

أسم المقرر : الإحصاء في الإدارة

استاذ المقرر: د/ أحمد فرحان



المحاضرة (1)

المجموعات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء آخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

$A, B, C, \dots$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

$a, b, c, \dots$

تابع تعريف المجموعة :-

يستخدم الرمز $\in$ "ينتمي إلى" ليعين عناصر المجموعة
فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A
فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة
 $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا
نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A و يكتب على
الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر) :-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسى المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

$$A = \{ 2,0,1,4 \}$$

$$B = \{ a, b, c, d \}$$

$$C = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل 1 2 3 4 وهكذا)

$$D = \{ 1, 2, 3, \dots, 100 \}$$

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

$$A = \{ x : x \text{ عدد زوجي} \}$$

$$B = \{ x : x \text{ طالب بمقرر الاحصاء في الادارة} \}$$

$$C = \{ x : x \text{ طالب بنظام التعليم عن بعد} \}$$

$$D = \{ x : x \text{ عدد صحيح } -3 \leq x \leq 1 \}$$

$$X = \{ x : x \text{ عدد صحيح } 0 \leq x \leq 12 \}$$

أنواع المجموعات:

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو $\{ \}$.

أمثلة :-

$$A = \{ x : x \text{ عدد طبيعي زوجي و فردي} \}$$

$$B = \{ x : x \text{ دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية} \}$$

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

$$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$$

$$B = \{ 1 , 2 , 3 , \dots , 100 \}$$

$$C = \{ x , y , s , t , u \}$$

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

$$A = \{ x : \text{عدد طبيعي فردي} \}$$

$$B = \{ 10, 20, 30, \dots \}$$

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{ 2, 4, 6 \}$ و $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$$A \subseteq B, B \subseteq A \quad \gggggg \quad A = B$$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

$$1- A = \{1, 5, 7, 9\} \quad , \quad B = \{9, 7, 5, 1\}$$

$$2- A = \{2, 5, 9\} \quad , \quad B = \{a, s, d\}$$

الحل

$$1 - A = B$$

$$2 - A \equiv B$$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B ($A \cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان $A = \{1, 2, 3, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ أوجد ($A \cup B$) ؟

الحل

$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B ($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ و $B = \{0, 2, 4, 6\}$ أوجد $A \cap B$

الحل

$$(A \cap B) = \{0, 2\}$$

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\bar{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ و $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ أوجد

الحل

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

الفرق :-

إذا كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وليست في B .

مثال :-

إذا كانت A={1,2,3,x,y} و B={3,4,5,x,w} أوجد A-B

الحل: $A-B = \{1, 2, y\}$

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\bar{A}$

5- $\bar{B}$

6- $\bar{A} \cup \bar{B}$

7- $\bar{A} \cap \bar{B}$

8- $\bar{A} \cup A$

9- $\bar{A} \cap A$

مثال :-

إذا كانت

و $A = \{1, 2, 3, x, y\}$

$B = \{3, 4, 5, x, w\}$

و المجموعة الكلية

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, w, x, y, z\}$

فأوجد :-

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$

2- $A \cap B = \{3, x\}$

3- $B - A = \{4, 5, w\}$

4- $\bar{A} = \{4, 5, w, z\}$

5- $\bar{B} = \{1, 2, y, z\}$

6- $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$

7- $\bar{A} \cap \bar{B} = \{z\}$

8- $\bar{A} \cup A = U$

9- $\bar{A} \cap A = \{\}$

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ، B بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x , y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت A={-2,1} و B={-3,1,4}

فأوجد $A \times B$ و $B \times A$

الحل

$A \times B = \{(-2,-3), (-2,1), (-2,4), (1,-3), (1,1), (1,4)\}$

$B \times A = \{(-3,-2), (-3,1), (1,-2), (1,1), (4,-2), (4,1)\}$

مثال :-

أنشئ $A \times B$ و $B \times A$ ، علماً بأن :-

$$B = \{w, x, y\} \text{ و } A = \{1, 2\}$$

الحل

$$A \times B = \{(1, w), (1, x), (1, y), (2, w), (2, x), (2, y)\}$$

$$B \times A = \{(w, 1), (w, 2), (x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$$

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1 = x_2)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الأول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني ، $(y_1 = y_2)$

مثال :-

$$\text{أوجد قيم } x \text{ و } y \text{ التي تحقق المعادلة } (x+1, y - \frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$$

الحل

$$x+1 = 4 \quad \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg \quad x = 4-1 = 3$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg \quad y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية $\emptyset$ و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز $P(S)$.

