أسم المقرر : **الاحصاء في الادارة**

استاذ المقرر: **د/ أحمد فرحان**

المحاضرة (١)

المجموعات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء أخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C , ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b ,c , ...

تابع تعريف المجموعة :-

يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

A = { ٢،٠،١،٤}

B= { a , b ,c , d }

C= { ١ , ٢ , ٣ .....}

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل١ ٢ ٣ ٤وهكذا)

D = { ١, ٢ , ٣,.....,١٠٠}

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من ١ إلى ١٠٠ و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x : عدد زوجي x }

B = { x : طالب بمقرر الاحصاء في الادارة x }

C = { x : طالب بنظام التعليم عن بعد x }

D = { x : $-3 \leq x \leq 1$ عدد صحيح x }

X = { x : $0 \leq x \leq 12$ عدد صحيح x }

أنواع المجموعات:

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ф (فاي) أو { } .

أمثلة :-

A = { x : عدد طبيعي زوجي و فردي x }

B = { x : دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية x }

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

A = { 2 , 4 , 6 , 8 }

B = { 1 , 2 , 3 , ... , 100}

C = { x , y , s, t u }

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

A = { x : عدد طبيعي فردي }

B = { 10, 20 , 30 ,.........   }

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{2 , 4 , 6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B$, $B \subseteq A$ $\gg\gg\gg\gg$ $A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{9, 7, 5, 1\}$

2- $A = \{2, 5, 9\}$, $B = \{a, s, d\}$

الحل

$1 - A = B$

$2 - A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان A = { ١ , ٢ , ٣ , ٧} و B= { ٢ , ٤ , ٦ , ٨ } أوجد (AUB) ؟

الحل

(AUB) = {١ ,٢ , ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨}

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان A = { -١ , ٠ , ١ , ٢ , ٣} وB = {٠،٢،٤،٦,} أوجد A ∩ B

الحل

(A ∩ B) = {٠ , ٢ }

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} و A={2,4,6,8,10}
أوجد

الحل

$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت A={١،٢،٣,x,y} و B={٣،٤،٥,x,w} أوجد A-B

الحل: A-B = { ١ , ٢ , y }

مثال :-
إذا كانت
A={1,2,3,x,y} و
B={3,4,5,x,w}
و المجموعة الكلية
U = { 1,2,3,4,5,w,x,y,z}
فأوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
2- $A \cap B = \{3, X\}$
3- $B - A = \{4, 5, w\}$
4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
8- $\overline{A} \cup A = U$
9- $\overline{A} \cap A = \{\ \}$

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ،B (A×B) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x , y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت A={-٢،١} و B ={-٣،١،٤}

فأوجد A × B و B × A

الحل

A × B ={(-٢,-٣) , (-٢،١) , (-٢،٤) , (١,-٣) , (١،١) , (١،٤)}

B × A = {(-٣,-٢) , (-٣،١) ,(١,-٢) , (١،١) ,(٤,-٢) , (٤،١)}

مثال :-

أنشئ $A \times B$ و $B \times A$، علماً بأن :-

$A=\{١،٢\}$ و $B = \{ w , x , y \}$

الحل

$A \times B =\{(١,w) ,(١,x) , (١,y) , (٢,w) , (٢,x) , (٢,y)\}$

$B \times A = \{(w,١),(w,٢),(x,١),(x,٢),(y,١),(y,٢)\}$

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان $(x_١,y_١)$ و $(x_٢,y_٢)$ إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_١=x_٢)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الاول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني،$(y_١=y_٢)$

مثال :-

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x+1 , y - \frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$

الحل

$X+1 = 4 \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad x = 4-1 =3$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز $P(S)$.

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a , b , c\}$

الحل

$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} ,\{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} ,\{a,b,c\} ,Ø \}$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر $P(S)$ يساوي ٢^n .

تمرين :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{ a, b , c \}$

$P(S) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} ,\{b,c\} ,\{a,b,c\} , Ø \}$

$٢^٣ = ٨$

تمارين:

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عددx سالب و موجب }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , ...,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,.......}

(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }

2- A= { 20 ,50 ,70 } , B = { k , d , u }

4- إذا كانت

A={8,10,12,r,m} و
B={4,6,10,o,r}

المجموعة الكلية

U = {4,6,8,10,12,o,r,m,p}

ثم أوجد :-

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A} \cup A$

9- $\overline{A} \cap A$

٥- إذا كانت $A=\{-5,7\}$ و $B=\{-6,4,9\}$
فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة
$(x+1 , y - 10) = (2x , 15)$ ؟

٧- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{٢ , ٥ , ٨\}$ ؟

٨- إذا احتوت المجموعة S على ٥ من العناصر ، فأوجد عدد عناصر P(S) ؟

المحاضرة(٢)

الدوال

الدالة:-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ,وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو(تتوقف على) أو (تتعين بواسطة) كمية أخرى.

ملاحظة :-

اذا كانت F دالة من A الى B فأن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون F دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة

- **واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور.**
- **مثال :**
- اذا A = {١،٢،٣} و b = {٤،٨،١٢}
- و f١ = {(١،٤) , (٢،٤) , (٣،١٢)}
- F٢ = { (١،٤) , (٢،٨) }
- F٣ = {(١،٤) , (١،٨) , (٢،٤) , (٣،١٢) }
- فهل f١ , f٢ , f٣ دوال من A الى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ هل
$f_1=\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل الدالة

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}
2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }
3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }
4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}
5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}
6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}

2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }

3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}

5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}

6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- $f(2)$

2- $f(-1)$

3- $f(a)$

4- $f(x+1)$

مثال :

إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ فأوجد :-

1- $f(-3)$

2- $f(1/2)$

3- $f(a)$

تمارين:-

١- للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب $f(t)$ و $f(-5)$.

٢- للدالة $f(x)=3x^2-2$ أحسب $f(2)+f(-1)+f(3)$.

٣- للدالة $f(x)=x+4$ أحسب $2f(4)+3f(-1)$.

