

المحاضرة (1)

المجموعات

تعريف المجموعة :- يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء آخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C ,

الاشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b , c ,

يستخدم الرمز \in "ينتمي إلى" ليعين عناصر المجموعة
فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A
فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة
 $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا
نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على
الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر) :-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة
" , " :-

مثال :-

$A = \{ 2,0,1,4 \}$

$B = \{ a , b , c , d \}$

$C = \{ 1 , 2 , 3 , \dots \}$

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل 1 2 3 4 وهكذا)

$D = \{ 1 , 2 , 3 , \dots , 100 \}$

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي
الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

$A = \{ x : \text{عدد زوجي} \}$

$B = \{ x : \text{طالب بمقرر الاحصاء في الادارة} \}$

$C = \{ x : \text{طالب بنظام التعليم عن بعد} \}$

$D = \{ x : \text{عدد صحيح } -3 \leq x \leq 1 \}$

$X = \{ x : \text{عدد صحيح } 0 \leq x \leq 12 \}$

أنواع المجموعات :-

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو $\{ \}$.
أمثلة :-

$$A = \{ x : \text{عدد طبيعي زوجي و فردي} \}$$

$$B = \{ x : \text{دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية} \}$$

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

$$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$$

$$B = \{ 1 , 2 , 3 , \dots , 100 \}$$

$$C = \{ x , y , s , t u \}$$

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

$$A = \{ \text{عدد طبيعي فردي} : x \}$$

$$B = \{ 10, 20 , 30 , \dots \}$$

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الإلكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$$A \subseteq B , B \subseteq A \quad \gggggg \quad A = B$$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

$$1- A = \{1, 5, 7, 9\} , B = \{9, 7, 5, 1\}$$

$$2- A = \{2, 5, 9\} , B = \{a, s, d\}$$

الحل

$$1 - A = B$$

$$2 - A \equiv B$$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B ($A \cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان $A = \{1, 2, 3, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ أوجد $(A \cup B)$ ؟

الحل

$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B ($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ و $B = \{0, 2, 4, 6\}$ أوجد $A \cap B$

الحل

$$(A \cap B) = \{0, 2\}$$

المكملة أو المتممة :-

يقال أن \bar{A} مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ و $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ أوجد

الحل

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

الفرق :-

إذا كانت مجموعتان A ، B فإن $A - B$ يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وليست في B .

مثال :-

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, x, y\}$ و $B = \{3, 4, 5, x, w\}$ أوجد $A - B$

الحل

$$A - B = \{1, 2, y\}$$

مثال :-

إذا كانت

$$A = \{1, 2, 3, x, y\}$$

$$B = \{3, 4, 5, x, w\}$$

و المجموعة الكلية

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, w, x, y, z\}$$

فأوجد :-

- 1- $A \cup B$
- 2- $A \cap B$
- 3- $B - A$
- 4- \bar{A}
- 5- \bar{B}
- 6- $\bar{A} \cup \bar{B}$
- 7- $\bar{A} \cap \bar{B}$
- 8- $\bar{A} \cup A$
- 9- $\bar{A} \cap A$

$$1- A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$$

$$2- A \cap B = \{3, x\}$$

$$3- B - A = \{4, 5, w\}$$

$$4- \bar{A} = \{4, 5, w, z\}$$

$$5- \bar{B} = \{1, 2, y, z\}$$

$$6- \bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$$

$$7- \bar{A} \cap \bar{B} = \{z\}$$

$$8- \bar{A} \cup A = U$$

$$9- \bar{A} \cap A = \{\}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فإن عدد عناصر $P(S)$ يساوي 2^n .

تمرين : أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{ a, b, c \}$

$$P(S) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \emptyset \}$$

$$2^3 = 8$$

تمارين :-

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

- (a) $A = \{x \text{ عدد سالب و موجب} : x\}$
 (b) $B = \{3, 6, 9, 12\}$
 (c) $C = \{x \text{ دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية} : x\}$
 (d) $D = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$
 (e) $E = \{100, 200, 300, \dots\}$
 (f) $F = \{w, e, r, t\}$

2- إذا كانت $A = \{3, 5, 7\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

3- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

- 1- $A = \{5, 10, 15, 20\}$ ، $B = \{15, 10, 5, 20\}$
 2- $A = \{20, 50, 70\}$ ، $B = \{k, d, u\}$

