المحاضرة (1)

المجموعات

تعريف المجموعة :- يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء أخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C , ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b , c , ...

يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة
فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A
فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة
$a \in A$
أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا
نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على
الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة{ } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

A = { 2,0,1,4}

B= { a , b ,c , d }

C= { 1 , 2 , 3 .....}

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل 1 2 3 4 وهكذا)

D = { 1, 2 , 3,....,100}

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x : عدد زوجي x }

B = { x : طالب بمقرر الاحصاء في الادارة x }

C = { x : طالب بنظام التعليم عن بعد x }

D = { x : $-3 \le x \le 1$ عدد صحيح x }

X = { x : $0 \le x \le 12$ عدد صحيح x}

أنواع المجموعات :-

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

A = { x : عدد طبيعي زوجي و فردي x }

B = { x : دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية x }

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

A = { 2 , 4 , 6 , 8 }

B = { 1 , 2 , 3 , …….. , 100}

C = { x , y , s, t u }

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

A = { x : عدد طبيعي فردي }

B = { 10, 20 , 30 ,……… }

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت { 6 , 4 , 2} = A و {1,2,3,4,5,6,7,8 } = B فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A$ ≫≫≫≫ $A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {1, 5, 7 , 9 } , B = {9 , 7 ,5 ,1 }

2- A= { 2 ,5 ,9 } , B = { a , s , d }

الحل

$1 - A = B$

$2 - A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان {1 , 2 , 3 , 7} = A و {2 , 4 , 6 , 8 } =B أوجد (AUB) ؟

الحل

(AUB) = {1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8}

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B $(A\cap B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان $A = \{ -1 , 0 , 1 , 2 , 3\}$ و$B = \{0,2,4,6,\}$ أوجد $A \cap B$

الحل

$(A \cap B) = \{0 , 2 \}$

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان $U = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و $A=\{2,4,6,8,10\}$
أوجد

الحل

$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$ أوجد A-B

الحل

$A-B = \{ 1 , 2 , y \}$

مثال :-

إذا كانت
$A=\{1,2,3,x,y\}$ و
$B=\{3,4,5,x,w\}$
و المجموعة الكلية
$U = \{ 1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$
فأوجد :-

1- $A\cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

1- $A\cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
2- $A \cap B = \{3, X\}$
3- $B - A = \{4, 5, w\}$
4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
8- $\overline{A} \cup A = U$
9- $\overline{A} \cap A = \{ \}$

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ، B $(A \times B)$ بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x , y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت $A=\{-2,1\}$ و $B =\{-3,1,4\}$

فأوجد $A \times B$ و $B \times A$

الحل

$$A \times B =\{(-2,-3) , (-2,1) , (-2,4) , (1,-3) , (1,1) , (1,4)\}$$

$$B \times A = \{(-3,-2) , (-3,1) ,(1,-2) , (1,1) ,(4,-2) , (4,1)\}$$

مثال :-

أنشئ $A \times B$ و $B \times A$، علماً بأن :-

$A=\{1,2\}$ و $B = \{ w , x , y \}$

الحل

$$A \times B =\{(1,w) ,(1,x) , (1,y) , (2,w) , (2,x) , (2,y)\}$$

$$B \times A = \{(w,1),(w,2),(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1=x_2)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الاول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني ، $(y_1=y_2)$

مثال :-

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x+1 , y - \frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$

الحل

$X+1 = 4 \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad x = 4-1 =3$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a , b , c\}$

الحل

$$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} ,\{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} ,\{a,b,c\} ,\emptyset \}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

تمرين : أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة { S = { a, b , c

P(S) = { {a} , {b} , {c} , {a,b} , {a,c} ,{b,c} ,{a,b,c} , Ø }
$2^3 = 8$

تمارين :-

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عدد سالب و موجب x }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , …….,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,…….}

(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }

2- A= { 20 ,50 ,70 } , B = { k , d , u }

4- إذا كانت

$A=\{8,10,12,r,m\}$ و

$B=\{4,6,10,o,r\}$

المجموعة الكلية

$U = \{4,6,8,10,12,o,r,m,p\}$

ثم أوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\bar{A}$
5- $\bar{B}$
6- $\bar{A} \cup \bar{B}$
7- $\bar{A} \cap \bar{B}$
8- $\bar{A} \cup A$
9- $\bar{A} \cap A$

٥- إذا كانت $A=\{-5,7\}$ و $B =\{-6,4,9\}$
فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة
$(x+1 , y - 10) = (2x , 15)$ ؟

7- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2 , 5 , 8\}$ ؟

8- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر ، فأوجد عدد عناصر P(S) ؟

المحاضرة (٢)

الدوال

الدالة :-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ،وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو تتعين بواسطة) كمية أخرى .

