أسم المقرر : **الاحصاء في الادارة**

استاذ المقرر: **د/ أحمد فرحان**

المحاضرة (1)

المجموعات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء أخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C , ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b ,c , ...

تابع تعريف المجموعة :-

يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة
$a \in A$
أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

$A = \{ 2,0,1,4\}$

$B= \{ a , b ,c , d \}$

$C= \{ 1 , 2 , 3 .....\}$

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل1 2 3 4وهكذا)

$D = \{ 1, 2 , 3,....,100\}$

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القا

ويتم فيها و

بواسطتها ت

ارتباط عناص

أنواع المجموعات:

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر.

ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

المجموعة المنتهي

المجم

مثال :

المجموعات ال

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة)

المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل

ا مجموعات

جميع عناصر
. A

أمثلة :-

١- إذا كانت { A = {2 , 4 , 6 و { B = { 1,2,3,4,5,6,7,8 فإن
$A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A \quad \gg\gg\gg\gg \quad A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

1- A = {1, 5

2- A= { 2 ,5

1 – A = B

2 – A ≡ B

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان {A = { 1 , 2 , 3 , 7 و { B= { 2 , 4 , 6 , 8 أوجد (AUB) ؟

الحل

$(AUB) = \{1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B $(A \cap B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان $A = \{ -1 , 0 , 1 , 2 , 3\}$ و $B = \{0,2,4,6,\}$ **أوجد** $A \cap B$

الحل

$(A \cap B) = \{0 , 2 \}$

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان $U = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و $A=\{2,4,6,8,10\}$
أوجد $\overline{A}$

الحل

$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$ **أوجد** $A-B$

الحل: $A-B = \{ 1 , 2 , y \}$

1- A∪B
2- A ∩ B
3- B − A
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A}$ ∪ A
9- $\overline{A}$ ∩ A

مثال :-
إذا كانت

A={1,2,3,x, y} و

1- A∪B =
2- A ∩ B =
3- B − A =
4- $\overline{A}$ = {4,
5- $\overline{B}$ = {1,
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$ =
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$ =
8- $\overline{A}$ ∪ A =
9- $\overline{A}$ ∩ A =

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ،B (A×B) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x , y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت A={-2,1} و B ={-3,1,4}

فأوجد A × B و B × A

الحل

A × B ={(-2,-3) , (-2,1) , (-2,4) , (1,-3) , (1,1) , (1,4)}

B × A = {(-3,-2) , (-3,1) ,(1,-2) , (1,1) ,(4,-2) , (4,1)}

مثال :-

أنشئ A × B و B × A، علماً بأن :-

A={1,2} و B = { w , x , y }

الحل

A × B ={(1,w) ,(1,x) , (1,y) , (2,w) , (2,x) , (2,y)}

$B \times A = \{(w,1),(w,2),(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1=x_2)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الاول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني ،$(y_1=y_2)$

مثال :-

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x+1\ ,\ y-\frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$

الحل

$X+1 = 4 \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad x = 4-1 = 3$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a , b , c\}$

الحل

$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} ,\{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} ,\{a,b,c\} ,Ø \}$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

تمرين :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{ a, b , c \}$

$P(S) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} ,\{b,c\} ,\{a,b,c\} , Ø \}$

$2^3 = 8$

تمارين:

1- حضو يأ نم هذه تاعومجملا يه ةعومجم ةيلاخ وأ ةعومجم

ةيهتنم وأ ةعومجم ريغ ةيهتنم :-

A ={x: ددع بلاس و بجومx }

B = {3 ,6 ,9 ,12 }

C = {x: ةلود ةيبروأ عقت يف هبش ةريزجلا ةيبرعلا x }

٢- إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }

2- A= { 20 ,50 ,70 } , B = { k , d , u }

تناك اذإ -4

A={8,10,12,r, m} و

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A} \cup A$

9- $\overline{A} \cap A$

٥- إذا كانت $A=\{-5,7\}$ و $B=\{-6,4,9\}$
فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة
$(x+1\ ,\ y-10)=(2x\ ,\ 15)$ ؟

-7 أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S=\{2\ ,\ 5\ ,\ 8\}$ ؟

-8 إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر ، فأوجد عدد عناصر $P(S)$ ؟

المحاضرة(2)

الدوال

الدالة:-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ,وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو(تتوقف على) أو (تتعين بواسطة) كمية أخرى.

