قدس
- اعترافات أدبائنا في سيرهم الذاتية الدكتور اسماعيل الهلباوي
- الطب النفسي معناه وأبعاده الدكتور عبد الوهاب عبدالرحمن مظهر
- الزمن الذي مضى (مجموعة قصصية) الأستاذ صلاح البكري
- مجموعة الخضراء (دواوين شعر) الأستاذ علي عبده بركات
- خطوط وكلمات (رسوم كاريكاتورية) (الطبعة الثانية) الدكتور محمد محمد خليل
- ديوان السلطانين الأستاذ صالح إبراهيم
- الامكانيات النووية للعرب وإسرائيل (الطبعة الثانية) الأستاذ طاهر زنجشري
- رحلة الربيع ديوان السلطانين الأستاذ علي الخرجي
- وللخوف عيون (مجموعة قصصية) الأستاذ محمد بن أحمد العقبلي
- البحث عن بداية (مجموعة قصصية) الدكتور صدقة يحيى مستعجل
- الوحدة الموضوعية في سورة يوسف الأستاذ فؤاد شاكر
- الأستاذ أحمد شريف الرفاعي
- الأستاذ جواد صيداوي
- الأستاذ حسن محمد باجودة

• المجنونة اسمها زهرة عباد الشمس (ديوان شعر)

• من فكرة لفكرة (الجزء الأول)

• رحلات وذكريات

• ذكريات لا تنسى

• تاريخ طب الأطفال عند العرب

• مشكلات بنات

• دراسة في نظام التخطيط (في المملكة العربية السعودية)

• نفحات من طيبة (ديوان شعر)

• الأسر القرشية .. أعيان مكة المحمية

• الماء ومسيرة التنمية (في المملكة العربية السعودية)

تحت الطبع :

• إليكم شباب الأمة

• سرايا الإسلام

• قراءات في التربية وعلم النفس

• الحجاز واليمن في العصر الأيوبي

• ملامح وأفكار

• المذاهب الأدبية في شعر الجنوب

• النظرية الخلقية عند ابن تيمية

• الكشف الجامع لمجلة المنهل

• ديوان حمام

• رحلة الأندلس

• فجر الأندلس

• قریش والإسلام

• الدفاع عن الثقافة

• الشعر المعاصر على ضوء النقد الحديث

• مشكلات لغوية

• دليل مكة السياحي

• من فكرة لفكرة (الجزء الثاني)

• مسائل شخصية

• في بيتك طبيب

• مجموعة فاروق جويدة (داوود شعر)

• السبثيون وسد مأرب

• البسمات

• من كونهن إلى صنعاء (ترجمة)

• البناء الفني للقصيدة العربية

• نسيب الشريف الرضي: الحجازيات وقصائد آخر

• الزكاة في الميزان

• مجموعة النيل (داوود شعر)

• الأستاذة منى غزال

• الأستاذ مصطفى أمين

• الأستاذ عبدالله حمد الحقييل

• الأستاذ محمد المجذوب

• الدكتور محمود الحاج قاسم

• الأستاذ أحمد شريف الرفاعي

• الأستاذ يوسف إبراهيم السلمو

• الأستاذ علي حافظ

• الأستاذ أبو هشام عبدالله عباس بن صديق

• الأستاذ مصطفى نوري عثمان

• الشيخ سعيد عبدالعزيز الجندول

• الشيخ أبو تراب الظاهري

• الأستاذ فخري حسين عززي

• الدكتور لطفي بركات أحمد

• الدكتور جميل حرب محمود حسين

• الأستاذ أحمد شريف الرفاعي

• الدكتور علي علي مصطفى صبح

• الدكتور محمد عبدالله عفيفي

• الأستاذ عبدالله سالم القحطاني

• الأستاذ محمد مصطفى حمام

• الدكتور حسين مؤنس

• الدكتور حسين مؤنس

• الدكتور حسين مؤنس

• الدكتور عبدالعزيز شرف

• الأستاذ علي مصطفى عبداللطيف السحرتي

• الدكتور شوقي النجار

• اعداد تامة للنشر والمكتبات

• الأستاذ مصطفى أمين

• الأستاذ مصطفى أمين

• الدكتور محمد عبدالله القصيمي

• الأستاذ فاروق جويدة

• الأستاذ محمود جلال

• الدكتور حسن نصيف

• الأستاذ محمد أحمد الرعدي

• الدكتور عبدالمنعم خفاجي

• الدكتور عاتكة الحزرجي

• الدكتور محمد السعيد وهبة

• الأستاذ عبدالعزيز محمد رشيد هجوم

• الأستاذ طاهر زعشمري

كتاب للأطفال

صدر منها :