ملاحظة :-

إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و تسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون f دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

مثال :

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ وكانت

$f_1=\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ و

$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ و

$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ هل

$f_1=\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من Aإلى B؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل

$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل

$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

مثال :-

إذا كان $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ ، $f=\{(1,3),(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي لمعرفة ما إذا كانت تمثل دالة أم لا ،ثم أوجد مداها

تمرين :

أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R=\{(1,1),(2,2),(4,4),(9,9)\}$

2- $R=\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

3- $R=\{(-4,0),(-4,4),(2,3),(1,9)\}$

4- $R=\{(-3,1),(-1,1),(0,1),(4,1)\}$

5- $R=\{0,7),(1,5),(1,2),(3,-4)\}$

6- $R=\{(-1,2),(2,2),(3,5),(6,1)\}$

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}

2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }

3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}

5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}

6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- f(2)

2- f(-1)

3- f(a)

4- f(x+1)

مثال :

إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ فأوجد :-

1- f(-3)

2- f(1/2)

3- f(a)

تمارين :-

١- للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب f(t) و f(-5) .

٢- للدالة $f(x)=3x^2-2$ أحسب f(2)+f(-1)+f(3) .

٣- للدالة $f(x)=x+4$ أحسب 2f(4)+3f(-1) .

٤- للدالة $f(x)=x^2-1$ أحسب f(3)-f(-2) .

الدوال الحقيقية :-

- **دالة كثيرة الحدود :** هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$
$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)
2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)
3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)
4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)
5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال : إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$
$= f(x) + f(g)$
$= 3x+5 + x^2+1$
$= x^2+3x+6$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

2- $(f - g)(x) =$
$= f(x) - g(x)$
$= (3x+5) - (x^2+1)$
$= 3x+5 - x^2 - 1$
$= -x^2 + 3x + 4$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$
فأوجد:

3- $(f \times g)(x) =$

$= f(x) \times g(x)$

$= (3x+5) \times (x^2+1)$

$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$

$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$
فأوجد:

4- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$

معادلة الخط المستقيم :-

ايجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_1 , y_1)$
ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و
نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_2 \neq x_1$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(1,-3) و B(3,7) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7--3}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a وb لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ اذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال : **هل المستقيمان $y -3x -2 = 0$ ، $3y + x -15 =0$ متعامدان ؟**

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$
$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$$

اذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي 2- .

الحل

$m = -2$, $x_1 = 5$, $y_1 = -3$

$y - (-3) = -2(x-5)$

$Y +3 = -2(x-5)$

$y = -2x +7$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$f_1 =\{(5,2),(9,3),(13,4)\}$

و $f_2=\{(5,2),(9,3),(13,6)\}$

و$f_3=\{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- R ={(1,4) ,(2,4) ,(3,3) ,(4,5)}

2- R ={(2,4) ,(3,1) ,(3,2) ,(4,1) ,(5,2) }

3- R ={(-1,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

٣- للدالة $f(x)= 2x^3 + 10\, x^2 -15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤-إذا كانت <u>f(x)=6x+3</u> و <u>g(x)=10</u> فأوجد:

$(f+g)(x)\ ,\ (f-g)(x)\ ,\ (f\times g)(x)\ ,\ (\frac{f}{g})(x)$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6,\frac{-3}{4})$ و $B(4,\frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ و $B(7,\frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$-5x + 3y - 8 = 0$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$12\, x = -9y + 30$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y -4 = 0$ و $4y= 16x +4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y -12x -6 = 0$ ، $8y + 2x -30 =0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (9,-2) و ميله يساوي 5- ؟

المحاضرة (3)

النهايات و الاتصال

النهايات :

مفهوم النهاية :-
يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x\to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a.

مثال :-
إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $\lim_{x\to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :
١- إذا كانت $f(x)=c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $\lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .
٢- إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-
أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 5} 30$$
$$\lim_{x\to 2}(1 - 2x)$$
$$\lim_{x\to 2}(3x + 4)$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x - 5)$$

الحل

$$\lim_{x\to 5} 30 = 30$$
$$\lim_{x\to 2}(1 - 2x) = 1 - (2 \times -2) = 5$$
$$\lim_{x\to 2}(3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x - 5) = 8 \times 1/2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

مثال :
إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to 5}[h(x) - f(x)]$
$$= \lim_{x\to 2} h(x) - \lim_{x\to 2} f(x)$$
$$= 10.5 - 5 = 5.5$$

