١

المجموعة هي تجمع من الاشياء المعرفة جيداً مثل اعداد / اشياء

ترمزلها A , B , C , D....

المجموعة تتكون من عناصر a , b , c , d

الانتماء $\in$ الموجود من المجموعة

عدم الانتماء $\notin$ الغير موجود من المجموعة

طرق التعبير المجموعات ‏[الترتيب غير مهم في المجموعات

[1] طريقة السرد $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{a, b, c, d, \ldots\}$

C = { خالد، محمد، أحمد، زيد }

[2] طريقة الصفة المميزة

A = { عبدالله، محمد، خالد، عبدالعزيز }

A = { x : x احد اصدقائي في الجامعة }

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

A = { x : x احد الاعداد الزوجية }

٢

الصفة المميزة	السرد
$C = \{x :$ عدد زوجي $\}$	$C = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
$D = \{x : -3 \le x \le 1$, عدد صحيح $\}$	$D = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
$X = \{x : 0 \le x \le 12$, عدد صحيح $\}$	$X = \{x = 0, +1, 2, \dots\}$

أنواع المجموعات

مجموعة غير منتهية	المجموعة الخالية ϕ	مجموعة منتهية
$C = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$	$\{\ \}$	$A = \{1, 2, 3, 4\}$
عدد عناصرها غير محدود	هي التي لا تحتوي على أي عنصر	عدد عناصرها محدود
	$A = \{x : x^2+1 = 0$, عدد صحيح $\}$	$B = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$

$$x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = -1$$

لا يوجد جذر تربيعي لعدد سالب

1) $X = \{1, 4, 7, 5\}$ مجموعة منتهية

2) $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ مجموعة غير منتهية

3) $C = \{1, 2, \dots, 1000\}$ مجموعة منتهية

4) $F = \{x : x^2+1 = 0$, عدد صحيح $\}$ مجموعة خالية

٣

تساوي مجموعتين = $A = B$

1 لهما نفس العناصر　　2 لهما نفس عدد العناصر

$A = \{5, 7, 8, 9\}$　　$B = \{9, 7, 6, 8\}$

$A = B$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$　　$B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$A \neq B$

2 تكافؤ مجموعتين ≡　　$A \equiv B$ لهما نفس عدد العناصر

$A = \{1, 2, 3, 4\}$　　$B = \{a, b, c, d\}$

$A \equiv B$

العمليات على المجموعات :　　U مجموعة كلية

1 التقاطع $\cap$	2 الاتحاد $\cup$	3 الفرق $-$	4 المكملة $\bar{A}$
$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	العناصر الموجودة في المجموعة الكلية U وغير موجودة في A
العناصر المشتركة	كل العناصر بدون تكرار	العناصر الموجودة في A وليست موجودة في B	

مثال $A = \{3, 4, 7, a, b\}$, $B = \{a, b, 3, c\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, a, b, c, x\}$

1 $A \cap B = \{3, a, b\}$

2 $A \cup B = \{3, 7, a, b, c, 4\}$

3 $A - B = \{4, 7\}$

4 $\bar{A} = \{1, 2, 8, c, x\}$　　5 $\bar{B} = \{1, 2, 4, 7, 8, x\}$

٢

المحاضرة ٤ الحاصل الضرب الديكارتي

$A = \{-2, 3, 5\}$ $B = \{-4, 1\}$

① $A \times B = \{-2, 3, 5\} \times \{-4, 1\}$

$= \{ (-2, -4) ، (-2, 1) ، (3, -4)$

$(3, 1) ، (5, -4) ، (5, 1) \}$

② $B \times A = \{-4, 1\} \times \{-2, 3, 5\}$

$= \{ (-4, -2) ، (-4, 3) ، (-4, 5)$

$(1, -2) ، (1, 3) ، (1, 5) \}$

عدد عناصر $A \times B$ = عدد عناصر A × عدد عناصر B

$= 3 \times 2 = 6$ زوج مرتب

مثال من المحاضرة

اذا كانت $A = \{-2, 1\}$ ، $B = \{-3, 1, 4\}$

اوجد $A \times B$ ، $B \times A$

$A \times B = \{(-2, -3) ، (-2, 1) ، (-2, 4) ، (1, -3) ، (1, 1) ، (1, 4)\}$

$B \times A = \{(-3, -2) ، (-3, 1) ، (1, -2) ، (1, 1) ، (4, -2) ، (4, 1)\}$

$A \times B \neq B \times A$

٣

مثال ١ أوجد $A \times B$ إذا كان

$A = \{1, 2\}$ ، $B = \{w, x, y\}$

$A \times B = \{(1, w), (1, x), (1, y),$

~~$B \times A =$~~ $(2, w), (2, x), (2, y)\}$

الأول = الأول
الثاني = الثاني

أوجد x ، y $\left[\,x+1,\ y-\frac{1}{2}\,\right] = \left[\,4,\ \frac{3}{2}\,\right]$

الأول

$x + 1 = 4$
$x = 4 - 1$
$x = 3$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$
$y = \frac{4}{2} = 2$

أوجد قيمة x ، y إذا كان $\left[x+2,\ y-\frac{1}{2}\right] = \left[5,\ \frac{7}{2}\right]$

$x + 2 = 5$
$x = 5 - 2$
$x = 3$

$y - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$
$y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}$
$y = \frac{8}{2}$
$y = 4$

٤ مجموعة المجموعات P (عدد عناصر = ٢ عدد عناصر المجموعة)

مثال: اكتب مجموعة مجموعات المجموعة $U = \{a, b, c\}$

الحل

$$P = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \phi, U\}$$

كل عنصر بمفرده
كل عنصرين مع بعض
الـ ٣ مع بعض
ϕ المجموعة نفسها

$8 = 2^3$

مثال: اكتب مجموعة المجموعات للمجموعة $B = \{1, 2, 3\}$

الحل

$$P = [\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \phi, B]$$

تمرين: اكتب مجموعة المجموعات للمجموعة $A = \{1, 2\}$

$$P = \{\{1\}, \{2\}, \phi, A\}$$

① كل عنصر بمفرده
② الاثنين
③ ϕ
④ المجموعة نفسها

مجموعة الاعداد الطبيعية $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعة الاعداد الصحيحة $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