مثال :

$$S = \{a, b, c\}$$

الحل

$$P(s) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \emptyset \}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فإن عدد عناصر $P(S)$ يساوي 2^n .

تمرين :

$$S = \{a, b, c\}$$

$$P(S) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \emptyset \}$$

$$2^3 = 8$$

تمارين:

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

- (a) $A = \{x : x \text{ عدد سالب و موجب}\}$
- (b) $B = \{3, 6, 9, 12\}$
- (c) $C = \{x : x \text{ دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية}\}$
- (d) $D = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$
- (e) $E = \{100, 200, 300, \dots\}$
- (f) $F = \{w, e, r, t\}$

٢- إذا كانت $A = \{3, 5, 7\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

- 1- $A = \{5, 10, 15, 20\}$, $B = \{15, 10, 5, 20\}$
- 2- $A = \{20, 50, 70\}$, $B = \{k, d, u\}$

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\bar{A}$

5- $\bar{B}$

6- $\bar{A} \cup \bar{B}$

7- $\bar{A} \cap \bar{B}$

8- $\bar{A} \cup A$

9- $\bar{A} \cap A$

4- إذا كانت

$A = \{8, 10, 12, r, m\}$ و

$B = \{4, 6, 10, o, r\}$

المجموعة الكلية

$U = \{4, 6, 8, 10, 12, o, r, m, p\}$

ثم أوجد :-

٥- إذا كانت $A = \{-5, 7\}$ و $B = \{-6, 4, 9\}$
فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة
 $(x+1, y-10) = (2x, 15)$ ؟

7- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2, 5, 8\}$ ؟

8- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر ، فأوجد عدد عناصر $P(S)$ ؟

المحاضرة (2)

الدوال

الدالة:-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات، وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو (تتبعين بواسطة) كمية أخرى.

ملاحظة:-

إذا كانت F دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى.

حتى تكون F دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة

- واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور.

- مثال :

- إذا $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,8,12\}$
- و $f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$
- $F_2 = \{(1,4), (2,8)\}$
- $F_3 = \{(1,4), (1,8), (2,4), (3,12)\}$
- فهل f_1, f_2, f_3 دوال من A إلى B ؟

إذا $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,8,12\}$ هل $f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,8,12\}$ فهل $f_2 = \{(1,4), (2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,8,12\}$ فهل $f_3 = \{(1,4), (1,8), (2,4), (3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل الدالة

- 1- $R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$
- 2- $R = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
- 3- $R = \{(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$
- 4- $R = \{(-3,1), (-1,1), (0,1), (4,1)\}$
- 5- $R = \{(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4)\}$
- 6- $R = \{(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1)\}$

$$1- R = \{(1,1) , (2,2) , (4,4) , (9,9)\}$$

$$2- R = \{(3,0) , (3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) \}$$

$$3- R = \{(-4,0) , (-4,4) , (2,3) , (1,9) \}$$

$$4- R = \{(-3,1) , (-1,1) , (0,1) , (4,1)\}$$

$$5- R = \{(0,7) , (1,5) , (1,2) , (3,-4)\}$$

$$6- R = \{(-1,2) , (2,2) , (3,5) , (6,1)\}$$

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- $f(2)$

2- $f(-1)$

3- $f(a)$

4- $f(x+1)$

مثال :

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ فأوجد :-

1- $f(-3)$

2- $f(1/2)$

3- $f(a)$

تمارين:-

١- للدالة $f(x) = 2x^2 - x - 5$ أحسب $f(t)$ و $f(-5)$.

٢- للدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ أحسب $f(2) + f(-1) + f(3)$.

٣- للدالة $f(x) = x + 4$ أحسب $2f(4) + 3f(-1)$.

٤- للدالة $f(x) = x^2 - 1$ أحسب $f(3) - f(-2)$.

الدوال الحقيقية :-

: الحدود كثيرة دالة •

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) .

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$$

$$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى بالدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة، وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة و تركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = x^2 + 1$

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$

$$= f(x) + f(g)$$

$$= 3x + 5 + x^2 + 1$$

$$= x^2 + 3x + 6$$

مثال إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

$$\begin{aligned} 2-(f-g)(x) &= \\ &= f(x) - g(x) \\ &= (3x+5) - (x^2+1) \\ &= 3x+5 -x^2-1 \\ &= -x^2 + 3x +4 \end{aligned}$$

مثال إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

$$\begin{aligned} 3-(f \times g)(x) &= \\ &= f(x) \times g(x) \\ &= (3x+5) \times (x^2+1) \\ &= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\ &= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x \times 5x$ و $g(x) = x^2+1$ فأوجد :

$$4- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

أيجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرسم له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_2 \neq x_1$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-3)}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

إذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$
$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :-

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$
$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ إذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$
مثال : هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$
$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

إذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :
معادلة الخط المستقيم الذي ميله m و يمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5, -3)$ و ميله يساوي -2 .