ملاحظة :-

اذا كانت F دالة من A الى B فأن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون F دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة

- واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور.

- **مثال :**
- اذا $A = \{1,2,3\}$ و $b = \{4,8,12\}$
- و $f_1 = \{(1,4) , (2,4) , (3,12)\}$
- $F_2 = \{ (1,4) , (2,8) \}$
- $F_3 = \{(1,4) , (1,8) , (2,4) , (3,12) \}$
- فهل f1 , f2 , f3 دوال من A الى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ هل
$f_1 =\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل الدالة

1- R =$\{(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)\}$
2- R =$\{(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) \}$
3- R =$\{(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) \}$
4- R =$\{(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)\}$
5- R =$\{0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)\}$

6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}

2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }

3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}

5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}

6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :
إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- f(2)

2- f(-1)

3- f(a)

4- f(x+1)

مثال :
إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ فأوجد :-

1- f(-3)
2- f(1/2)
3- f(a)

تمارين:-

١- للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب f(t) و f(-5) .

٢- للدالة $f(x)=3x^2-2$ أحسب f(2)+f(-1)+f(3) .

٣- للدالة $f(x)=x+4$ أحسب 2f(4)+3f(-1) .

٤- للدالة $f(x)=x^2-1$ أحسب f(3)-f(-2) .

الدوال الحقيقية :-

•دالة كثيرة الحدود:

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$
$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$

مثال :
ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)
2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)
3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)
4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)
5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال : إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$
$= f(x) + f(g)$
$= 3x+5 + x^2+1$
$= x^2+3x+6$

- إذا كانت: $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$\begin{aligned}2-(f - g)(x) &= \\ &= f(x) - g(x) \\ &= (3x+5) - (x^2+1) \\ &= 3x+5 -x^2-1 \\ &= -x^2 + 3x +4\end{aligned}$$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$\begin{aligned}3- (f \times g)(x) &= \\ &= f(x) \times g(x) \\ &= (3x+5) \times (x^2+1) \\ &= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\ &= 3x^3 + 5x^2 + 3x +5\end{aligned}$$

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x \times 5x$ و $g(x) = x^2+1$

فأوجد :

$$4- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

أيجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_1 , y_1)$
ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و
نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_1 \neq x_2$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(1,-3) و B(3,7) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - -3}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

ax + by + c = 0

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$
$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$
$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ اذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال : **هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟**

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$
$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$$

اذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي 2- .

الحل:-

$m = -2$, $x_1 = 5$, $y_1 = -3$

$y - (-3) = -2(x-5)$

$Y + 3 = -2(x-5)$

$y = -2x + 7$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$f_1 = \{(5,2),(9,3),(13,4)\}$

و $f_2=\{(5,2),(9,3),(13,6)\}$

و$f_3=\{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R = \{(1,4), (2,4), (3,3), (4,5)\}$

2- $R = \{(2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (5,2)\}$

3- $R = \{(-1,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$

٣- للدالة $f(x)= 2x^3 + 10x^2 - 15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤-إذا كانت $f(x)=6x+3$ و $g(x)=10$ فأوجد:

$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\times g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6,\frac{-3}{4})$ و $B(4,\frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ و $B(7,\frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$-5x + 3y - 8 = 0$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$12x = -9y + 30$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y - 4 = 0$ و $4y = 16x + 4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y - 12x - 6 = 0$ ، $8y + 2x - 30 = 0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(9,-2)$ و ميله يساوي -5 ؟

المحاضرة(3)

النهايات و الاتصال

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x +1$ فإن يعني إيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :

1- إذا كانت $f(x)=c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن لكل عدد حقيقي a .