مجموعة الاعداد النسبية (على صورة كسر) $Q = \{\frac{a}{b}\}$

مجموعة الاعداد غير النسبية (الاعداد التي لها جذور) $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$

مجموعة الاعداد الحقيقية R $N \subset Z \subset Q \subset$

①

بسم الله الرحمن الرحيم

① ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}}$$

مثال

أوجد ميل المستقيم الواصل بين النقطتين $Q(3, 7)$ و $P(1, -3)$

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-3)}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

لاحظ

① إذا كان الميل = صفر ∴ المستقيم يوازي محور السينات

② " " الميل = ∞ (يعني الناتج $\frac{\text{رقم}}{\text{صفر}}$) ∴ المستقيم يوازي محور الصادات

---

② ميل المستقيم الذي معادلته الصورة $ax + by + c = 0$ حيث $a, b \neq$ صفر هو

$$\boxed{\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = m = \frac{-a}{b}}$$

مثال

أوجد ميل المستقيم الذي معادلته $2x + 4y - 7 = 0$

الحل $b = 4$ ، $a = 2$ ،

$$\therefore m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

المستقيمات المتوازية يقال أن المستقيم L_1 موازي للمستقيم L_2 إذا كان $m_1 = m_2$

مثال هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل $m_1 = \frac{-4}{-1} = 4$ و $m_2 = \frac{-4}{-1} = 4$ ∴ المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة يقال أن المستقيم L_1 متعامد مع المستقيم L_2 إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ و $3y + x - 15 = 0$ متعامدان

$m_1 = \frac{-(-3)}{1} = \frac{3}{1} = 3$ و $m_2 = \frac{-1}{3}$

$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{-1}{3} = -1$$

∴ المستقيمان متعامدان

٥

① معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطة وميل m $p(x_1, y_1)$ هي

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

مثال

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5, -3)$ وميله يساوي -2

الحل $y_1 = -3$ ، $x_1 = 5$ و $m = -2$

$$\because y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-3) = -2(x - 5)$$

$$y + 3 = -2x + 10$$

$$\therefore y = -2x + 10 - 3 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 7}$$

② معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هي

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

مثال

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $\overset{x_1, y_1}{(1, -2)}$ ، $\overset{x_2, y_2}{(5, 6)}$

الحل

$$\because \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \therefore \frac{y - (-2)}{x - 1} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} \quad \therefore \frac{y + 2}{x - 1} = \frac{6 + 2}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{y + 2}{x - 1} = \frac{2}{1} \qquad \therefore y + 2 = 2x - 2 \qquad \boxed{\therefore y = 2x - 4}$$

③ معادلة الخط المستقيم بدلالة ميل والمحور الصادي هي

$$\boxed{y = mx + b}$$ حيث m هو الميل و b الجزء المقطوع من المحور الصادي

مثال أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m = 3$ (ويقطع جزء من محور الصادات) ومقطوعه الصادي $b = -2$

الحل

$$\because y = mx + b$$

$$\boxed{\therefore y = 3x - 2}$$

إذا طلب الميل والمقطع الصادي!

مثال أوجد الميل والمقطوع الصادي لمستقيم $2x + 3y = 6$

الحل نجعل المعادلة على الشكل $y = mx + b$ كالتالي

$$\frac{3y}{3} = \frac{-2x}{3} + \frac{6}{3}$$ نقسم المعادلة ÷ ٣

$$\therefore y = \frac{-2}{3}x + 2$$

الرقم الذي أمام x هو الميل $\therefore m = \frac{-2}{3}$

الرقم الحر هو المقطوع الصادي $\therefore b = 2$

(٣٢)

٤) معادلة الخط المستقيم بدلالة الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات هي

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

حيث a الجزء المقطوع من محور السينات
b " " " " " الصادات

مثال أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله ٣ سم ومن محور الصادات جزءاً طوله ٢ سم

الحل $a = 3$ ، $b = 2$

$$\therefore \frac{x^{\times 2}}{3_{\times 2}} + \frac{y^{\times 3}}{2_{\times 3}} = 1$$

نوحد المقامات $\therefore \frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = 1$

$$\frac{2x+3y}{6} = \frac{1}{1}$$

$$\boxed{\therefore 2x + 3y = 6}$$

إذا طلب الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات لمستقيم معادلته $ax + by = c$

مثال أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته

$$2x - 3y = 5$$

نجعل المعادلة على الشكل

الحل ~~...~~

$$\therefore a = \frac{\text{العدد}}{\text{معامل } x} \quad , \quad b = \frac{\text{العدد}}{\text{معامل } y}$$

$$\therefore a = \frac{5}{2} \quad , \quad b = \frac{5}{-3}$$

المتباينات

١) فترة مغلقة $[a, b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$ مغلقة، يقرأ تنتمي

٢) فترة مفتوحة $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ مفتوحة

٣) فترة نصف مغلقة، نصف مفتوحة $[a, b) = \{x \in R\ a \le x < b\}$

٤) فترة نصف مفتوحة، نصف مغلقة $(a, b] = \{x \in R\ a < x \le b\}$

٤

حل المتباينة ① $4x+7 \geq 2x-3$

الحل

$4x-2x \geq -3-7$

$\frac{2x}{2} \geq \frac{-10}{2}$ $\quad x \geq -5$

مجموعة الحل هي الفترة $[-5, \infty)$

حل المتباينة ② $-5 < 3x-2 < 1$

الحل

$+2-5 < 3x < 1+2$

$\frac{-3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{3}{3}$

$-1 < x < 1$

مجموعة الحل هي الفترة $(-1, 1)$

حل المتباينة $x^2+x-12>0$

$x \; 3$, $x \; 4$

$\therefore (x+4)(x-3)>0$ $\therefore x>-4$ ، $x>3$

أو $(x+4)(x-3)<0$ $\therefore x<-4$ ، $x<3$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