ينقلها إلى العربية الأستاذ عزيز ضياء

مجموعة : حكايات للأطفال

- الكؤوس الفضية الاثنتا عشر
- سرحانة وعلبة الكبريت
- الجنيات تخرج من علب الهدايا
- السيارة السحرية
- كيف يستخدم الملح في صيد الطيور
- سعاد لا تعرف الساعة
- الحصان الذي فقد ذيله
- تورنة الفراولة
- ضيوف نار الزينة
- الضفدع العجوز والعنكبوت

تحت الطبع

- سوسن وظلها
- الهدية التي قدمها سمير
- أبو الحسن الصغير الذي كان جاثما
- الأم ياسمينية واللص
- الأرنب الطائر
- معظم النار من مستصغر الشرر
- لبنى والفراشة
- ساطور حمدان
- وأدوا الأمانات إلى أهلها

للأستاذ يعقوب محمد اسحاق

مجموعة : لكل حيوان قصة

- الغزال
- الفرس
- الحمار الأهلي
- السلحفاة
- الأسد
- الكلب
- القرد
- الوعل
- الدجاج
- الفراشة
- البغل
- الجميل
- الغراب
- الضب
- الجماموس
- الخروف
- الحروف
- الفأر
- الذئب
- الثعلب
- الحمامة
- الخفاش
- الكنغر
- الهدهد
- البجع
- اليوم
- التمساح
- فرس النهر
- النعام
- الخراف
- الضفدع
- الدب
- الخرتيت

إعداد : الأستاذ يعقوب محمد اسحاق

مجموعة : حكايات كليلة ودمنة

- أسد غررت به أرنب
- الملكاء التي خدعت السمكات
- عندما أصبح القرد نجارا
- الغراب يهزم الثعبان

تحت الطبع

- سمكة ضيعها الكسل
- قاض يحرق شجرة كاذبة
- لقد صدق الجميل
- الكلمة التي قتلت صاحبها

- الصلاة
- صلاة المسبوق
- صلاة الجمعة
- صلاة الكسوف والخسوف
- التيمم
- الوضوء
- سجود التلاوة
- الزكاة
- زكاة الفطر
- زكاة التقيدين
- زكاة بهيمة الأنعام
- زكاة العروض
- الله أكبر
- قد قامت الصلاة
- الصوم
- الصدقات
- المسح على الخفين
- المسح على الجبيرة والغصابة

قصص متنوعة :

- الصرصور والنملة
- السمكات الثلاث
- النحلة الطيبة
- الكنكوت المتشرد
- المظهر الخادع
- بطوط وكنكت
- الأستاذ عمار بلغيث
- الأستاذ عمار بلغيث
- الأستاذ اسماعيل دياب
- الأستاذ عمار بلغيث
- الأستاذ عمار بلغيث
- الأستاذ اسماعيل دياب

كتاب الناشئ

صدر منها :

مجموعة: وطني الحبيب

- جدة القديمة
- جدة الحديثة
- الأستاذ يعقوب محمد اسحاق
- الأستاذ يعقوب محمد اسحاق

مجموعة: حكايات ألف ليلة وليلة

- الأستاذ يعقوب محمد اسحاق
- السندباد والبحر

- الديك المغرور والفلاح وحماره
- الطاقية العجيبة
- الزهرة والفراشة
- سلمان وسليمان
- زهور البابونج
- سنبله القمح وشجرة الزيتون
- نظيمة وغنيمة
- جزيرة السعادة
- الحديقة المهجورة
- اليد السفلى
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
- الأستاذة فريدة محمد علي فارسي

الدكتور محمد عبده يمانني }
الأستاذ يعقوب محمد اسحاق } إعداد

الدكتور عبد الفتاح اسماعيل شلبي }
الدكتور سعد اسماعيل شلبي }

• عقبة بن نافع

Books Published in English by Tihama

- Surgery of Advanced Cancer of Head and Neck.
By: F.M. Zahran
A.M.R. Jamjoom
M.D.EED
- Zaki Mubarak: A Critical Study.
By Dr. Mahmud Al Shihabi
- Summary of Saudi Arabian
Third Five Year Development Plan
- Education in Saudi Arabia, A Model with Difference Second Edition
By Dr. Abdulla Mohamed A Zaid
- The Health of the Family in A Changing Arabia
By Dr. Zohair A. Sebai
- Diseases of Ear, Nose and Throat
By: Dr. Amin A. Siraj
Dr. Siraj A. Zakzouk
- Shipping and Development in Saudi Arabia
By: Dr. Baha Bin Hussein Azzee
- Tihama Economic Directory.
- Riyadh Citiguide.
- Banking and Investment in Saudi Arabia.
- A Guide to Hotels in Saudi Arabia.
- Who,s Who in Saudi Arabia.
- An Ethnographic Study of Al-Hasa Region of Eastern Saudi Arabia
By: Dr. Faiz Abdelhameed Taib
- The Role Of Groundwater In The Irrigation And Drainage Of
The Al Hasa Of Eastern Saudi Arabia
By: Dr. Faiz Abdelhameed Taib