2- إذا كانت $f(x) = m\,x + c$ فإن لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :

الحل

= 30

$= 1 - (2 \times -2) = 5$

$= 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$

$= 8 \times 1/2 - 5 = 4 - 5 = -1$

مثال :

إذا كانت و و ،

فأوجد ما يلي :-

1-

= –

= 10.5 - 5 = 5.5

مثال :

إذا كانت و و ، فأوجد ما يلي :-

2-

= ×

= -8 × 10.5 = -84

مثال :

إذا كانت و و ، فأوجد ما يلي :-

3-

= × = 8 × 5 = 40

مثال :

إذا كانت و و ، فأوجد ما يلي :-

4-

= = = -

نظرية :

إذا كانت موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$= [\,]^n$

مثال :

$= [\,]^6$

$= [3\times1-1]^6 = [3-1]^6 = [2]^6 = 64$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1-

$= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7$

$= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2-

$= = = = -17$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

3-

$= \quad = =$

4-

$=$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

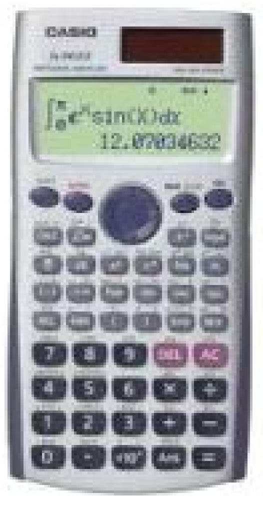
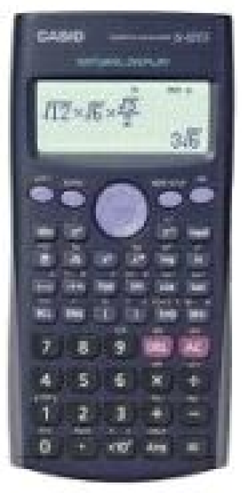
5-

$= \quad = \quad =$

$6- \quad = \log(3\times2^2 + 5)$

$= \log(3\times4+5)$

$= \log(12+5) = \log(17)$

أ مثلة

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$7- \quad = \ln(2\times3-5) = \ln(6-5) = \ln(1) = 0$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$8- \quad = ((3\times1^3) + 4\times1 - 2)^3$

$= (3+4-2)^3 = (5)^3 = 125$

$9- \quad = \quad = \quad = \quad = 2.08$

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى 3 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى 7 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

فأوجد :-

-1(و 3 تقع في مجال الدالة الثانية)

$= 7x - 2 = 7\times3 - 2 = 19$

مثال :

إذا كانت

فاوجد :-

-2(و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (\ )^2 + 5 = 3\times\ + 5 = \ + 5 = \ + =$

مثال :

إذا كانت

فاوجد :-

-3

الحل

-3

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين و النهاية من اليسار ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

(النهاية من اليمين)

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

= (النهاية من اليسار)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$\neq$

هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

فأوجد :-

الحل

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين و النهاية من اليسار ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

(النهاية من اليمين)

$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$

= (النهاية من اليسار)

$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$\neq$

هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة(4)

الجزء الاول : تابع الاتصال

الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاتصال :-

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

= 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

= 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

= 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

= $12x^2 = 12\times 10^2 = 1200$

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

$$f(8) = 20\,x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

$$= 1160 + 15x = 1160 + 15 \times 8 = 1280$$

$$= 20\,x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند **$x=8$.**

تمارين الواجب :-

تمرين 1 :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

تمرين 2 :-

إذا كانت و و ،

فأوجد ما يلي :-

1-

2-

3-

4-

تمرين 3 :-

أوجد :-

1-

2-

تمرين 4 :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1-

2-

3-

4-

5-

تمرين 5 :-

إذا كانت

فأوجد :-

1-

2-

تمرين 6 :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 10$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل :

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة =?????