※ في حالة > أو ≥ نأخذ الاتحاد فقط

حل المتباينة $x^2 \leq 4x+12$ الحل

$x^2-4x-12 \leq 0$ $\quad x \; 6$, $x \; 2$

$(x-6)(x+2) \leq 0$

$\therefore x \leq 6$ أو $x \leq -2$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $[-2, 6]$

القيمة المطلقة $| \; |$

حل المتباينة $|2x+4| \leq 3$

الحل

$-3 \leq 2x+4 \leq 3$

$-4-3 \leq 2x \leq 3-4$

$\frac{-7}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{-1}{2}$

$-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي الفترة $[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}]$

حل المتباينة $|2x-5|>3$

الحل

$-3 > 2x-5 > 3$

$+5-3 > 2x > 3+5$

$\frac{2}{2} > \frac{2x}{2} > \frac{8}{2}$

$1 > x > 4$

$\therefore$ مجموعة الحل هي ٤ وأكثر واحد وأقل

$(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

أو $(1, 4)$

الدوال ① الدالة الأسية $f(x)=2^x$

② الدوال المثلثية $y=\sin x$ ، $y=\cos x$

$y=\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

③ الدالة اللوغاريتمية $f(x)=\log_4(2x+4)$

~~$\log_b xy = \log_b x + \log$~~

$y=\csc x \Rightarrow \frac{1}{\sin x}$

$y=\cot x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}$

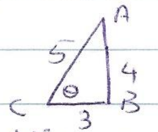
(٥)

التفسير الهندسي للدوال المثلثية

مقابل ، الوتر ، مجاور

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ ، $\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

مثال: إذا كان $\cot\theta = \frac{3}{4}$ $\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$ فأوجد النسب الأساسية $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$



من فيثاغورث

$25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2 = AC^2$ $\quad \therefore AB = \sqrt{25} = 5$

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5}$ ، $\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{4}{3}$

الدالة النسبية $\frac{\text{مقام}}{\text{بسط}}$ مثال $f(x) = \frac{x+7}{x+5}$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}$

الدالة الصريحة مثال $y = 2x + 3$

الدالة الضمنية مثال $x^2 + y^2 = 25$ ، $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

الدالة الزوجية: تعتبر الدالة $y = f(x)$ زوجية إذا كانت $f(-x) = f(x)$

مثال: هل الدالة $f(x) = x^2$ دالة زوجية؟

الحل:

$f(-x) = (-x)^2$

$f(-x) = x^2 = f(x)$

$\therefore$ الدالة زوجية

الدالة الفردية: تعتبر الدالة $y = f(x)$ فردية إذا كانت $f(-x) = -f(x)$

مثال: هل الدالة $f(x) = x^3 + x$ فردية؟

الحل:

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

$= -x^3 - x = -(x^3 + x)$

$\therefore f(-x) = -f(x)$ $\quad \therefore$ الدالة فردية

تطبيقات اقتصادية

دالة الطلب على سلعة معينة

$Q_D = 25 - 5P$

أوجد ١) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$ ← عند $P = 3$

$1)\ Q_D = 25 - 5 \times 3 = 25 - 15$

$Q_D = 10$

٢) سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$ ←

$2)\ 18 = 25 - 5P \quad 18 - 25 = 5P \quad -7 = 5P$

$\therefore P = \frac{7}{5}$

٣) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل $P = 0$

$3)\ Q_D = 25 - 5 \times 0 = 25$

٤) أعلى سعر يمكن أن يدفعه شخص لهذه السلعة

أعلى سعر عندما

$4)\ Q_D = 0$

$\therefore 0 = 25 - 5P \quad \therefore \frac{25}{5} = \frac{5P}{5} \quad \therefore P = 5$

٦

دالة العرض (الانتاج) الخطية Q_s

إذا كانت $Q_s = 3P - 2$

فاوجد

١) Q_s إذا كانت $P = 5$

٢) P إذا كانت $Q_s = 10$

٣) اقل سعر يمكن ان تباع به وحدة السلعة لتغطي حاجة الانتاج اي عندما $Q_s = 0$

1) $Q_s = 3 \times 5 - 2 = 15 - 2$

$Q = 13$

2) $10 = 3P - 2$ ∴ $10 + 2 = 3P$

$\frac{12}{3} = \frac{3P}{3}$

∴ $P = 4$

3) $0 = 3P - 2$ ∴ $\frac{3P}{3} = \frac{2}{3}$ ∴ $P = \frac{2}{3}$

٣) التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين

مثال إذا كانت ان دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 2 - P$ وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_s = P - 1$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

الحل

يحدث التوازن عندما تتساوى الكميات المعروضة والمطلوبة

∴ $Q_s = Q_D$

∴ $P - 1 = 2 - P$ ∴ $P + P = 2 + 1$ ∴ $\frac{2P}{2} = \frac{3}{2}$

∴ $P = \frac{3}{2}$ سعر التوازن

نعوض عن سعر التوازن في احدى الدالتين ولتكن دالة العرض

$Q_s = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$

رسم الدوال

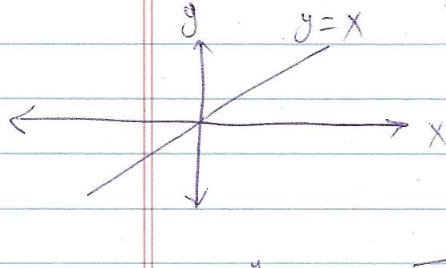
١) رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة

١) نكون الجدول $y = f(x) = x$

عندما $x = 1$ $f x = 1$ وهكذا

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3

٢) نرسم الدالة

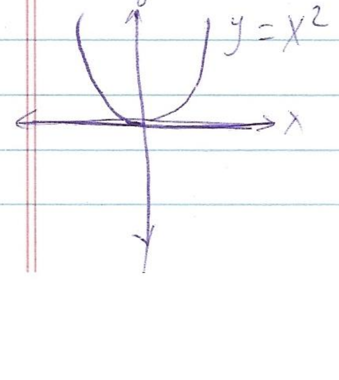


٢) الدالة التربيعية مثال ارسم الدالة $y = f(x) = x^2$

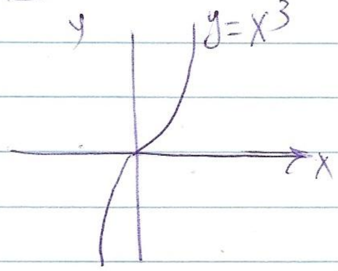
اولاً نكون الجدول

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y f(x)	9	4	1	0	1	4	9

ثم نرسمها



٧



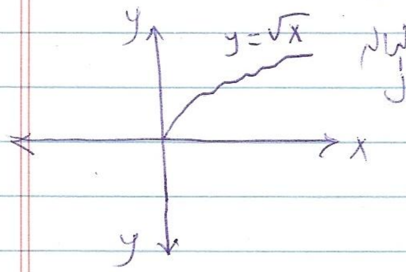
③ الدالة التكعيبية

مثال ارسم الدالة $y=f(x)=x^3$

الحل ① تكوين الجدول

X	-2	-1	0	1	2
y f(x)	8	1	0	1	8

② نرسم الدالة من الجدول



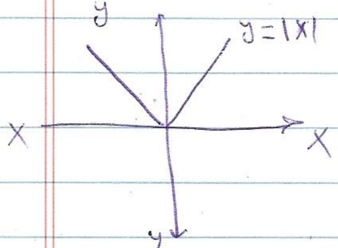
④ الدالة الجذر التربيعي

مثال ارسم الدالة $y=f(x)=\sqrt{x}$

الحل تكوين الجدول

X	0	1	2	3	4
y f(x)	0	1	1.4	1.7	2

② ارسم الدالة من الجدول



⑤ دالة القيمة المطلقة

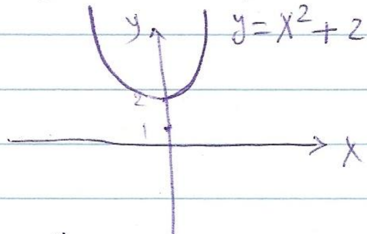
ارسم الدالة $y=f(x)=|x|$

الحل

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y f(x)	3	2	1	0	1	2	3

② نرسم الدالة من الجدول

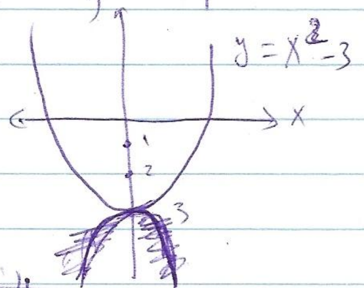
في الدالة التربيعية



الإزاحة إلى أعلى

مثال ارسم منحنى الدالة $y=x^2+2$

نلاحظ أنها دالة تربيعية قيمتها $y=x^2$ وحركتها إلى أعلى بمقدار وحدتين



الإزاحة إلى أسفل

مثال ارسم الدالة $y=x^2-3$

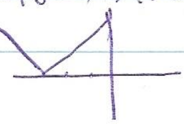
الحل نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=x^2$ ثلاث وحدات للأسفل

الإزاحة لليمين واليسار في دالة القيمة المطلقة عكس الإشارة

الإزاحة إلى اليسار

ارسم الدالة $y=|x+3|$

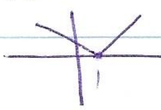
نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=|x|$ ٣ وحدات إلى اليسار



الإزاحة إلى اليمين

ارسم الدالة $y=|x-1|$

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=|x|$ وحدة واحدة لليمين



٨

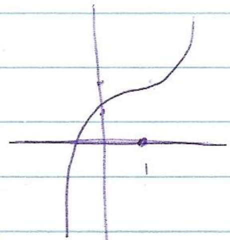
أماكن الدالة الأسية الإزاحة لليمين واليسار وبنفس الوقت لأعلى وأسفل

نلاحظ الإشارة مع الأس − لليمين + لليسار

٥ الإشارة خارج القوس + لأعلى − لأسفل

مثال ارسم الدالة $y = (x-1)^3 \pm 2$

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^3$ وحدة واحدة لليمين ثم وحدتان لأعلى



انعكاس على محور السينات

السينات

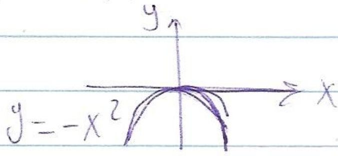
٥ الانعكاس على محور X

— يمكن الحصول على منحنى $y = -f(x)$ بانعكاس منحنى $y = f(x)$ على محور X

مثال ارسم الدالة $y = -x^2$

∴ هي انعكاس لمنحنى الدالة $y = x^2$ على محور X

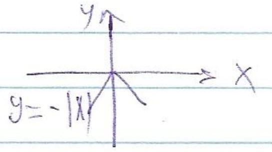
∴ ص



ارسم الدالة $y = -|x|$

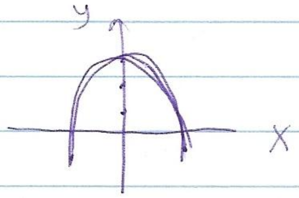
انعكاس

∴ هي انعكاس للدالة $y = |x|$



ارسم الدالة $y = -x^2 + 3$ ∴

∴ هي انعكاس لمنحنى الدالة $y = x^2$ على محور X ثم إزاحته ٣ وحدات لأعلى



الانعكاس على محور y

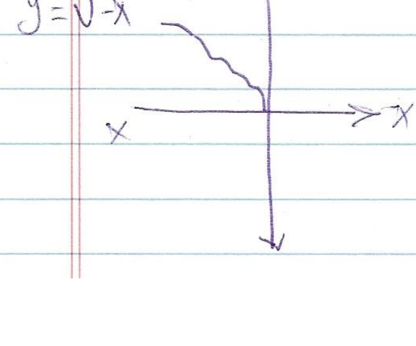
الصادات

— يمكن الحصول على منحنى $y = f(-x)$ بانعكاس منحنى $y = f(x)$ على محور y

مثال

ارسم الدالة $y = \sqrt{-x}$

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ على محور الصادات y كالتالي



٩

النهايات أوجد ① $\lim_{x\to 5} 27$ ② $\lim_{x\to -2}(1-2x)$ ③ $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$