الحل:-

$$m = -2 \quad , \quad x_1 = 5 \quad , \quad y_1 = -3$$
$$y - (-3) = -2(x - 5)$$
$$y + 3 = -2(x - 5)$$
$$y = -2x + 7$$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$$f_1=\{(5,2),(9,3),(13,4)\}$$

$$f_2=\{(5,2),(9,3),(13,6)\}$$

$$f_3=\{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$$

فهل $f_1 f_2 f_3$ دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

$$1- R = \{(1,4), (2,4), (3,3), (4,5)\}$$

$$2- R = \{(2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (5,2)\}$$

$$3- R = \{(-1,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$$

٣- للدالة $f(x) = 2x^3 + 10x^2 - 15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤- إذا كانت $f(x)=6x+3$ و $g(x)=10$ فأوجد:

$$(f+g)(x), (f-g)(x), (f \times g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6, \frac{-3}{4})$ و $B(4, \frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ و $B(7, \frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$-5x + 3y - 8 = 0$$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$12x = -9y + 30$$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y - 4 = 0$ و $4y = 16x + 4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y - 12x - 6 = 0$ ، $8y + 2x - 30 = 0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(9, -2)$ و ميله يساوي 5- ؟

المحاضرة (3)

النهايات والاتصال

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدالة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :

- 1- إذا كانت $f(x) = c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .
- 2- إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 5} 30 = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times -2) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

$$\begin{aligned} 1- \lim_{x \rightarrow 5} [h(x) - f(x)] \\ = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ = 10.5 - 5 = 5.5 \end{aligned}$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$\begin{aligned} 2- \lim_{x \rightarrow 5} [g(x) \times h(x)] \\ = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \\ = -8 \times 10.5 = -84 \end{aligned}$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$\begin{aligned} 3- \lim_{x \rightarrow 2} 8 f(x) \\ = 8 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 \times 5 = 40 \end{aligned}$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$\begin{aligned} 4- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} \\ = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فليكن :-

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} [3x - 1]^6 &= [\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1]^6 \\ &= [3 \times 1 - 1]^6 = [3 - 1]^6 = [2]^6 = 64\end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}1- \lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 + 5x^2 - 7) \\ &= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7 \\ &= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37\end{aligned}$$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}2- \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 7}{x - 5} \\ &= \frac{3 \times 3^2 + 7}{3 - 5} = \frac{3 \times 9 + 7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17\end{aligned}$$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}3- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{5x + 3} \\ &= \frac{2 \times 2 - 1}{5 \times 2 + 3} = \frac{4 - 1}{10 + 3} = \frac{3}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4- \lim_{x \rightarrow 2} e^x \\ &= e^2\end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}5- \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 + 2x + 1} \\ &= e^{1^2 + 2 \times 1 + 1} = e^{1 + 2 + 1} = e^4\end{aligned}$$

$$6- \lim_{x \rightarrow 2} \log(3x^2 + 5) = \log(3 \times 2^2 + 5)$$

$$= \log(3 \times 4 + 5)$$

$$= \log(12 + 5) = \log(17)$$



أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$7- \lim_{x \rightarrow 3} \ln(2x - 5) = \ln(2 \times 3 - 5) = \ln(6 - 5) = \ln(1) = 0$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$8- \lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 + 4x - 2)^3 = ((3 \times 1^3) + 4 \times 1 - 2)^3$$

$$= (3 + 4 - 2)^3 = (5)^3 = 125$$

$$9- \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9} = 2.08$$

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلا بد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولى (x تؤول إلى 3 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى 7 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

فأوجد :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ (و 3 تقع في مجال الدالة الثانية)}$$

$$= 7x - 2 = 7 \times 3 - 2 = 19$$

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases} \text{ إذا كانت}$$

فأوجد :-

$$2- \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) \text{ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)}$$

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 3 \times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

مثال :

إذا كانت

فأوجد :-

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

الحل

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ (النهاية من اليمين)}$$

$$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ (النهاية من اليسار)} =$$

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ هذه النهاية غير موجودة}$$

مثال :

إذا كانت

فأوجد :-

الحل

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \text{ (النهاية من اليمين)}$$

$$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \text{ (النهاية من اليسار)} =$$

$$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R .