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن الـمتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$= 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

$$1-\ \ y = x^5 \qquad = 5x^4$$

$$2-\ \ y = 15x^4 \qquad = 60x^3$$

$$3-\ \ y = 10x = 10$$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$1-\ \ y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$$

$$= 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

$$2-\ \ y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$$

$$= 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$1-\ \ y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$$

$$= 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

$$2-\ \ y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$$

$$= 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$= (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$= (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$

مشتقة حاصل قسمة دالتين =

مثال :-

$y =$

$= = =$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

1 – $y = (15x2 + 20)^3$

$= 3(15x^2 + 20)^2(30x)$

2 – $y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$= 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15\,x^4 + 12\,x^3 + 20\,x^2 - 5\,x + 12$$

(المشتقة الاولى)= $60\,x^3 + 36\,x^2 + 40\,x - 5$

(المشتقة الثانية) $= 180\,x^2 + 72\,x + 40$

$= 360\,x + 72$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية :على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخليةفتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة $= 1$ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب ×

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (1):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 80 – 6x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 100وحدة عند سعر يساوي 10 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D= -6)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب ×

م = (-6) × = -0.6

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (2):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 200 – 10 x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 200وحدة عند سعر يساوي 20 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D= -10)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب ×

م = (-10) × = -1

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (3):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 15x-20) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 1000وحدة عند سعر يساوي 100 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D= 15)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب ×

م = $(15) \times$ = 1.5

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي ($D = 1.5x + 20$) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

المحاضرة(5)

تابع التفاضل و تطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$$K^{/}= 0.6 - 0.04\, x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K^{/}= 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 -.04 = 0.56$$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8\, x - 0.15x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاكو الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$$K^{/}= 0.8 - 0.3\, x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K^{/}= 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال = 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.5 = 0.5

3- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 ـ يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

2 ـ يتم إيجاد المشتقة الثانية .

3 ـ تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P= - 0.4x^2 + 300x -2000$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P^{/} = -0.8x + 300$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P^{//} = -0.8$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P= 500-0.2x +0.1x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P^{/} = -0.2 + 0.2x$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P^{//} = 0.2$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

4- الربح الحدي

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

6- الربح الحدي = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$$R^/ = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$R^/ = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10 = 3990$ ريال

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

Selling price (سعر وحدة البيع)$= 4x^2 + 6x + 5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R =$ (دالة سعر بيع الوحدة) $\times x$

$$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20)\times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$$R^/ = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$R^{/} = 12x^2 + 12x + 5 = 12\times15^2 + 12\times15 + 5 = 2885$ r.s

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R =$ (دالة سعر بيع الوحدة) $\times x$

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/} = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$R^{/} = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20$

4205 ريال

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

(التكاليف الكلية) $C = 10x^2 - 12x + 15$

$C^{/} = 20x - 12$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$C^{/} = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188 r.s$

مثال (5) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$ (التكاليف الكلية)

$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$

$= 3\times(5\times20^2 - 3\times20 + 15)^2\times(10\times20 - 3)$

$= 3\times (5\times400 - 60 + 15)^2 \times(200-3)$

$= 3\times(1955) \times(197) = 1155405$ r.s

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$=(2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$$

$$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

$$P^{/} = 6x^2 - 21x + 1$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$$P^{/} = 6x^2 - 21x + 1 = 6\times30^2 - 21\times30 + 1 = 4771 r.s$$

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$=(12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$$

$$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

$$P^{/} = 36x^2 + 30x - 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$$P^{/} = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 - 5 = 23245 r.s$$

تمرين شامل (1)

الربح الحدي

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$$

$$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$$

$$R^{/} = 120\,x^3 + 24x^2 - 6$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$$R^{/} = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394 r.s$$

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$$

$$C^{/} = 39\,x^2 - 10x + 3$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$C^{/} = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499 r.s$$

3- دالة الربح الكلي :-

$$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$$

$$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$$

$$P = R - C = 30\,x^4 - 13\,x^3 + 17x^2 - 9\,x + 35$$

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$P = 30\ x^4 - 13\ x^3 + 17x^2 - 9\ x + 35$$

$$P^{/} = 120\ x^3 - 39x^2 + 34x - 9$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$P^{/} = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 34 \times 12 - 9\ =$$