الحل ① $\lim_{x\to 5} 27 = 27$

2) $\lim_{x\to -2}(1-2x) = 1-(2\overset{\text{ضرب}}{\times}-2) = 1+4=5$

3) $\lim_{x\to 5}(8x-5) = 8\times\frac{1}{2}-5 = 4-5=-1$

عمليات على النهايات

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ وكانت $\lim_{x\to\infty} g(x) = K$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L\pm K$$ مهم

مثال إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ ، $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$

أوجد

① $\lim_{x\to 2}[h(x)-f(x)]$

الحل

$$\lim_{x\to 2}[h(x)-f(x)] = 10.5-5 = 5.5$$

② أوجد

$\lim_{x\to 2}[f(x)+h(x)+g(x)]$

الحل

$$\lim_{x\to 2}[f(x)+h(x)+g(x)] = 5+10.5+(-8) = 15.5-8 = 7.5$$

$$\lim_{x\to a} \overset{\text{عدد}}{c}\cdot f(x) = c\times\lim_{x\to a} f(x) = c\times L$$

مثال أوجد $\lim_{x\to 2} 8f(x)$

الحل $f(x)=5$

$$\lim_{x\to 2} 8f(x) = 8\lim_{x\to 2} f(x) = 8\times 5 = 40$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x) = L\times K$$

مثال

أوجد $\lim_{x\to 2}[g(x)\times h(x)]$ الحل

$$\lim_{x\to 2} g(x)\times\lim_{x\to 2} h(x) = -8\times 10.5 = -84.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{K}$$

مثال أوجد ① $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$

الحل

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5}{-8}$$

② أوجد $\lim_{x\to 2}[f(x)-g(x)\times h(x)]$ الحل ⟸ $[f(x)-g(x)\times h(x)] = 5-(-8\times 10.5)$
$= 5-(-84) = 5+84 = 89$

(١٠)

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

مثال

$$\lim_{x\to 1}[3x-1]^6 = \left[\lim_{x\to 1} 3x-1\right]^6 = [3\times 1-1]^6 = (3-1)^6 = 2^6 = 64$$

أمثلة أوجد نهاية كل من الدوال التالية

1) $\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7) = 3\times 2^3+5\times 2^2-7$
$= 3\times 8+5\times 4-7 = 24+20-7 = 37$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5} = \frac{3\times 3^2+7}{3-5} = \frac{3\times 9+7}{-2} = \frac{27+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17.$

3) $\lim_{x\to 2} e^x = e^2$ | 4) $\lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1} = e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

5) $\lim_{x\to 2}[(\log(3x^2+5))] = \log(3\times 2^2+5) = \log(3\times 4+5) = \log 17$

6) $\lim_{x\to 3}[\ln(2x-5)] = \ln(2\times 3-5) = \ln(6-5) = \ln 1 = 0$

مثال إذا كانت
$$F(x) = \begin{cases} 3x^2+5 & , x<1 \\ 7x-2 & , x>1 \end{cases}$$

فأوجد 1) $\lim_{x\to 3} f(x)$ 2) $\lim_{x\to 1/2} f(x)$

1) الحل تقع ٣ ضمن مجال القاعدة الثانية لأنه $3>1$
∴ نعوض عن ٣ في الثانية

$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 7x-2 = 7\times 3-2$
$= 21-2 = 19$

2) الحل تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال القاعدة الأولى لأن $1 < \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to 1/2} f(x) = \lim_{x\to 1/2} 3x^2+5 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+5$
$= 3\times\frac{1}{4}+5 = \frac{3}{4}+5$
$= \frac{3}{4}+\frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

11

نهايات المقادير غير المحدده عند نقطه

هي التي تظهر عند حساب النهايات والناتج يكون $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

أولاً عندما تكون نتيجه التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ فالحالات كالتالي

① إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود

الحل التحليل ثم الاختصار ثم التعويض

مثال أوجد نهاية

1) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

الحل بالتعويض كمية غير معينة

$\lim_{x \to -1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = \lim_{x \to -1} (x-1)$

ثم نعوض $= -1-1 = -2$

2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

الحل التعويض

$= \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامل الأولية

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}$

$= \lim_{x \to 3} (x+3)$

$= 3+3 = 6$

ويمكن تحليل البسط بالمقص كالتالي x^2-3x+2

ويمكن بالعامل المشترك كالتالي $x(x+1) = x^2+x$

② إذا احتوت الدالة على جذر

مثال أوجد نهاية الدالة

$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

الحل

1) $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$

كمية غير معينة

في هذه الحالة نضرب البسط والمقام بمرافق البسط $(\sqrt{x}+3)$ (الناتج = مربع الأول - مربع الثاني)

$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{\cancel{(x-9)}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3}$

$= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

2) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2} = \frac{\sqrt{4}-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$

$\therefore$ نضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$\lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$

(١٤)

ثانيا عندما $x \to \infty$

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود و $x \to \infty$ فإنه

الحالة الأولى
إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام الناتج صفر

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

مثال: درجة البسط أقل من درجة المقام

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$$

∴ الناتج = صفر

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1} = 0$$

مثال آخر

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

الحالة الثانية: درجة البسط = درجة المقام ∴ الناتج = $\dfrac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$

مثال: أوجد نهاية

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5}$$

درجة البسط ③ = درجة المقام ③

∴ الحل $= \frac{1}{3}$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \frac{1}{3}$$

الحالة الثالثة

درجة البسط أكبر من درجة المقام ∴ الناتج = ∞

مثال أوجد نهاية المقدار

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 5}$$

الحل

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 5} = \infty$$

لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام

الاتصال

هل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x - 9 & x \neq -3 \\ -6 & x = -3 \end{cases}$$

متصلة في $x = -3$

الحل أولا نعوض في الدالة المعطاه $(x = -3)$ وهي الدالة الثانية

$$f(-3) = -6$$

ثانيا نعوض في الدالة الأخرى بالنهايات $\lim_{x \to -3}$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} x - 9 = -3 - 9 = -12$$