٤- للدالة $f(x)=x^2-1$ أحسب $f(3)-f(-2)$.

الدوال الحقيقية :-

- **الحدود كثيرة دالة :**

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$$
$$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)
2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)
3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)
4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)
5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال : إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$
$= f(x) + f(g)$
$= 3x+5 + x^2+1$
$= x^2+3x+6$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$
\begin{aligned}
2-(f - g)(x) &= \\
&= f(x) - g(x) \\
&= (3x+5) - (x^2+1) \\
&= 3x+5 - x^2 - 1 \\
&= -x^2 + 3x + 4
\end{aligned}
$$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$
\begin{aligned}
3-(f \times g)(x) &= \\
&= f(x) \times g(x) \\
&= (3x+5) \times (x^2+1) \\
&= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\
&= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5
\end{aligned}
$$

مثال : إذا كانت f(x) = ٣x ×٥x و g(x) = x^٢+١

فأوجد :

$$4-\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

أيجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_1 , y_1)$
ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و
نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_1 \neq x_2$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - -3}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

ax + by + c = 0

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$
$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$
$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ اذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال : هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$
$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$$

اذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5,-3)$ و ميله يساوي -2 .

الحل:-

$$m = -2 \quad , \quad x_1 = 5 \quad , \quad y_1 = -3$$
$$y - (-3) = -2(x-5)$$
$$Y + 3 = -2(x-5)$$
$$y = -2x + 7$$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$f_1 =\{(5,2),(9,3),(13,4)\}$

و $f_2=\{(5,2),(9,3),(13,6)\}$

و$f_3=\{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R =\{(1,4) ,(2,4) ,(3,3) ,(4,5)\}$

2- $R =\{(2,4) ,(3,1) ,(3,2) ,(4,1) ,(5,2) \}$

3- $R =\{(-1,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) \}$

٣- للدالة $f(x)= 2x^3 + 10 x^2 -15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤-إذا كانت $f(x)=6x+3$ و $g(x)=10$ فأوجد:

$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\times g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6,\frac{-3}{4})$ و $B(4,\frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ و $B(7,\frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$-5x + 3y - 8 = 0$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$12x = -9y + 30$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y - 4 = 0$ و $4y = 16x + 4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y - 12x - 6 = 0$ ، $8y + 2x - 30 = 0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (9,-2) و ميله يساوي 5- ؟

المحاضرة(٣)

النهايات و الاتصال

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $lim_{x\to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت ١+ f(x) = ٢x فإن $lim_{x\to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى ٢ وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي ٥ .

جبر النهايات :

١- إذا كانت f(x)=c (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢- إذا كانت f(x) = m x + c فإن $lim_{x\to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\lim_{x\to 5} 30$$

$$\lim_{x\to 2}(1-2x)$$

$$\lim_{x\to 2}(3x+4)$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$$

الحل

$lim_{x\to 5} 30$ = ٣٠

$lim_{x\to 2}(1-2x)$ = ١ – (٢ × -٢) = ٥

$lim_{x\to 2}(3x+4)$ = ٣ × ٢ +٤ = ٦+ ٤ = ١٠

$lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$ = ٨ × ١/٢ -٥ = ٤ – ٥ = -١

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

١- $\lim_{x\to5}[h(x) - f(x)]$

$= \lim_{x\to2} h(x) - \lim_{x\to2} f(x)$

= ١٠,٥ - ٥ = ٥,٥

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

٢- $\lim_{x\to5}[g(x) \times h(x)]$

$= \lim_{x\to2} g(x) \times \lim_{x\to2} h(x)$

= -٨ × ١٠,٥ = -٨٤

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

٣- $\lim_{x\to2} 8 f(x)$

$= 8 \times \lim_{x\to2} f(x)$ = ٨ × ٥ = ٤٠

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

٤- $\lim_{x\to2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to2} f(x)}{\lim_{x\to2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

مثال :

$lim_{x \to 1} [3x-1]^6 = [lim_{x \to 1} 3x - 1]^٦$

$= [٣ \times ١ - ١]^٦ = [٣ - ١]^٦ = [٢]^٦ = ٦٤$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

١- $lim_{x \to 2} (3x^3 + 5x^2 - 7)$

$= ٣ \times ٢^٣ + ٥ \times ٢^٢ - ٧$

$= ٣ \times ٨ + ٥ \times ٤ - ٧ = ٣٧$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٢- $lim_{x \to 3} \frac{3x^2+7}{x-5}$

$= \frac{3 \times 3^2 + 7}{3-5} = \frac{3 \times 9 + 7}{-2} = \frac{34}{-2} = -١٧$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٣- $lim_{x \to 2} \frac{2x-1}{5x+3}$

$= \frac{2 \times 2 - 1}{5 \times 2 + 3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$

٤- $lim_{x \to 2} e^x$

$= e^2$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

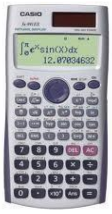
٥- $lim_{x \to 1} e^{x^2+2x+1}$

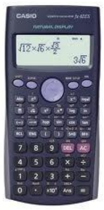
$= e^{1^2+2 \times 1+1} \quad = e^{1+2+1} \quad = e^4$

٦- $lim_{x\to 2}\, log(3x^2+5)$ = log (٣×٢^٢ + ٥)

= log (٣×٤+٥)

= log (١٢+٥) = log (١٧)





أ مثلة

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٧- $lim_{x\to 3}\, ln(2x-5)$ = ln (٢×٣-٥) = ln (٦-٥) = ln (١) = ٠

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٨- $lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3$ = ((٣×١^٣) + ٤ × ١ -٢)^٣

= (٣+٤-٢)^٣ = (٥)^٣ = ١٢٥

٩- $lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}$ = $\sqrt[3]{2^2+5}$ = $\sqrt[3]{4+5}$ = $\sqrt[3]{9}$ = ٢,٠٨

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x)=\begin{cases}9x^2 & ,\ x<٥\\ 15x-2 & ,\ x>٥\end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى ٣ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & ,\ x<١\\ 7x-2 & ,\ x>١\end{cases}$$