مثال :
إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

2- $\lim_{x\to 5}[g(x) \times h(x)]$
$$= \lim_{x\to 2} g(x) \times \lim_{x\to 2} h(x)$$
$$= -8 \times 10.5 = -84$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

3- $\lim_{x\to2} 8\, f(x)$

$$= 8 \times \lim_{x\to2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

4- $\lim_{x\to2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{\lim_{x\to2} f(x)}{\lim_{x\to2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\lim_{x\to1}[3x-1]^6 = [\lim_{x\to1} 3x-1]^6$$
$$= [3\times1-1]^6 = [3-1]^6 = [2]^6 = 64$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to2}(3x^3+5x^2-7)$

$$= 3\times 2^3 + 5\times 2^2 - 7$$
$$= 3\times 8 + 5\times 4 - 7 = 37$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2- $\lim_{x\to3} \frac{3x^2+7}{x-5}$

$$= \frac{3\times3^2+7}{3-5} = \frac{3\times9+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

3- $\lim_{x\to2} \frac{2x-1}{5x+3}$

$$= \frac{2\times2-1}{5\times2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$$

4- $\lim_{x\to2} e^x$

$$= e^2$$

أمثلة :

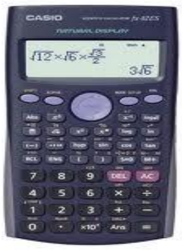
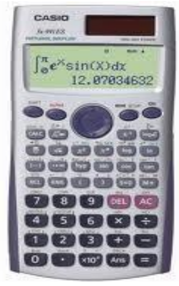
أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

5- $\lim_{x\to1} e^{x^2+2x+1}$

$$= e^{1^2+2\times1+1} = e^{1+2+1} = e^4$$

6- $\lim_{x\to2} log(3x^2+5) = \log(3\times2^2+5)$

$$= \log(3\times4+5)$$
$$= \log(12+5) = \log(17)$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

7- $\lim\limits_{x \to 3} \ln(2x - 5)$ = ln (2×3-5) = ln (6-5) = ln (1) =0

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

8- $\lim\limits_{x \to 1} \left(3x^3 + 4x - 2\right)^3$ = ((3×1³) + 4 × 1 -2)³

= (3+4-2)³ = (5)³ = 125

9- $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x^2 + 5}$ = $\sqrt[3]{2^2 + 5}$ = $\sqrt[3]{4 + 5}$ = $\sqrt[3]{9}$ =
2.08

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & , \quad x < 5 \\ 15x - 2 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى ٣ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)

= 7x -2 = 7 × 3 -2 = 19

مثال :

إذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \; x < 1 \\ 7x - 2 & , \; x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

2- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

= 3x² + 5 = 3 × ($\frac{1}{2}$)²+ 5 = 3× $\frac{1}{4}$ + 5 = $\frac{3}{4}$ + 5 = $\frac{3}{4}$ +$\frac{20}{4}$ = $\frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

3- $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

3- $\lim_{x \to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ **(النهاية من اليمين)**

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$ **(النهاية من اليسار)**

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **هذه النهاية غير موجودة**

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 5} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ **(النهاية من اليمين)**

$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) =$ **(النهاية من اليسار)**

$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) \neq \lim_{x \to 5^-} f(x)$$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ **هذه النهاية غير موجودة**

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة (4)

الجزء الاول : تابع الاتصال
الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \quad 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim_{x \to 5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim_{x \to 5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \quad 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , \quad x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$\lim_{x \to 10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$\lim_{x \to 10^-} f(x)$ = $12x^2$ = 12×10^2 = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \quad x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , \quad x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

f(8) = $20x^2 = 20 \times (8)^2$ = 20 × 64 = 1280

$\lim_{x \to 8^+} f(x)$ = 1160 +15x = 1160 +15 × 8 = 1280

$\lim_{x \to 8^-} f(x)$ = $20x^2 = 20 \times (8)^2$ = 20 × 64 = 1280

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

تمارين الواجب :-

تمرين ١ :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 0} 5$$

$$\lim_{x\to 5}(10 - 2x + x^2)$$

$$\lim_{x\to 12}(3x + 6)$$

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x - 2)$$

تمرين ٢ :-

إذا كانت $\lim_{x\to 5} f(x) = 20$ و $\lim_{x\to 5} g(x) = -15$ و

$\lim_{x\to 5} h(x) = 18.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to 5}[h(x) + f(x)]$

2- $\lim_{x\to 5}[h(x) - g(x)]$

3- $\lim_{x\to 5}[g(x) \times f(x)]$

4- $\lim_{x\to 5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

1- $\lim_{x\to 1}[5x - 2]^2$

2- $\lim_{x\to 2}[10 - 2x]^2$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 5}(2x^3 - 2x^2 - 50)$

2- $\lim_{x\to 0}(1 - e^x)$

3- $\lim_{x\to 1} log(10x^4 + 15)$

4- $\lim_{x\to 2} e^{2x^2+3x+2}$

5- $\lim_{x\to 3} ln(20x^2 - 5x + 10)$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \quad x < 2 \\ 5x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x \to 3} f(x)$

2- $\lim_{x \to 1} f(x)$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$ =????