2- لابد و أن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة (4)

الجزء الاول : تابع الاتصال

الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاتصال :-

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

$$f(5) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 6x = 6 \times 5 = 30$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذن فهذه الدالة غير متصلة عند $x=5$.

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

$$f(10) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 12x^2 = 12 \times 10^2 = 1200$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذن فهذه الدالة غير متصلة عند $x=10$.

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

$$f(8) = 20x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 1160 + 15x = 1160 + 15 \times 8 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 20x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند $x=8$.

تمارين الواجب :-

تمرين 1 :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (9x - 2)$$

تمرين 2 :-

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 20$ و $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -15$ و $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 18.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x \rightarrow 5} [h(x) + f(x)]$

2- $\lim_{x \rightarrow 5} [h(x) - g(x)]$

3- $\lim_{x \rightarrow 5} [g(x) \times f(x)]$

$$4- \lim_{x \rightarrow 5} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right]$$

تمرين 3 :-

أوجد :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 1} [5x - 2]^2$$

$$2- \lim_{x \rightarrow 2} [10 - 2x]^2$$

تمرين 4 :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 5} (2x^3 - 2x^2 - 50)$$

$$2- \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x)$$

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} \log(10x^4 + 15)$$

$$4- \lim_{x \rightarrow 2} e^{2x^2 + 3x + 2}$$

$$5- \lim_{x \rightarrow 3} \ln(20x^2 - 5x + 10)$$

تمرين 5 :-

إذا كانت

فأوجد :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$2- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

تمرين 6 :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 10$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير : بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلاً:

إذا كان الربح مثلاً يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل :

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الآخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y = 5x + 9$

المطلوب :- المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx} = \text{?????}$

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يؤثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

$$1- y = x^5 \quad \frac{dy}{dx} = 5 x^4$$

$$2- y = 15 x^4 \quad \frac{dy}{dx} = 60 x^3$$

$$3- y = 10 x \frac{dy}{dx} = 10$$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$1- y = 5 x^4 + 6 x^3 + 8 x^2 + 3 x$$

$$\frac{dy}{dx} = 20 x^3 + 18 x^2 + 16 x + 3$$

$$2- y = 20 x^5 + 10 x^3 - 5 x^2 + 15 x + 30$$

$$\frac{dy}{dx} = 100 x^4 + 30 x^2 - 10 x + 15$$

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$1- y = 5 x^4 + 6 x^3 + 8 x^2 + 3 x$$

$$\frac{dy}{dx} = 20 x^3 + 18 x^2 + 16 x + 3$$

$$2- y = 20 x^5 + 10 x^3 - 5 x^2 + 15 x + 30$$

$$\frac{dy}{dx} = 100 x^4 + 30 x^2 - 10 x + 15$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى كما هي $\times$ مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي $\times$ مشتقة الدالة الاولى

مثال :-

$$1- y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x^2 - 7x)(3)$$

$$2- y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين البسط بالمقام

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x-3x-6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس $\times$ تفاضل ما بداخله

مثال :-

$$1 - y = (15x^2 + 20)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$$

$$2 - y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5 \quad (\text{المشتقة الاولى})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40 \quad (\text{المشتقة الثانية})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة $= 1$ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهاية المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\text{السعر المطلوبة الكمية}} \times$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (1):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\text{السعر المطلوبة الكمية}} \times$$

$$م = (-6) \times \frac{100}{0.6} = -100$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن.

مثال (2):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 200 - 10x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -10)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\text{السعر المطلوبة الكمية}} \times$$

$$م = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة.

مثال (3):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 15x - 20)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 1000 وحدة عند سعر يساوي 100 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = 15)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\text{السعر المطلوبة الكمية}} \times$$

$$م = \frac{100}{1000} \times (15) = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن.

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي $(D = 1.5x + 20)$ أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبة هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

تابع التفاضل و تطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار = المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K' = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - 0.04 = 0.56$$

3- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$= 1 - \text{الميل الحدي للاستهلاك} = 1 - 0.56 = 0.44$$

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 18 + 0.8x - 0.15x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.8 - 0.3x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K' = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

3- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال = 1 - الميل الحدي للاستهلاك = 1 - 0.5 = 0.5

3- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

- 1 - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .
 - 2 - يتم إيجاد المشتقة الثانية .
 - 3 - تحديد نوع النهاية (عظمى - صغرى) .
- إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة .: يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = -0.4x^2 + 300x - 2000$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمى أم صغرى ؟

الحل

1- المشتقة الأولى للدالة :-

$$P' = -0.8x + 300$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = -0.8$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمى

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = 500 - 0.2x + 0.1x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمى أم صغرى ؟

الحل

1- المشتقة الأولى للدالة :-

$$P' = -0.2 + 0.2x$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = 0.2$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

4- الربح الحدي

1- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

3- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي .

6- الربح الحدي = الإيراد الحدي - التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي

$$R' = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$$R' = 36x^2 + 40x - 10 = 36 \times 10^2 + 40 \times 10 - 10 = 3990 \text{ ريال}$$

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$\text{Selling price (سعر وحدة البيع)} = 4x^2 + 6x + 5$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الوحدة

$$R = (\text{دالة سعر بيع الوحدة} \times x)$$

$$x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x \times R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20)$$

2- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 2885 \text{ r.s}$$

مثال (3) :-

في إحدى شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الوحدة

$$R = (\text{دالة سعر بيع الوحدة} \times x)$$

$$x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x \times R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20)$$

2- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

$$= 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20$$

4205 ريال

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 - 12x + 15$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = 10x^2 - 12x + 15 \text{ (التكاليف الكلية)}$$

$$C' = 20x - 12 \text{ (التكاليف الحدية)}$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188 \text{ r.s}$$

مثال (5) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3 \text{ (التكاليف الكلية)}$$

$$C' = 3 \times (5x^2 - 3x + 15)^2 \times (10x - 3) \text{ (التكاليف الحدية)}$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$$C' = 3 \times (5x^2 - 3x + 15)^2 \times (10x - 3)$$

$$= 3 \times (5 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15)^2 \times (10 \times 20 - 3)$$

$$= 3 \times (5 \times 400 - 60 + 15)^2 \times (200 - 3)$$

$$= 3 \times (1955) \times (197) = 1155405 \text{ r.s}$$

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$$

$$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

$$P' = 6x^2 - 21x + 1$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$$P' = 6x^2 - 21x + 1 = 6 \times 30^2 - 21 \times 30 + 1 = 4771 \text{ r.s}$$

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$$

$$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5 = 36 \times 25^2 + 30 \times 25 - 5 = 23245 \text{ r.s}$$

تمرين شامل (1)

الربح الحدي

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الإيرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = 30 x^4 + 12x^2 - 6 x + 15$$

$$C = 13 x^3 - 5x^2 + 3 x - 20$$

المطلوب :-

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

الحل

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$$R = 30 x^4 + 12x^2 - 6 x + 15$$

$$R' = 120 x^3 + 24x^2 - 6$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$$R' = 120 \times 10^3 + 24 \times 10^2 - 6 = 122394 \text{ r.s}$$

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$$C = 13 x^3 - 5x^2 + 3 x - 20$$

$$C' = 39 x^2 - 10x + 3$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$C' = 39 \times 12^2 - 10 \times 12 + 3 = 5499 \text{ r.s}$$

3- دالة الربح الكلي :-

$$R = 30 x^4 + 12x^2 - 6 x + 15$$

$$C = 13 x^3 - 5x^2 + 3 x - 20$$

$$P = R - C = 30 x^4 - 13 x^3 + 17x^2 - 9 x + 35$$

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$P' = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 34 \times 12 - 9 =$$

تمرين شامل (2)

الربح الحدي

لإعتبارات المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 3x^2 + 25x - 18$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

المطلوب :-

- 1- دالة الايراد الكلي .
- 2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .
- 3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .
- 4- دالة الربح الكلي .
- 5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الوحدة

$$R = x (\text{دالة سعر البيع الوحدة})$$

$$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$$

$$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R' = 9x^2 + 50x - 18$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$$R' = 9 \times 5^2 + 50 \times 5 - 18 = 1457 \text{ r.s}$$

2- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R' = 9x^2 + 50x - 18$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$$R' = 9 \times 5^2 + 50 \times 5 - 18 = 1457 \text{ r.s}$$

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$C' = 20x + 2$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$$C' = 20 \times 20 + 2 = 402 \text{ r.s}$$

4- دالة الربح الكلي :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

$$P' = 9x^2 + 30x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$$P' = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180 \text{ r.s}$$

تمارين واجب :-

1- إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 0.3x - 0.01x^2$) المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للإدخال.

2- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = 3x^2 + 5x + 100$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

3- إذا علمت أن :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 8x^3 + 10x^2 + 5x + 12$$

$$C = 4x^2 + 3x - 10$$

المطلوب :-

- 1- دالة الإيراد الكلي .
- 2- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .
- 3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 15 وحدة .
- 4- دالة الربح الكلي .
- 5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 12 وحدات .