إذا كان الناتج من أولا ≠ الناتج من ثانيا ∴ الدالة غير متصلة

$$\therefore \lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$$

∴ الدالة غير متصلة في $x = -3$

١٣

مثال: هل الدالة معرفة ب $f(x)=\begin{cases} 6x & 0<x<5 \\ 25+2x & x\geq 5 \end{cases}$ متصلة في $x=5$

اولا $x=5$ في الدالة الثانية ∴ نعوض في الدالة الثانية عن $x=0$

في $f(5)=25+2\times5=25+10=35$

ثم نعوض في الدالة الاولى بالنهاية $x\to 5^-$

في هذه الحالة

$\lim_{x\to 5^-} 6x = \lim_{x\to 5} 6\times5 = 30$

ثم نعوض في الدالة الثانية ب $x\to 5^+$

$\boxed{\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5} (25+2x) = 25+2\times5 = 35}$

∴ ناتج الاول ≠ ناتج الثاني ∴ الدالة غير متصلة في $x=5$

لاحظ

مثال ا ثبت ان الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ غير متصلة في $x=-2$

هنا دالة واحدة فقط ∴ نعوض عن $x=-2$

اذا كانت الدالة غير معرفة ∴ فهي غير متصلة

$f(-2)=\dfrac{(-2)^2-4}{-2+2}=\dfrac{4-4}{-2+2}=\dfrac{0}{0}=$ غير معرفة

∴ الدالة غير متصلة في $x=-2$

الاشتقاق **متوسط التغير** النسبي للتغير في y الى التغير في x

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

مثال اوجد متوسط التغير للدالة

$f(x) = x^2 + 2$ عندما تتغير x من 1 الى 1.5

الحل $x_2 = 1.5$ و $x_1 = 1$

$$\therefore f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$f(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 2.25 + 2 = 4.25$$

$\therefore$ متوسط الدالة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{4.25 - 3}{1.5 - 1} = \dfrac{1.25}{0.5} = 2.5$

مثال اوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = 3x + 2$ عندما تتغير x من 1 الى 2

الحل $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$

$$f(1) = 3 \times 1 + 2 = 5$$

$$f(2) = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)_2 - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

المشتقة الاولى نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ تسمى المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز

$\frac{d}{dx} f(x)$ ، y' ، $f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وتسمى العبارة الاولية للتفاضل

مثال اذا كانت $f(x) = x^2$ اوجد $f'(x)$ من العبارة الاولية

الحل مربع الاول + 2 × الاول × الثاني + مربع الثاني

$$\therefore f(x) = x^2$$

$$\therefore f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{\text{مشترك}}{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\underbrace{\Delta x \to 0}_{\text{نعوض}}} (2x + \Delta x) = \underline{2x}$$

جبر الاشتقاق | اذا كانت $y = x^n$ فإن $\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$

نزل الأس واضربه x ونقص الأس ١

مثال أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية

1) $y = x^5$ $\quad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

2) $y = x^{-3}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$

3) $y = x^{1/2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = 1/2\, x^{-1/2}$

4) $y = 5 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

5) $y = \frac{3}{4} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

6) $y = 3x^4 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3 \times 4 x^3 = 12x^3$

7) $y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \overset{3\times4}{12}x^3 + \overset{3\times5}{15}x^2 - \overset{2\times2}{4}x + 7$

اذا كانت $y = [f(x)]^n$ فإن $\frac{dy}{dx} = n\left[f(x)\right]^{n-1} \cdot f'(x)$

الأس x (الدالة)^الأس-١ x مشتقة الدالة

مثال أوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = (2x^2+5)^8$

الحل

$\frac{dy}{dx} = \overset{\text{الأس}}{8}(2x^2+5)^7 \cdot 4x = 32x(2x^2+5)^7$

اذا كانت $y = (f(x) \cdot g(x))$ ضرب دالتين فإن $\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

= مشتقة الأولى x الثانية + مشتقة الثانية x الأولى

مثال اذا كانت $y = (x^2+1)(2x^3-2)$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ الحل

$\frac{dy}{dx} = 2x(2x^3-2) + 6x^2(x^2+1)$

$= 4x^4 - 4x + 6x^4 + 6x^2 = 10x^4 + 6x^2 - 4x$

اذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ قسمة دالتين

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

(المقام x مشتقة البسط − البسط x مشتقة المقام) / مربع المقام

مثال أوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = \frac{2x+5}{3x-4}$

الحل

$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-4)(2) - (2x+5)(3)}{(3x-4)^2} = \frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2} = \frac{-23}{(3x-4)^2}$

إذا كانت $y = \frac{\overset{\text{عدد}}{c}}{f(x)}$ ∴ $\frac{dy}{dx} = \frac{\overset{\text{- العدد × (مشتقة المقام)}}{-c \cdot f'(x)}}{\underset{\text{(المقام تربيع)}}{[f(x)]^2}}$

مثال أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{3}{x^2-2}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{-6x}{(x^2-2)^2}$$

إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ فإن

قانون السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

مثال إذا كانت $y = u^2 + 5u$ ، $u = x + 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل $\frac{dy}{du} = 2u + 5$ ، $\frac{du}{dx} = 1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u+5)(1) =$$

نعوض عن قيمة u

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2(x+3) + 5 = 2x + 6 + 5 = 2x + 11$$

المشتقات العليا

— المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ أو y' المشتقة الثانية y'' أو $\frac{d^2y}{dx^2}$

مثال أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

١٧

مشتقة الدالة الأسية

— إذا كانت $y = e^u$ حيث $u = f(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx} = \text{الدالة الأسية} \times \text{مشتقة الأس}$$

مثال: $y = e^{x^2+2x+1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \text{الدالة الأسية} \times \text{مشتقة الأس} = e^{x^2+2x+1}(2x+2) = (2x+2) \cdot e^{x^2+2x+1}$$