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$y = 15$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x^5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

2- $y = 15x^4$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 60x^3$

3- $y = 10x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 10$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

$1 - y = (15x2 + 20)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$$

$2 - y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$ (المشتقة الاولى)

$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$ (المشتقة الثانية)

$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$ (المشتقة الثالثة)

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 80 – 6x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -6)

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (٢):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 200 – 10 x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -10)

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 15x-20) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= 15)

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي (D = 1.5x +20) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

المحاضرة (5)

تابع التفاضل
وتطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .
قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل
قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K^{/}= 0.6 – 0.04 x$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$K^{/}= 0.6 – 0.04 x 1 = 0.6 -.04 = 0.56$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8 x - 0.15x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K^{/}= 0.8 – 0.3 x$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$K^{/}= 0.8 – 0.3 x 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.5 = 0.5

3- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 ـ يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .
2 ـ يتم إيجاد المشتقة الثانية .
3 ـ تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= - 0.4x^2 + 300x -2000$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^/ = -0.8x + 300$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = -0.8$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= 500-0.2x +0.1x^2$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^/ = -0.2 + 0.2x$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = 0.2$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

4- الربح الحدي

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة
2- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية
3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .
4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .
5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .
6- الربح الحدي = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x +30$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$R^/ = 36x^2 + 40x - 10$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$R^/ = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10=3990$ ريال

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) $= 4x^2 + 6x + 5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × x

$R = (4x^2 + 6x + 5) \times x = 4x^3 + 6x^2 + 5x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 12x^2 + 12x + 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدات إذاً x=15

$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12\times15^2 + 12\times15 + 5 = 2885$ ريال

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × x

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً x=5

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20 = 4205$ ريال

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = 10x^2 - 12x + 15$ (التكاليف الكلية)

$C' = 20x - 12$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً x=10

$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188$ ريال

مثال (5) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$ (التكاليف الكلية)

$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$

$= 3\times(5\times20^2 - 3\times20 + 15)^2\times(10\times20 - 3)$

$= 3\times(5\times400 - 60 + 15)^2\times(200-3)$

$= 3\times(1955)\times(197) = 1155405$ ريال

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 15x^2 + 9x - 17$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$

$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

$P^{/} = 6x^2 - 21x + 1$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$P^{/} = 6x^2 - 21x + 1 = 6\times30^2 - 21\times30 + 1 = 4771$ ريال

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$

$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

$P^{/} = 36x^2 + 30x - 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$P^{/} = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 - 5 = 23245$ ريال

تمرين شامل (1)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .
2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .
3- دالة الربح الكلي .
4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$R^{/} = 120x^3 + 24x^2 - 6$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$R^{/} = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394$ ريال

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

-2 حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$C' = 39x^2 - 10x + 3$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$C' = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499$ ريال

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

-3 دالة الربح الكلي :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

-4 حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$

$P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$P' = 120\times12^3 - 39\times12^2 + 34\times12 - 9 =$

تمرين شامل (2)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $3x^2 +25x -18$

$C = 10x^2 + 2x -5$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .
2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .
3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .
4- دالة الربح الكلي .
5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $3x^2 +25x -18$
$C = 10x^2 + 2x -5$

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × x

$R = (3x^2 +25x -18) \times x$

$= 3x^3 +25x^2 - 18x$

$R = 3x^3 +25x^2 - 18x$
$C = 10x^2 + 2x -5$

الحل

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 +25x^2 - 18x$

$R' = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R' = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457$ ريال

$R = 3x^3 +25x^2 - 18x$
$C = 10x^2 + 2x -5$

الحل

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x -5$

$C' = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C' = 20\times20 + 2 = 402$ ريال

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$
$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

4- دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$
$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$P^{/} = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$P^{/} = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180$ ريال

تمارين واجب :-

1- إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 0.3x - 0.01x^2$)المطلوب
أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

2- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = 3x^2 + 5x + 100$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

3- إذا علمت أن :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $8x^3 + 10x^2 + 5x + 12$

$C = 4x^2 + 3x - 10$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .
2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .
3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 15 وحدة .
4- دالة الربح الكلي .
5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 12 وحدات .