فأوجد :-

١- $lim_{x\to 3}\, f(x)$ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)

= ٧x -٢ = ٧ × ٣ -٢ = ١٩

مثال :

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < ١ \\ 7x - 2 & , x > ١ \end{cases}$

فأوجد :-

٢- $lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

$= ٣x^٢ + ٥ = ٣ \times (\frac{1}{2})^٢ + ٥ = ٣ \times \frac{1}{4} + ٥ = \frac{3}{4} + ٥ = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < ١ \\ 7x - 2 & , x > ١ \end{cases}$$

فأوجد :-

٣- $lim_{x \to 1} f(x)$

الحل

٣- $\lim_{x \to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $lim_{x \to 1^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $lim_{x \to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$lim_{x \to 1^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= ٧ x - ٢ = ٧ \times ١ - ٢ = ٥$

$lim_{x \to 1^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= ٣x^٢ + ٥ = ٣ \times (١)^٢ + ٥ = ٣ + ٥ = ٨$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x \to 1^+} f(x) \neq lim_{x \to 1^-} f(x)$

$lim_{x \to 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \ x < 5 \\ 6x - 10 & , \ x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$

الحل

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \to 5^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $\lim_{x \to 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x \to 5^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

= ٦x -١٠ = ٦ × ٥ -١٠ = ٢٠

$\lim_{x \to 5^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

= ٢٠ × (٥)٢ + ١٥ = ٢٠ × ٢٥ +١٥ = ٥٠٠ +١٥ = ٥١٥

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$\lim_{x \to 5^+} f(x) \neq \lim_{x \to 5^-} f(x)$

$\lim_{x \to 5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

١- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

٢- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

٣- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة(٤)

الجزء الاول : تابع الاتصال

الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاتصال :-

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 6x & , \ ٠ < x < ٥ \\ 25+2x & , \ x \geq ٥ \end{cases}$$

متصلة في $x = ٥$ ؟

الحل

f(٥) = ٢٥+٢x = ٢٥ +٢× ٥ = ٢٥ +١٠ = ٣٥

$lim_{x\to5^+} f(x)$ = ٢٥+٢x = ٢٥ +٢× ٥ = ٢٥ +١٠ = ٣٥

$lim_{x\to5^-} f(x)$ = ٦x = ٦× ٥ = ٣٠

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=٥ .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 12x^2 & , \ ٠ < x < ١٠ \\ 20+4x & , \ x \geq ١٠ \end{cases}$$

متصلة في $x = ١٠$ ؟

الحل

f(١٠) = ٢٠+٤ x = ٢٠ + ٤×١٠ = ٢٠ +٤٠ = ٦٠

$lim_{x\to10^+} f(x)$ = ٢٠+٤x = ٢٠ +٤× ١٠ = ٢٠ +٤٠ = ٦٠

$lim_{x\to10^-} f(x)$ = ١٢x٢ = ١٢× ١٠٢ = ١٢٠٠

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=١٠ .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \ x \leq ٨ \\ 1160 + 15x & , \ x > ٨ \end{cases}$$

متصلة في $x = ٨$ ؟

الحل

f(٨) = ٢٠ x٢ = ٢٠ × (٨)٢ = ٢٠ × ٦٤ = ١٢٨٠

$lim_{x \to 8^+} f(x)$ = ١١٦٠ +١٥x = ١١٦٠ +١٥ × ٨ = ١٢٨٠

$lim_{x \to 8^-} f(x)$ = ٢٠ x٢ = ٢٠ × (٨)٢ = ٢٠ × ٦٤ = ١٢٨٠

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=٨ .

تمارين الواجب :-

تمرين ١ :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x \to 0} 5$$

$$\lim_{x \to 5}(10 - 2x + x^2)$$

$$\lim_{x \to 12}(3x + 6)$$

$$lim_{x \to \frac{2}{3}}(9x - 2)$$

تمرين ٢ :-

إذا كانت $lim_{x \to 5} f(x) = 20$ و $lim_{x \to 5} g(x) = -15$ و $lim_{x \to 5} h(x) = 18.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

١- $lim_{x \to 5}[h(x) + f(x)]$

٢- $lim_{x \to 5}[h(x) - g(x)]$

٣- $lim_{x \to 5}[g(x) \times f(x)]$

٤- $lim_{x\to5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

١- $lim_{x\to1}[5x-2]^2$

٢- $lim_{x\to2}[10\ -2x]^2$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

١- $lim_{x\to5}(2x^3-2x^2-50)$

٢- $lim_{x\to0}(1-e^x)$

٣- $lim_{x\to1}log(10x^4+15)$

٤- $lim_{x\to2}e^{2x^2+3x+2}$

٥- $lim_{x\to3}ln(20x^2-5x+10)$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}30x^2+15 & ,\ x<2\\ 5x-2 & ,\ x>٢\end{cases}$$

فأوجد :-

١- $lim_{x\to3}f(x)$

٢- $lim_{x\to1}f(x)$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \ ٠ < x < ١ \\ 3 + x^2 & , \ x \geq ١ \end{cases}$$

متصلة في $x = ١٠$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل :

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة y= ٥x + ٩

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$ =?????

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

y = ١٥

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = ٠$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

$$\text{١-}\quad y = x^{٥} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = ٥\, x^{٤}$$

$$\text{٢-}\quad y = ١٥\, x^{٤} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = ٦٠\, x^{٣}$$

$$\text{٣-}\quad y = ١٠\, x \frac{dy}{dx} = ١٠$$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$\text{١-}\quad y = ٥\, x^{٤} + ٦\, x^{٣} + ٨\, x^{٢} + ٣\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = ٢٠\, x^{٣} + ١٨\, x^{٢} + ١٦\, x + ٣$$

$$\text{٢-}\quad y = ٢٠\, x^{٥} + ١٠\, x^{٣} - ٥\, x^{٢} + ١٥\, x + ٣٠$$

$$\frac{dy}{dx} = ١٠٠\, x^{٤} + ٣٠\, x^{٢} - ١٠\, x + ١٥$$

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$\text{١-}\quad y = ٥\, x^{٤} + ٦\, x^{٣} + ٨\, x^{٢} + ٣\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = ٢٠\, x^{٣} + ١٨\, x^{٢} + ١٦\, x + ٣$$

$$\text{٢-}\quad y = ٢٠\, x^{٥} + ١٠\, x^{٣} - ٥\, x^{٢} + ١٥\, x + ٣٠$$

$$\frac{dy}{dx} = ١٠٠\, x^{٤} + ٣٠\, x^{٢} - ١٠\, x + ١٥$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