- 1- $A \cup B$
- 2- $A \cap B$
- 3- $B - A$
- 4- \overline{A}
- 5- \overline{B}
- 6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
- 7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
- 8- $\overline{A} \cup A$
- 9- $\overline{A} \cap A$

4- إذا كانت

$$A = \{8, 10, 12, r, m\} \text{ و}$$

$$B = \{4, 6, 10, o, r\}$$

المجموعة الكلية

$$U = \{4, 6, 8, 10, 12, o, r, m, p\}$$

ثم أوجد :-

5- إذا كانت $A = \{-5, 7\}$ و $B = \{-6, 4, 9\}$
فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

6- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة
 $(x+1, y-10) = (2x, 15)$ ؟

7- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2, 5, 8\}$ ؟

8- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر ، فأوجد عدد عناصر
 $P(S)$ ؟

المحاضرة (٢)

الدوال

الدالة :-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ، وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو تتعين بواسطة) كمية أخرى .
ملاحظة :-

إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و تسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .
حتى تكون f دالة لا بد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

مثال :-

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ وكانت
 $f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$ و
 $f_2 = \{(1,4), (2,8)\}$
 $f_3 = \{(1,4), (1,8), (2,4), (3,12)\}$
 فهل f_3, f_2, f_1 دوال من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ هل
 $f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
 $f_2 = \{(1,4), (2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
 $f_3 = \{(1,4), (1,8), (2,4), (3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

مثال :-

إذا كان $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ ، $f=\{(1,3), (2,6)\}$ مثل f بالمخطط السهمي لمعرفة ما إذا كانت تمثل دالة أم لا ، ثم أوجد مداها

تمرين :

أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

- 1- $R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$
- 2- $R = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
- 3- $R = \{(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$
- 4- $R = \{(-3,1), (-1,1), (0,1), (4,1)\}$
- 5- $R = \{(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4)\}$
- 6- $R = \{(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1)\}$

$$1- R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$$

$$2- R = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

$$3- R = \{(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$$

$$4- R = \{(-3,1), (-1,1), (0,1), (4,1)\}$$

$$5- R = \{(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4)\}$$

$$6- R = \{(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1)\}$$

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- $f(2)$

2- $f(-1)$

3- $f(a)$

4- $f(x+1)$

مثال :

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ فأوجد :-

1- $f(-3)$

2- $f(1/2)$

3- $f(a)$

تمارين :-

١- للدالة $f(x) = 2x^2 - x - 5$ أحسب $f(t)$ و $f(-5)$.

٢- للدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ أحسب $f(2) + f(-1) + f(3)$.

٣- للدالة $f(x) = x + 4$ أحسب $2f(4) + 3f(-1)$.

٤- للدالة $f(x) = x^2 - 1$ أحسب $f(3) - f(-2)$.

الدوال الحقيقية :-

• **دالة كثيرة الحدود:** هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الأعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) .

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$$

$$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$$

مثال:

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى بالدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة، وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة و تركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = x^2 + 1$

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$
 $= f(x) + g(x)$
 $= 3x + 5 + x^2 + 1$
 $= x^2 + 3x + 6$

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = x^2 + 1$

فأوجد:

2- $(f - g)(x) =$
 $= f(x) - g(x)$
 $= (3x + 5) - (x^2 + 1)$
 $= 3x + 5 - x^2 - 1$
 $= -x^2 + 3x + 4$

مثال: إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

$$\begin{aligned} 3- (f \times g)(x) &= \\ &= f(x) \times g(x) \\ &= (3x+5) \times (x^2+1) \\ &= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\ &= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

مثال: إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

$$4- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

إيجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرسم له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_2 \neq x_1$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-3)}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(3,2)$ و $B(5,2)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$

إذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

إذا $m_1 = m_2$ المستقيمان متوازيان

المستقيمت المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$
مثال : هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$

$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$$

إذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :
 معادلة الخط المستقيم الذي ميله m و يمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5, -3)$ و ميله يساوي -2 .