تمرين شامل (2)

الربح الحدي

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price(سعر بيع الوحدة)= $3x^2 + 25x - 18$

$$C = 10\ x^2 + 2x - 5$$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر البيع الوحده) × x

$$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$$

$$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$R\ = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R^{/} = 9x^2 + 50x - 18$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R^/ = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457 r.s$

-2 حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R^/ = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R^/ = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457 r.s$

-3 حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$C^/ = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C^/ = 20\times20 + 2 = 402 r.s$

-4 دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

-4 حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$P^/ = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$P^/ = 9\times10^2 + 30\times10 - 20 = 1180 r.s$

تمارين واجب :-

-1 إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 0.3x - 0.01x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

-2 إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = 3x^2 + 5x + 100$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

3- إذا علمت أن :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) = $8x^3 + 10x^2 + 5x + 12$

$C = 4x^2 + 3x - 10$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 15 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 12 وحدات .

المحاضره (6)

التكامل و تطبيقاتة تجارية

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ، حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز ∫ و هو رمز التكامل و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

1- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$= \quad x^{n+1} + c$

$= \quad + c$

$= \quad x + c$

مثال :-

1- $= \quad x^4 + c$

2- $= \quad x^6 + c$

3- $= \quad 6x + c$

4- $= \quad x^5 + c$

مثال :-

أوجد :-

الحل

$y = x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 8x + c$

$y = x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 8x + c$

مثال :-

أوجد :-

الحل

$y = x^4 - x^3 + x^2 + 3x + c$

$y = x^4 - x^3 + 10x^2 + 3x + c$

2- تكامل :-

$= \quad + c$

3- تكامل :-

$= \ln x + c$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

الحل

$y = x + c$

$y = x + c$

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

$1 = x4 + c$

$1 = 3\times64 + c$

$1 = 172 + c$

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (2,3)؟

الحل

$y = x + c$

$y = x + c$

حيث أن قيمة $x = 2$ و قيمة $y = 3$ فإن :-

$3 = x2 + c$

$3 = \ \ + c$

$C = 16.333$

التطبيقات التجارية للتكامل

1- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

2- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

4- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$R^{/} =$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$R =$

$R =$

2- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$R =$

الايراد الكلي 150 = ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$C^{/} =$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الحدية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$C =$

$C =$

2- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$C =$

التكاليف الكلية 10000 = = C ريال

تمرين شامل (1)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$R^{/} =$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$C^{/} =$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

2- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع 25 وحدة .

3- دالة الربح الحدي .

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

5- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$R^{/} =$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$R =$

$R =$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع 20 وحدة يمكن التعويض عن قيمة $x=20$ كما يلي -

$R =$

$= = 382000$ ريال

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$C^{/} = 36x^2 + 40x - 10$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي:-

$C = 12\,x^3 + 20\,x^2 - 10x$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=25$ كما يلي :-

$C = 12\times(25)^3 + 20\times(25)^2 - 10\times(25) = 199750$ ريال

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P^{/} = R^{/} - C^{/}$

$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$

$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P^{/} = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^4+8x^3-6x^2+20x) - (12x^3+20x^2-10x)$$

$$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=10$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2\times(10)^4 - 4\times(10)^3 - 26\times(10)^2 + 30\times(10)$$

$$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700 r.s$$

تمرين شامل (2)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي لإحدي الشركات تأخذ الشكل التالي:-

$$R^{/} = (2x+1)(5-3x^2)$$

وكانت دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C^{/} = (3x+1)^2$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

3- دالة الربح الحدي .

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدة .

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي

$R^{/} = (2x+1)\ (5+3x^2)$

$R^{/} = 10x + 6x^3 + 5 + 3x^2$

(الايراد الحدي)$R^{/} = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5$

وللوصول دالة الايراد الكلي تمثل تكامل دالة الايراد الحدي :-

$R = ()\ x^4 + ()x^3 + ()\ x^2 + 5x$

$R = ()\ x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات يتم التعويض عن $x=10$:-

$R = ()\ (10)^4 + (10)^3 + (5)\ (10)^2 + 5(10) = 16550 r.s$

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية

$C^{/} = (3x+1)^2$

(التكاليف الحدية) $= 9x^2 + 6x + 1$

(التكاليف الكلية)$C = 3x^3 + 3x^2 + x$

وللوصوللحجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=20$:-

$C = 3(20)^3 + 3(20)^2 + (20) = 25220 r.s$

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P^{/} = R^{/} - C^{/}$

$= (6x^3 + 3x^2 + 10x + 5) - (9x^2 + 6x + 1)$

$= 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P^{/} = 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$

$P = ()\ x^4 - 2\ x^3 + 2x^2 + 4x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= (() x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x) - (3x^3 + 3x^2 + x)$$

$$= () x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

-5 حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدة :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = () x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=30$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = () (30)^4 - 2(30)^3 + 2(30)^2 + 4(30)$$

$$= 1162920 r.s$$

تمارين متنوعة :-

-1 إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار %60 من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

-1 الميل الحدي للإدخار = 0.60 .

-2 الميل الحدي للإستهلاك = 1 - 0.60 = 0.40

-3 الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$$k' = 0.40$$

$$K = 0.40x$$

-2 إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار %75 من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

-1 الميل الحدي للإدخار = 0.75 .

-2 الميل الحدي للإستهلاك = 1 - 0.75 = 0.25

-3 الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$$k' = 0.25$$

$$K = 0.25x$$

المحاضرة (7)

الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .

احتمال تحقيق الحدث A نشير له بالرمز P(A) وحدود هذا الاحتمال هي :-

$$0 \le A \le 1$$

احتمال تحقق حدث =

مثال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

20 كرة بيضاء

30 كرة حمراء

50 كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

1. حمراء
2. بيضاء
3. سوداء
4. حمراء أو سوداء
5. حمراء أو سوداء أو بيضاء

الحل

1- أحتمال أن تكون حمراء = =

2- أحتمال أن تكون بيضاء = =

3- أحتمال أن تكون سوداء = =

4- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء = + =

5- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء = + + = = 1

مثال :-

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي 10000 طالب نجح منهم 9000 طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح 8000 طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

1) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

2) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

3) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

4) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

5) حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .

6) حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .

7) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .

الحل

1- حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = = 90 % .

2- حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = = 10 % .

3- حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = = 80 % .

4- حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = = 20 % .

5- حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً = × = 0.72 = 72 %.

6- حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً = × = 0.02= 2%.

7- حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط == × + ×

$$= 0.2 \times 0.9 + 0.1 \times 0.8 = 0.26$$

مثال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-

60 طالب يدرسون محاسبة .

30 طالب يدرسون تسويق .

10 طلاب يدرسون مالية .

إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

1) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة .

2) إحتمال أن يكون تخصص تسويق .

3) إحتمال أن يكون تخصص مالية .

4) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .

5) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .

الحل

1) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة =

2) إحتمال أن يكون تخصص تسويق =

3) إحتمال أن يكون تخصص مالية =

4) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق = + =

5) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية = + + = 1

نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنين معاً ويسمي الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

حيث أن :-

P(A) هو إحتمال تحقق الحدث A .

P(B) هو إحتمال تحقق الحدث B .

P(AB) : التقاطع و يشير إلى إحتمال تحقق الحدثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني).