١- $y = (٣ x + ١) (x^{٢} – ٧ x)$

$\frac{dy}{dx} = (٣ x + ١) (٢x -٧) + (x٢ – ٧ x) (٣)$

٢- $y = (١٠ x^{٣} - ١٢) (٥ x^{٢} + ٢ x)$

$\frac{dy}{dx} = (١٠ x^{٣} - ١٢)(١٠ x +٢) + (٣٠ x^{٢}) (٥ x^{٢} + ٢x)$

مشتقة حاصل قسمة دالتين $= \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^{2}}$$

مثال :-

$y = \frac{4x+2}{3x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^{2}} = \frac{12x -3x-6}{9\,x^{2}} = \frac{9x-6}{9x^{2}}$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

$١ – y = (١٥x٢ + ٢٠)^{٣}$

$\frac{dy}{dx} = ٣ (١٥x^{٢} + ٢٠)^{٢} (٣٠x)$

$٢ – y = (١٠ x^{٣} - ١٢x^{٢} + ٥)^{٥}$

$\frac{dy}{dx} = ٥ (١٠ x^{٣} - ١٢x^{٢} + ٥)^{٤} (٣٠x^{٢} – ٢٤x)$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = ١٥ x^{٤} + ١٢ x^{٣} + ٢٠ x^{٢} - ٥ x + ١٢$$

$$\text{(المشتقة الاولى)} \frac{dy}{dx} = ٦٠ x^{٣} + ٣٦ x^{٢} + ٤٠ x - ٥$$

$$\text{(المشتقة الثانية)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ١٨٠ x^{٢} + ٧٢ x + ٤٠$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = ٣٦٠ x + ٧٢$$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١ ـ المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية :على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخليةفتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < ١ (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ١ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > ١ (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= ٨٠ – ٦x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -٦)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (-٦) × $\frac{10}{100}$ = -٠,٦

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (٢):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= ٢٠٠ – ١٠ x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -١٠)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (-١٠) × $\frac{٢٠}{٢٠٠}$ = -١

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= ١٥x-٢٠) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= ١٥)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = $(١٥) \times \frac{100}{1000} = ١,٥$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي (D = ١,٥x +٢٠) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي ٦٠٠ وحدة عند سعر ٢٠٠ ريال ؟

المحاضرة(٥)

تابع التفاضل و تطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٢ ـ الاستهلاك والادخار

١ ـ الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

٢ ـ الميل الحدى للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = ١

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = ١٥ + ٠,٦x - ٠,٠٢x^{٢})$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

١ ـ الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = ٠,٦ - ٠,٠٤\ x$

٢ ـ الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$K' = ٠,٦ - ٠,٠٤\ x\ ١ = ٠,٦ - ٠,٠٤ = ٠,٥٦$

٣ـ الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

= ١ – الميل الحدي للاستهلاك = ١ ـ ٠,٥٦ = ٠,٤٤

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = ١٨ + ٠,٨\ x - ٠,١٥x^{٢})$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

١ ـ الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = ٠,٨ - ٠,٣\ x$

٢ ـ الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$K' = ٠,٨ - ٠,٣\ x\ ١ = ٠,٨ - ٠,٣ = ٠,٥$

٣ـ الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال = ١ – الميل الحدى للاستهلاك = ١ ـ ٠,٥ = ٠,٥

٣- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

١ - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

٢ - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

٣ - تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

P= - ٠,٤x^٢ + ٣٠٠x -٢٠٠٠

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

١ - المشتقة الاولى للدالة :-

P/ = -٠,٨x + ٣٠٠

٢ - المشتقة الثانية للدالة :-

P// = -٠,٨

٣ - نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

P= ٥٠٠-٠,٢x +٠,١x^٢

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

١ - المشتقة الاولى للدالة :-

P/ = -٠,٢ + ٠,٢x

٢ - المشتقة الثانية للدالة :-

P// = ٠,٢

٣ - نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

٤- الربح الحدي

١ـ **الايراد الكلي** = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

٢ـ **الربح الكلي** = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

٣ـ **الايراد الحدي** = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

٤ـ **التكلفة الحدية** = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

٥ـ **الربح الحدي** = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

٦ـ **الربح الحدي** = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (١) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = ١٢x^{٣} + ٢٠x^{٢} - ١٠x + ٣٠$$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$$R^{/} = ٣٦x^{٢} + ٤٠x - ١٠$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=١٠$

$R^{/} = ٣٦x^{٢} + ٤٠x - ١٠ = ٣٦\times١٠^{٢} + ٤٠\times١٠ - ١٠ = ٣٩٩٠$ **ريال**

مثال (٢) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

Selling price (سعر وحدة البيع) $= ٤x^{٢} + ٦x + ٥$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة ؟

الحل

١ـ الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × x

$$R = (١٠x^{٣} - ١١x^{٢} + ٥x - ٢٠)\times x = ١٠x^{٤} - ١١x^{٣} + ٥x^{٢} - ٢٠x$$

٢ـ الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$$R^{/} = ٤٠x^{٣} - ٣٣x^{٢} + ١٠x - ٢٠$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً $x=٥$

$R^{/} = ١٢x^{٢} + ١٢x + ٥ = ١٢\times١٥^{٢} + ١٢\times١٥ + ٥ = ٢٨٨٥ r.s$

مثال (٣) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= ١٠x^{٣} - ١١x^{٢} + ٥x - ٢٠$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R =$ (دالة سعر بيع الوحدة) $\times x$