إذا كانت $y = a^x$ (عدد) فإن

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$$

الدالة × مشتقة الدالة × Ln العدد المرفوع أس

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من

1) $y = 3^x$

الحل $\frac{dy}{dx}$ = الدالة × مشتقة الدالة × Ln العدد المرفوع أس

$= 3^x(1) \cdot \ln 3 = 3^x \ln 3$

2) $y = 9^{2x^2}$

$\frac{dy}{dx}$ = الدالة × مشتقة الدالة × Ln العدد المرفوع أس $= 9^{2x^2} \times (4x) \ln 9$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية

— إذا كانت $y = \ln x$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\text{الدالة}} \times \text{مشتقة الدالة}$$

مثال: إذا كانت $y = \ln(1+x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{الدالة}} \times \text{مشتقة الدالة} = \frac{1}{1+x^2}(2x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

لاحظ: إذا كانت $y = \log_a x$ (العدد) فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{الدالة}} \times (\text{مشتقة الدالة}) \frac{1}{\ln \text{العدد}}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية

1) $y = \log_2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(1)\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}$$

2) $y = \log_2(1+x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{الدالة}}(\text{مشتقة الدالة})\frac{1}{\ln \text{العدد}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}(2x)\frac{1}{\ln 2} = \frac{2x}{(1+x^2)\ln 2}$$

(١١٨)

مشتقة الدوال المثلثية

① اذا كانت $y=\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}=\cos x$ (مشتقة الزاوية)

$\cos$(الزاوية) (مشتقة الزاوية)

مثال اذا كانت $y=\sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ الحل

$\frac{dy}{dx}=$ ($\cos$ الدالة) (مشتقة الدالة) $=\cos 4x\,(4)=4\cos 4x$.

② اذا كانت $y=\cos x$ فإن $\frac{dy}{dx}=-\sin$ (الزاوية) (مشتقة الزاوية)

مثال اذا كانت $y=\cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ الحل

$\frac{dy}{dx}=-\sin 5x\,(5)=-5\sin 5x$

لاحظ اذا كانت $y=\cos^2 x$ مربع الدالة المثلثية فإن

$\frac{dy}{dx}=$ (أس الدالة المثلثية) (الدالة المثلثية بدون أس) (مشتقة الدالة وهي بدون أس)

$\therefore \frac{dy}{dx}=2\cos x\cdot(-\sin x)=-2\cos x\sin x$

* اذا كانت $y=\sin x\cos x$ فإن

$\frac{dy}{dx}=$ الأولى $\times$ (تفاضل) مشتقة الثانية $+$ مشتقة الأولى $\times$ الثانية

$\therefore \frac{dy}{dx}=\sin x(-\sin x)+\cos x(\cos x)=-\sin^2 x+\cos^2 x$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية

1) $y=\tan^2 x$

$\frac{dy}{dx}=2\tan x\sec^2 x$ (1)

2) $y=\cot^3(2x+1)$ $\therefore \frac{dy}{dx}=3\cot^2(2x+1)\cdot[-\csc^2(2x+1)]\cdot 2$

$=3\cot^2(2x+1)\cdot[-\csc^2(2x+1)]\cdot 2$

$=-6\cot^2(2x+1)\cdot\csc^2(2x+1)$

3) $y=\sec(x+1)$ $\frac{dy}{dx}=\sec(x+1)\cdot\tan(x+1)(1)$

4) $y=\csc 2x$ $\frac{dy}{dx}=-\csc 2x\cdot\cot 2x\ (2)$

$=-2\csc 2x\cot 2x$

1) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$ (مشتقة الدالة)

2) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$ (مشتقة الدالة)

3) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

$=-\csc^2 x$

4) $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$ (مشتقة الدالة)

(19)

الاشتقاق الضمني تدريب x^2 ر y^2

مثال أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية

$1)\ y^2 + x^2 = 9$ الحل

① نفاضل y^2 ثم نضع بعدها $\frac{dx}{dy}$ ثم نفاضل x^2 وتدرس العدد ٩ ثابت

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \longrightarrow \therefore \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}}$$

$2)\ y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3 = 9$ الحل

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x + 9x^2 + 12y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 12y^2\frac{dy}{dx} = -2x - 9x^2$$

ناخذ $\frac{dy}{dx}$ مشترك

$$\therefore \frac{dy}{dx}(2y + 12y^2) = -2x - 9x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 9x^2}{2y + 12y^2}$$

$3)\ x^2 + 3xy - xy^2 = 0$ الحل

$$8x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x\frac{dy}{dx} - 2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y - 8x$$

ناخذ $\frac{dy}{dx}$ مشترك

$$(3x - 2xy)\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y - 8x \qquad \boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3y - 8x}{2x - 2xy}}$$

الاشتقاق الجزئي أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال الآتية

$1)\ z = xy + x^2y + y^2x$

① نفاضل بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2xy + y^2$$

② نفاضل بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$$

$2)\ z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$

1) نفاضل بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$$

② نفاضل بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 12y.$$

التكامل

قواعد التكامل

1) $\int dx = x + C$

2) $\int a\,dx = ax + C$

مثال: أوجد $\int 5\,dx$

الحل: $\int 5\,dx = 5x + C$

مثال: $\int (7x+3)\,dx = \frac{7x^2}{3} + 3x + C$

3) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ نزيد الأس ١ ونقسم المقدار على الأس الجديد

مثال: أوجد $\int 3x^2\,dx$ ~~$\int (7x+3)\,dx$~~

$\int 3x^2\,dx = \frac{3x^3}{3} + C = x^3 + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

مثال: أوجد $\int (3\sin x + 2x)\,dx$

الحل:

$\int (3\sin x + 2x)\,dx = -3\cos x + \frac{2x^2}{2} + C = -3\cos x + x^2 + C$

* $\int e^x\,dx = e^x + C$
* $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
* $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

تابع قواعد التكامل

* $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
* $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
* $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
* $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

أمثلة

* $\int (x + \sec^2 x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \tan x + C$
* $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)\,dx = \frac{x^{(\frac{1}{2}+1)}}{(\frac{1}{2}+1)} + 4x + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + C$
* $\int (4e^x + x^{-1})\,dx = \int (4e^x + \frac{1}{x})\,dx = 4e^x + \ln|x| + C$