P(AB) : الاتحاد ويشير إلى إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل (الحدث الاول أو الثاني)

مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد 50 طالب نجح في المحاسبة 30 طالب و نجح في الاقتصاد 40 طالب فإذا علمت أن هناك 25 طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فاحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل ؟

الحل :-

1- نرمز إلى إحتمال النجاح في المحاسبة بالرمز P(A)= = 0.60

2- نرمز إلى إحتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز P(B)= = 0.80

3- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى إحتمال النجاح في المادة الاولى و إحتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(AB) = \; = 0.50$$

4- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = P(AB) =

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.60 + 0.80 - 0.50 = 0.90$$

مثال :-

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم إختيار عينة عشوائية مكونة من 100 شخص وجد من بينهم 50 شخص يتصفحوا جريدة الرياض و60 شخص يتصفحون جريدة المال و 30 شخص يتصفحون الجريدتين معاً، فاحسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الاقل ؟

الحل

1- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز P(A)= = 0.50

2- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة المال بالرمز P(B)= = 0.60

3- احتمال تصفح الجريدتين معاً يشير إلى تصفح الجريدة الاولى والجريدة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(AB) = \; = 0.30$$

4- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = P(AB) =

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.50 + 0.60 - 0.30 = 0.80$$

أنواع الاحداث A و B :-

1- أحداث متنافية (متعارضة) : وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الأخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجدك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(AB) = 0$$

2- أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الاخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال وفي هذه الحالة فإن أحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(AB) = P(A) \times P(B)$$

3- أحداث غير مستقلة : وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الاخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً :-

$$P(AB) \neq P(A) \times P(B)$$

مثال :-

إذا كان $[P(A)= 0.3 , P(B)= 0.4 , P(AB)=0.12]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة ؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(AB) = P(A) \times P(B)$

1($P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$.

2($P(AB) = 0.12$.

3($P(AB) = P(A) \times P(B)$.

4(إذا هذه الاحداث مستقلة .

مثال :-

إذا كان $[P(A)= 0.5 , P(B)= 0.3 , P(AB)=0.2]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(AB) = P(A) \times P(B)$

1) $P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$

2) $P(AB) = 0.2$

3) $P(AB) \neq P(A) \times P(B)$

4) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

مثال

إذا علمت أن $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.4$ و أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

1) $P(AB)$

2) $P(AB)$

3) $P()$

4) $P()$

الحل

1- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذاً فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

$$P(AB) = 0$$

2- و من ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.4 - 0 = 0.6$$

3- إحتمال $P()$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن
-

$$P() = 1 - P(A)$$

$$= 1- 0.2 = 0.8$$

$$P() = 1 - P(B)$$

$$= 1- 0.4 = 0.6$$

الاحتمال الشرطي :-

هو أحتمال تحقق حدث معين وليكن A و لكن بشرط حدوث الحدث B أولاً و نرمز له بالرمز $P(A | B)$
و كمثال على ذلك إذا تم تقدير إحتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض إحتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة 1 ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A | B) =$$

لاحظ الحالات التالية :-

1- في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A | B) = \quad = = 0$$

2- في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A | B) = \quad = = P(A)$$

3- في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A | B) =$$

مثال :-

إذا كان :-

$$P(A) = 0.6 \quad , \quad P(B)= 0.8 \quad , P(AB)= 0.5$$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$$P(AB) \ , \ P() \ , \ P() \ , \ P() \ , P()$$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

1) $P(AB) = P(A) \times P(B)$

2) $P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.8 = 0.48$

3) $P(AB) = 0.5$

$P(AB) \neq P(A) \times P(B)$ إذا هذه الاحداث غير مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

1) $P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

2) $P(A | B) = = = 0.625$

3($P(B | A) = = = 0.833$

4($P() = 1- P(A) = 1- 0.6 = 0.4$

5($P() = 1- P(B) = 1- 0.8 = 0.2$

مثال :-

إذا كان :-

$P(A) = 0.7 \quad , \quad P(B)= 0.4 \quad , P(AB)= 0.28$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(AB) \; , \; P() \; , \; P() \; , \; P() \; , P()$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

1($P(AB) = P(A) \times P(B)$

2($P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$

3($P(AB) = 0.28$

4($P(AB) = P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

1($P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82$

2($P(A | B) = = = 0.7$

3($P(B | A) = = = 0.4$

4($P() = 1- P(A) = 1- 0.7= 0.3$

5($1- 0.4 = 0.6P() = 1- P(B) =$