$R = (١٠x^{٣} - ١١x^{٢} + ٥x - ٢٠)\times x = ١٠x^{٤} - ١١x^{٣} + ٥x^{٢} - ٢٠x$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/} = ٤٠x^{٣} - ٣٣x^{٢} + ١٠x - ٢٠$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً $x=٥$

$R^{/} = ٤٠x^{٣} - ٣٣x^{٢} + ١٠x - ٢٠$

$= ٤٠\times٥^{٣} - ٣٣\times٥^{٢} + ١٠\times٥ - ٢٠$

٤٢٠٥ ريال

مثال (٤) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = ١٠x^{٢} - ١٢x + ١٥$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

(التكاليف الكلية) $C = ١٠x^{٢} - ١٢x + ١٥$

$C' = ٢٠x - ١٢$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=١٠$

$C' = ٢٠x - ١٢ = ٢٠ \times ١٠ - ١٢ = ١٨٨ r.s$

مثال (٥) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$$C = (٥x^٢ - ٣x + ١٥)^٣$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = (٥x^٢ - ٣x + ١٥)^٣$ (التكاليف الكلية)

$C' = ٣\times(٥x^٢ - ٣x + ١٥)^٢\times(١٠x - ٣)$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=٢٠$

$$C' = ٣\times(٥x^٢ - ٣x + ١٥)^٢\times(١٠x - ٣)$$

$$= ٣\times(٥\times٢٠^٢ - ٣\times٢٠ + ١٥)^٢\times(١٠\times٢٠ - ٣)$$

$$= ٣\times(٥\times٤٠٠ - ٦٠ + ١٥)^٢\times(٢٠٠-٣)$$

$$= ٣\times(١٩٥٥)\times(١٩٧) = ١١٥٥٤٠٥ \ r.s$$

مثال (٦) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = ٢x^٣ - ٦x^٢ + ١٠x - ١٥$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = ١٥x^٢ + ٩x - ١٧$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$=(٢x^{٣} - ٦x^{٢} + ١٠x - ١٥) - (١٥x^{٢} + ٩x - ١٧)$

$= ٢x^{٣} - ٢١x^{٢} + x + ٢$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = ٢x^{٣} - ٢١x^{٢} + x + ٢$

$P' = ٦x^{٢} - ٢١x + ١$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=٣٠$

$P' = ٦x^{٢} - ٢١x + ١ = ٦\times٣٠^{٢} - ٢١\times٣٠ + ١ = ٤٧٧١ r.s$

مثال (٧) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = ١٢x^{٣} + ٥x^{٢} - ٢x + ١٠٠$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = ١٠x^{٢} + ٣x + ٢٠$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(١٢x^{٣} + ٥x^{٢} - ٢x + ١٠٠) - (١٠x^{٢} + ٣x + ٢٠)$

$= ١٢x^{٣} + ١٥x^{٢} - ٥x + ٨٠$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = ١٢x^{٣} + ١٥x^{٢} - ٥x + ٨٠$

$P' = ٣٦x^{٢} + ٣٠x - ٥$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٥ وحدة إذاً $x=٢٥$

$P' = ٣٦x^{٢} + ٣٠x - ٥ = ٣٦\times٢٥^{٢} + ٣٠\times٢٥ - ٥ = ٢٣٢٤٥ r.s$

تمرين شامل (١)

الربح الحدي

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = ٣٠ x^{٤} + ١٢x^{٢} - ٦ x + ١٥$$

$$C = ١٣ x^{٣} - ٥x^{٢} +٣ x -٢٠$$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة .

٣- دالة الربح الكلي .

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

الحل

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$$R = ٣٠ x^{٤} + ١٢x^{٢} - ٦ x + ١٥$$

$$R^{/} =١٢٠ x^{٣} + ٢٤x^{٢} - ٦$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=١٠$

$$R^{/} =١٢٠\times١٠^{٣} + ٢٤\times١٠^{٢} - ٦ = ١٢٢٣٩٤ r.s$$

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة :-

$$C = ١٣ x^{٣} - ٥x^{٢} +٣ x -٢٠$$

$$C^{/} =٣٩ x^{٢} - ١٠x + ٣$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=١٢$

$$C^{/} = ٣٩\times١٢^{٢} - ١٠\times١٢ + ٣ = ٥٤٩٩ r.s$$

٣- دالة الربح الكلي :-

$$R = ٣٠ x^{٤} + ١٢x^{٢} - ٦ x + ١٥$$

$$C = ١٣ x^{٣} - ٥x^{٢} +٣ x -٢٠$$

$$P = R - C = ٣٠ x^{٤} - ١٣ x^{٣} + ١٧x^{٢} - ٩ x + ٣٥$$

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$$P = ٣٠ x^{٤} - ١٣ x^{٣} + ١٧x^{٢} - ٩ x + ٣٥$$

$$P^{/} = ١٢٠ x^{٣} - ٣٩x^{٢} + ٣٤x - ٩$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=١٢$

$$P^{/} = ١٢٠ \times ١٢^{٣} - ٣٩ \times ١٢^{٢} + ٣٤ \times ١٢ - ٩ \ =$$

تمرين شامل (٢)

الربح الحدي

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price(سعر بيع الوحدة)= $٣x^{٢} + ٢٥x - ١٨$

$$C = ١٠ x^{٢} + ٢x - ٥$$

المطلوب :-

١- دالة الايراد الكلي .

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٤- دالة الربح الكلي .

٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R =$ (دالة سعر البيع الوحدة) $\times x$

$$R = (٣x^{٢} + ٢٥x - ١٨) \times x$$

$$= ٣x^{٣} + ٢٥x^{٢} - ١٨x$$

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$$R = ٣x^{٣} + ٢٥x^{٢} - ١٨x$$

$$R^{/} = ٩x^{٢} + ٥٠x - ١٨$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً $x=٥$

$R^{/} = ٩\times ٥^{٢} + ٥٠\times ٥^{٢} - ١٨ = ١٤٥٧$ r.s

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$R = ٣x^{٣} + ٢٥x^{٢} - ١٨x$

$R^{/} = ٩x^{٢} + ٥٠x - ١٨$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً $x=٥$

$R^{/} = ٩\times ٥^{٢} + ٥٠\times ٥^{٢} - ١٨ = ١٤٥٧$ r.s

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

$C = ١٠ x^{٢} + ٢x - ٥$

$C^{/} = ٢٠ x + ٢$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=٢٠$

$C^{/} = ٢٠\times ٢٠ + ٢ = ٤٠٢$ r.s

٤- دالة الربح الكلي :-

$R = ٣x^{٣} + ٢٥x^{٢} - ١٨x$

$C = ١٠ x^{٢} + ٢x - ٥$

$P = R - C = ٣x^{٣} + ١٥ x^{٢} - ٢٠x + ٥$

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$P = ٣x^{٣} + ١٥ x^{٢} - ٢٠x + ٥$

$P^{/} = ٩x^{٢} + ٣٠x - ٢٠$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=١٠$

$P^{/} = ٩ \times ١٠^{٢} + ٣٠\times ١٠ - ٢٠ = ١١٨٠$ r.s

تمارين واجب :-

١- إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = ٠,٣x - ٠,٠١x^{٢})$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

٢- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = ٣x^{٢} + ٥x + ١٠٠$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمى أم صغرى ؟

٣- إذا علمت أن :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) = $٨x^{٣} + ١٠x^{٢} + ٥x + ١٢$

$C = ٤x^{٢} + ٣x - ١٠$

المطلوب :-

١- دالة الايراد الكلي .

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة .

٤- دالة الربح الكلي .

٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٢ وحدات .

المحاضره (٦)

التكامل و تطبيقاتة تجارية

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ، حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز ∫ و هو رمز التكامل و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

١- تكاملxالمرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$\int x^n \,.dx = \frac{1}{n+1} x^{n+١} + c$

$\int k \,.dx = k\,x + c$

$\int \,.dx = x + c$

مثال :-

١- $\int x^3 \,.dx = \frac{1}{4} x^{٤} + c$

٢- $\int x^5 \,.dx = \frac{1}{6} x^{٦} + c$

٣- $\int 6 \,.dx =$ ٦ x + c

٤- $\int 3x^4 \,.dx = \frac{3}{5} x^{٥} + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 \,.dx$$

الحل

$y = \frac{1}{6} x^{٦} + \frac{4}{4} x^{٤} - \frac{2}{3} x^{٣} + \frac{3}{2} x^{٢} + ٨x + c$

$y = \frac{1}{6} x^{٦} + x^{٤} - \frac{2}{3} x^{٣} + \frac{3}{2} x^{٢} + ٨x + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4\,x^3 - 30x^2 + 20x + 3\ .dx$$

الحل

y = $\frac{4}{4}$ x٤ - $\frac{30}{3}$ x٣ + $\frac{20}{2}$ x٢ + ٣x + c

y = x٤ - x٣+ ١٠x٢+ ٣x + c

٢- تكامل e^x:-

$\int e^x\,.dx = e^x + c$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$\int \frac{1}{x}\,.dx$ = ln x + c

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9\,x^2 - 10x + 15\ .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٤،١)؟

الحل

y = $\frac{9}{3}\,x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15$x + c

y = $3\,x^3 - 5x^2 + 15$x + c

حيث أن قيمة x = ٤ و قيمة y = ١ فإن :-

١ = $3\,(4)^3 - 5(4)^2 + 15$x٤ + c

١ = ٣×٦٤$-5 \times 16 + 60$ + c

١ = ١٧٢ + c

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7 \; .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٢،٣)؟

الحل

$$y = \frac{1}{3\times4}x^4 - \frac{1}{4\times3}x^3 - 7x + c$$

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - 7x + c$$

حيث أن قيمة x = ٢ و قيمة y = ٣ فإن :-

$$٣ = \frac{1}{12}(2)^4 - \frac{1}{12}(2)^3 - 7x٢ + c$$

$$٣ = \frac{16}{12} - \frac{8}{12} - 14 + c$$

C = ١٦,٣٣٣

التطبيقات التجارية للتكامل

١- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

٢- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

٣- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

٤- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R^{/} = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

٢- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات أي أن x=٥ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

الايراد الكلي $= (5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 =$ ١٥٠ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الحدية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن x=١٠ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

التكاليف الكلية $C = 30000 - 20000 + 400 - 400 =$ ١٠٠٠٠ ريال

تمرين شامل (١)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٢- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع ٢٥ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$$

$$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=٢٠ كما يلي :-

$$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$$

$$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = ٣٨٢٠٠٠$$ ريال

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$$C' = ٣٦x^٢ + ٤٠x - ١٠$$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$$C = ١٢x^٣ + ٢٠x^٢ - ١٠x$$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة يتم التعويض عن قيمة x=٢٥ كما يلي :-

$$C = ١٢\times(٢٥)^٣ + ٢٠\times(٢٥)^٢ - ١٠\times(٢٥) = ١٩٩٧٥٠$$ ريال

٣- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$

$$= (٨x^٣ + ٢٤x^٢ - ١٢x + ٢٠) - (٣٦x^٢ + ٤٠x - ١٠)$$

$$= ٨x^٣ - ١٢x^٢ - ٥٢x + ٣٠$$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = ٨x^{٣} - ١٢x^{٢} - ٥٢x + ٣٠$$

$$P = ٢x^{٤} - ٤x^{٣} - ٢٦x^{٢} + ٣٠x$$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= (٢x^{٤}+٨x^{٣}-٦x^{٢}+٢٠x) - (١٢x^{٣}+٢٠x^{٢}-١٠x)$$

$$= ٢x^{٤} - ٤x^{٣} - ٢٦x^{٢} + ٣٠x$$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = ٢x^{٤} - ٤x^{٣} - ٢٦x^{٢} + ٣٠x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=١٠$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = ٢\times(١٠)^{٤} - ٤\times(١٠)^{٣} - ٢٦\times(١٠)^{٢} + ٣٠\times(١٠)$$

$$= ٢٠٠٠٠ - ٤٠٠٠ - ٢٦٠٠ + ٣٠٠ = ١٣٧٠٠ r.s$$

تمرين شامل (٢)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي لإحدي الشركات تأخذ الشكل التالي:-

$$R' = (٢x+١)\,(٥-٣x^{٢})$$

وكانت دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = (٣x+١)^{٢}$$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة .

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي

$R^{/} = (٢x+١)\ (٥+٣x^{٢})$

$R^{/} = ١٠x + ٦x^{٣} + ٥ + ٣x^{٢}$

$R^{/} = ٦x^{٣} + ٣x^{٢} + ١٠x + ٥$ (الايراد الحدي)

وللوصول دالة الايراد الكلي تمثل تكامل دالة الايراد الحدي :-

$R = (\frac{6}{4})\ x^{٤} + (\frac{3}{3})x^{٣} + (\frac{10}{2})\ x^{٢} + ٥x$

$R = (\frac{6}{4})\ x^{٤} + x^{٣} + ٥x^{٢} + ٥x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات يتم التعويض عن $x=١٠$:-

$R = (\frac{6}{4})\ (١٠)^{٤} + (١٠)^{٣} + (٥)\ (١٠)^{٢} + ٥(١٠) = ١٦٥٥٠\ r.s$

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية

$C^{/} = (٣x+١)^{٢}$

$= ٩x^{٢} + ٦x + ١$ (التكاليف الحدية)

$C = ٣x^{٣} + ٣x^{٢} + x$ (التكاليف الكلية)

وللوصوللحجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=٢٠$:-

$C = ٣(٢٠)^{٣} + ٣(٢٠)^{٢} + (٢٠) = ٢٥٢٢٠\ r.s$

٣- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P^{/} = R^{/} - C^{/}$

$= (٦x^{٣} + ٣x^{٢} + ١٠x + ٥) - (٩x^{٢} + ٦x + ١)$

$= ٦x^{٣} - ٦x^{٢} + ٤x + ٤$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P^{/} = ٦x^{٣} - ٦x^{٢} + ٤x + ٤$

$P = (\frac{6}{4})\ x^{٤} - ٢x^{٣} + ٢x^{٢} + ٤x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= \left(\left(\frac{6}{4}\right) x^{٤} + x^{٣} + ٥x^{٢} + ٥x\right) - \left(٣x^{٣} + ٣x^{٢} + x\right)$$

$$= \left(\frac{6}{4}\right) x^{٤} - ٢\,x^{٣} + ٢x^{٢} + ٤x$$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) x^{٤} - ٢\,x^{٣} + ٢x^{٢} + ٤x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=٣٠$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) \times (٣٠)^{٤} - ٢ \times (٣٠)^{٣} + ٢\times (٣٠)^{٢} + ٤ \times (٣٠)$$

$$= ١١٦٢٩٢٠\,r.s$$

تمارين متنوعة :-

١- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار ٦٠% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

١- الميل الحدي للإدخار = ٠,٦٠ .

٢- الميل الحدي للإستهلاك = ١ - ٠,٦٠ = ٠,٤٠

٣- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$$k' = ٠,٤٠$$

$$K = ٠,٤٠x$$

٢- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار ٧٥% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

١- الميل الحدي للإدخار = ٠,٧٥ .

٢- الميل الحدي للإستهلاك = ١ - ٠,٧٥ = ٠,٢٥

٣- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$$k' = ٠,٢٥$$

$$K = ٠,٢٥x$$

المحاضرة (٧)

الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .

احتمال تحقيق الحدث A نشير له بالرمز P(A) وحدود هذا الاحتمال هي :-

$$٠ \leq A \leq ١$$

احتمال تحقق حدث $= \frac{\text{عدد حالات تحقق الحدث } A}{\text{عدد الحالات الكلية}}$

مثال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

٢٠ كرة بيضاء

٣٠ كرة حمراء

٥٠ كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

1. **حمراء**
2. **بيضاء**
3. **سوداء**
4. **حمراء أو سوداء**
5. **حمراء أو سوداء أو بيضاء**

الحل

١ـ أحتمال أن تكون حمراء $= \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{30}{100}$

٢ـ أحتمال أن تكون بيضاء $= \frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{20}{100}$

٣ـ أحتمال أن تكون سوداء = $\frac{\text{عدد الكرات سوداء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{50}{100}$

٤ـ أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء = $\frac{30}{100} + \frac{50}{100} = \frac{80}{100}$

٥ـ أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء = $\frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{20}{100} = \frac{100}{100} =$ ١

مثال :-

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي ١٠٠٠٠ طالب نجح منهم ٩٠٠٠ طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح ٨٠٠٠ طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

١) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

٢) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

٣) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

٤) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

٥) حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .

٦) حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .

٧) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .

الحل

١ـ حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = $\frac{9000}{10000} =$ ٩٠ % .

٢ـ حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = $\frac{1000}{10000} =$ ١٠ % .

٣ـ حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{8000}{10000} =$ ٨٠ % .

٤ـ حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{2000}{10000} =$ ٢٠ % .

٥ـ حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً = $\frac{9000}{10000} \times \frac{8000}{10000} =$ ٠,٧٢ = ٧٢ %.

٦ـ حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً = $\frac{1000}{10000} \times \frac{2000}{10000} =$ ٠,٠٢ = ٢ %.

٧ـ حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط == $\frac{9000}{10000} \times \frac{2000}{10000} + \frac{8000}{10000} \times \frac{2000}{10000}$

= ٠,٩ × ٠,٢ + ٠,٨ × ٠,١ = ٠,٢٦

مثال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-

٦٠ طالب يدرسون محاسبة .

٣٠ طالب يدرسون تسويق .

١٠ طلاب يدرسون مالية .

إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

١) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة .

٢) إحتمال أن يكون تخصص تسويق .

٣) إحتمال أن يكون تخصص مالية .

٤) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .

٥) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .

الحل

١) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة $= \frac{60}{100}$

٢) إحتمال أن يكون تخصص تسويق $= \frac{30}{100}$

٣) إحتمال أن يكون تخصص مالية $= \frac{10}{100}$

٤) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق $= \frac{60}{100} + \frac{30}{100} = \frac{90}{100}$

٥) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية $= \frac{60}{100} + \frac{30}{100} + \frac{10}{100} =$ ١

نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنين معاً ويسمي الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حيث أن :-

$P(A)$ هو إحتمال تحقق الحدث A .

$P(B)$ هو إحتمال تحقق الحدث B .

$P(A \cap B)$: التقاطع و يشير إلى إحتمال تحقق الحدثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني).

$P(A \cup B)$: الاتحاد ويشير إلى إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل (الحدث الاول أو الثاني)

مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد ٥٠ طالب نجح في المحاسبة ٣٠ طالب و نجح في الاقتصاد ٤٠ طالب فإذا علمت أن هناك ٢٥ طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فاحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل ؟

الحل :-

١- نرمز إلى إحتمال النجاح في المحاسبة بالرمز $P(A)= \frac{30}{50} =$ ٠,٦٠

٢- نرمز إلى إحتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز $P(B)= \frac{40}{50} =$ ٠,٨٠

٣- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى إحتمال النجاح في المادة الاولى و إحتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$P(A\cap B) = \frac{25}{50} =$ ٠,٥٠

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A\cup B)$ =

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) =$ ٠,٦٠ + ٠,٨٠ - ٠,٥٠ = ٠,٩٠

مثال :-

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم إختيار عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ شخص وجد من بينهم ٥٠ شخص يتصفحوا جريدة الرياض و ٦٠ شخص يتصفحون جريدة المال و ٣٠ شخص يتصفحون الجريدتين معاً، فاحسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الاقل ؟

الحل

١- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز $P(A)= \frac{50}{100} =$ ٠,٥٠

٢- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة المال بالرمز $P(B)= \frac{60}{100} =$ ٠,٦٠

٣- احتمال تصفح الجريدتين معاً يشير إلى تصفح الجريدة الاولى والجريدة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$P(A\cap B) = \frac{30}{100} =$ ٠,٣٠

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A\cup B)$ =

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) =$ ٠,٥٠ + ٠,٦٠ - ٠,٣٠ = ٠,٨٠

أنواع الاحداث A و B :-

١ـ أحداث متنافية (متعارضة) : وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الأخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجدك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = ٠$$

٢ـ أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الاخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال وفي هذه الحالة فإن أحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

٣ـ أحداث غير مستقلة : وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الاخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً :-

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

مثال :-

إذا كان [$P(A)= ٠,٣$, $P(B)= ٠,٤$, $P(A \cap B)=٠,١٢$] هل كل من الحدثين A و B مستقلة ؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

١) $P(A) \times P(B) = ٠,٣ \times ٠,٤ = ٠,١٢$.

٢) $P(A \cap B) = ٠,١٢$.

٣) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

٤) إذا هذه الاحداث مستقلة .

مثال :-

إذا كان [$P(A)= ٠,٥$, $P(B)= ٠,٣$, $P(A \cap B)=٠,٢$] هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

١) $P(A) \times P(B) = ٠,٥ \times ٠,٣ = ٠,١٥$

٢) $P(A\cap B) = ٠,٢$

٣) $P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$

٤) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

مثال

إذا علمت أن $P(A)=٠,٢$ و $P(B)=٠,٤$ و أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

١) $P(A\cap B)$

٢) $P(A\cup B)$

٣) $P(\bar{A})$

٤) $P(\bar{B})$

الحل

١- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذاً فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

$P(A\cap B) = ٠$

٢- و من ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = ٠,٢ + ٠,٤ - ٠ = ٠,٦$

٣- إحتمال $P(\bar{A})$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$P(\bar{A}) = ١ - P(A)$

$= ١- ٠,٢ = ٠,٨$

$P(\bar{B}) = ١ - P(B)$

$= ١- ٠,٤ = ٠,٦$

الاحتمال الشرطي :-

هو أحتمال تحقق حدث معين وليكن A و لكن بشرط حدوث الحدث B أولاً و نرمز له بالرمز $P(A \mid B)$ و كمثال على ذلك إذا تم تقدير إحتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض إحتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة ١ ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

لاحظ الحالات التالية :-

١- في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = ٠$$

٢- في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

٣- في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال :-

إذا كان :-

$P(A) = ٠,٦$, $P(B)= ٠,٨$, $P(A\cap B)= ٠,٥$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(A\cup B)$, $P(A \mid B)$, $P(B \mid A)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

١) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

٢) $P(A) \times P(B) = ٠,٦ \times ٠,٨ = ٠,٤٨$

٣) $P(A\cap B) = ٠,٥$

$P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$ إذا هذه الاحداث غير مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

١) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = ٠,٦ + ٠,٨ - ٠,٥ = ٠,٩$

٢) $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} = ٠,٦٢٥$

٣) $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = ٠,٨٣٣$

٤) $P(\bar{A}) = ١ - P(A) = ١ - ٠,٦ = ٠,٤$

٥) $P(\bar{B}) = ١ - P(B) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢$

مثال :-

إذا كان :-

$P(A) = ٠,٧ \quad , \quad P(B) = ٠,٤ \quad , P(A\cap B) = ٠,٢٨$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(A\cup B) \; , \; P(A|B) \; , \; P(B|A) \; , \; P(\bar{A}) \; , P(\bar{B})$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

١) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

٢) $P(A) \times P(B) = ٠,٧ \times ٠,٤ = ٠,٢٨$

٣) $P(A\cap B) = ٠,٢٨$

٤) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

١) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = ٠,٧ + ٠,٤ - ٠,٢٨ = ٠,٨٢$

٢) $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} = ٠,٧$

٣) $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = ٠,٤$

٤) $P(\bar{A}) = ١ - P(A) = ١ - ٠,٧ = ٠,٣$

٥) $P(\bar{B}) = ١ - P(B) = ١ - ٠,٤ = ٠,٦$