(21)

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad \frac{(\text{الدالة})^{\text{الأس}+1}}{\text{الأس}+1} + C$$

مشتقة الدالة في دالة الأس n

ملاحظة

أمثلة

$$\int 3(x^3+4)^4\, x^2\,dx$$

مشتقة (x^3+4) ← $3x^2$ ∴ نضرب $\frac{1}{3} \times 3 \times$

$$= \frac{(x^3+4)^5}{5} + C$$

$$\int (x^2+1)^3\, x\,dx$$

مشتقة الدالة $x^2+1 = (2x)$ ∴ لابد نتخلص من ٢ ∴ نضرب الطرفين $2x \times \frac{1}{2}$ تكون x

$$= \frac{1}{2}\int 2(x^2+1)^3\, x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^4}{4} + C = \frac{(x^2+1)^4}{8} + C$$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C \qquad = \frac{(\text{الدالة})^{1+1}}{1+1} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

(الدالة) × (مشتقة الدالة)

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(الدالة) (مشتقة الدالة)

إذا كان $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx$ وكانت $n=-1$ الناتج يكون
$\ln|f(x)| + C$

أمثلة: جعل x^3 مشتقة الدالة نضرب $\frac{1}{4} \times 4 \times$

$$\star\ \int x^3 (1+x^4)^{-1}\,dx$$

مشتقة الدالة، الدالة

$$= \frac{1}{4}\int 4x^3(1+x^4)^{-1}\,dx = \frac{1}{4}|1+x^4| + C$$

$$\star\ \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int 2x(1+x^2)^{-1}\,dx = |1+x^2| + C$$

مشتقة الدالة، الدالة

أمثلة $\int f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$

$$\int x^2 e^{3x^3}\,dx \quad \text{نضرب } \tfrac{1}{9}\times 9 \times$$

$$= \frac{1}{9}\int 9x^2 e^{3x^3}\,dx = \frac{1}{9} e^{3x^3} + C$$

$$\int x e^{x^2}\,dx \quad \text{نضرب } \tfrac{1}{2}\times 2 \times$$

$$= \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

مشتقة الأس

$$\int e^{\sin x}\cdot \cos x\,dx = e^{\sin x} + C$$

الدالة، مشتقة الأس

٢٤

حل المعادلة التفاضلية

مثال حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = xy^{-2}$ الحل

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-2} \Rightarrow \frac{x}{y^2}$$

طرفين x وسطين

$\therefore$ $y^2\,dy = x\,dx$ بإجراء التكامل للطرفين

$$\int y^2 dy = \int x dx \qquad \boxed{\therefore \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c}$$

مثال حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3$ الحل

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3 = \frac{4x^3}{y^{-3}}$$

طرفين x وسطين $\therefore$ $y^{-3}\,dy = 4x^3\,dx$ بإجراء التكامل للطرفين $\int y^{-3} dy = \int 4x^3 dx$

$$\therefore \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{4x^4}{4} + c \qquad \boxed{\therefore \frac{y^{-2}}{-2} = x^4 + c}$$

التكامل المحدود أوجد $\int_1^3 x^3 dx$ الحل

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81-1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

بعض خواص التكامل المحدود

(1) $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$

نخرج العدد خارج التكامل ونتعامل كالسابق

مثال

$$\int_1^2 4x^3 dx = 4\int_1^2 x^3 dx = \cancel{4}\left[\frac{x^4}{\cancel{4}}\right]_1^2 = \left[x^4\right]_1^2 = 2^4 - 1^4$$
$$= 16 - 1 = 15$$

(2) $\int_a^a f(x) dx = 0$ نفس العدد

مثال $\int_5^5 3x^2 dx = 0$

(3) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

مثال

$$\int_0^2 (3x^2 + e^x) dx = \int_0^2 3x^2 dx + \int_0^2 e^x dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[e^x\right]_0^2$$
$$= \left[x^3\right]_0^2 + \left[e^x\right]_0^2 = 2^3 + e^2$$
$$= 8 + e^2$$

(4) $\int_c^d f x\,dx \overset{\text{تبديل الحدود}}{=} -\int_d^c f(x)\,dx$

مثال إذا كان $\int_2^4 f(x)\,dx = 8$ فإن $\int_4^2 f(x)\,dx = -8$

(5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال $\int_2^4 x^2\,dx + \int_4^2 x^2\,dx = \int_2^2 x\,dx = 0$

6) $\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi$

$= -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1)+1 = 2$

7) $\int_0^2 (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2(2x+1)^3\,dx$ يوجد أس داخل القوس

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{8}\left[(2(2)+1)^4 - 1\right]$

$= \frac{1}{8} \times 624 = 78$

إذا كان $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ و $\int_1^3 f(x)\,dx = 10$

تكامل

فأوجد

1) $\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$

$= -5 + 10 = 5$

نفس الحد

2) $\int_1^1 f(x)\,dx = 0$

(3) $\int_3^1 f(x)\,dx = -\int_1^3 f(x)\,dx = -10$

4) $\int_1^2 6 f(x)\,dx = 6\int_1^2 f(x)\,dx$

$= 6(5) = 30$

أمثلة أوجد التكاملات التالية

1) $\int_0^3 2\,dx = [2x]_0^3 = 2(3) - 0 = 6$

2) $\int_0^2 (x+6)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2$

$= \frac{2^2}{2} + 6(2) = \frac{4}{2} + 12 = 2 + 12$

$= 14$

3) $\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5)\,dx$

$= \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 5x\right]_1^3 = x^3 - 2x^2 - 5x$

$= [3^3 - 2(3)^2 - 5(3)] - [1^3 - 2(1)^2 - 5(1)]$

$= (27 - 18 - 15) - (1 - 2 - 5)$

$= -6 + 6 = 0$

(4) $\int_{-2}^2 (5x+4)\,dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^2$

$= \left[\frac{5(2)^2}{2} + 4(2)\right] - \left[\frac{5(-2)^2}{2} + 4(-2)\right]$

$= [10+8] - [10-8] = 18 - 2 = 16$

(5) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2$

$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$