الحل

$$m = -2 , x_1 = 5 , y_1 = -3$$

$$y - (-3) = -2(x-5)$$

$$y + 3 = -2(x-5)$$

$$y = -2x + 7$$

تمارين واجب :-

1- إذا $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 9, 13\}$ وكانت

$$f_1 = \{(5, 2), (9, 3), (13, 4)\}$$

$$f_2 = \{(5, 2), (9, 3), (13, 6)\}$$
 و

$$f_3 = \{(5, 6), (9, 2), (13, 4), (9, 6)\}$$
 و

فهل f_1, f_2, f_3 دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R = \{(1,4), (2,4), (3,3), (4,5)\}$

2- $R = \{(2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (5,2)\}$

3- $R = \{(-1,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$

٣- للدالة $f(x) = 2x^3 + 10x^2 - 15$ أحسب $f(1) + f(3)$

٤- إذا كانت $f(x) = 6x + 3$ و $g(x) = 10$ فأوجد:

$$(f+g)(x), (f-g)(x), (f \times g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6, \frac{-3}{4})$ و $B(4, \frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ و $B(7, \frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$-5x + 3y - 8 = 0$$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$12x = -9y + 30$$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y - 4 = 0$ و $4y = 16x + 4$ متوازيان؟

١٠- هل المستقيمان $3y - 12x - 6 = 0$ ، $8y + 2x - 30 = 0$ متعامدان؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(9, -2)$ و ميله يساوي 5-؟

المحاضرة (3)

النهايات و الاتصال

النهايات :

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدالة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عندما نؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :

١- إذا كانت $f(x) = c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢- إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x \rightarrow 5} 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 5} 30 = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times 2) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ ، فأوجد ما يلي :- $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$

$$1- \lim_{x \rightarrow 2} [h(x) - f(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ = 10.5 - 5 = 5.5$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ ، فأوجد ما يلي :- $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$

$$2- \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \times h(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \\ = -8 \times 10.5 = -84$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و
 فاوجد ما يلي :- $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$

$$3- \lim_{x \rightarrow 2} 8 f(x) = 8 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و
 فاوجد ما يلي :- $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$

$$4- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} [3x - 1]^6 &= [\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1]^6 \\ &= [3 \times 1 - 1]^6 = [3 - 1]^6 = [2]^6 = 64 \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} 1- \lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 + 5x^2 - 7) &= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7 \\ &= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37 \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} 2- \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 7}{x - 5} &= \frac{3 \times 3^2 + 7}{3 - 5} = \frac{3 \times 9 + 7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17 \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} 3- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{5x + 3} &= \frac{2 \times 2 - 1}{5 \times 2 + 3} = \frac{4 - 1}{10 + 3} = \frac{3}{13} \end{aligned}$$

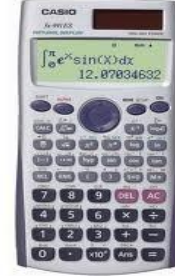
$$\begin{aligned} 4- \lim_{x \rightarrow 2} e^x &= e^2 \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} 5- \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 + 2x + 1} &= e^{1^2 + 2 \times 1 + 1} = e^{1 + 2 + 1} = e^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6- \lim_{x \rightarrow 2} \log(3x^2 + 5) &= \log(3 \times 2^2 + 5) \\ &= \log(3 \times 4 + 5) \\ &= \log(12 + 5) = \log(17) \end{aligned}$$



أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$7- \lim_{x \rightarrow 3} \ln(2x - 5) = \ln(2 \times 3 - 5) = \ln(6 - 5) = \ln(1) = 0$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$8- \lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 + 4x - 2)^3 = ((3 \times 1^3) + 4 \times 1 - 2)^3 \\ = (3 + 4 - 2)^3 = (5)^3 = 125$$

$$9- \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9} = 2.08$$

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & , x < 5 \\ 15x - 2 & , x > 5 \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلا بد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى 3 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولي أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى 7 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad (\text{و } 3 \text{ تقع في مجال الدالة الثانية}) \\ = 7x - 2 = 7 \times 3 - 2 = 19$$

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases} \quad \text{إذا كانت}$$

فأوجد :-

$$2- \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) \quad (\text{و نصف تقع في مجال الدالة الاولي}) \\ = 3x^2 + 5 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 3 \times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

فاوجد :-

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول والثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad (\text{النهاية من اليمين})$$

$$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \quad (\text{النهاية من اليسار})$$

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار ❌
إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

فاوجد :-

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول والثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \quad (\text{النهاية من اليمين})$$

$$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \quad (\text{النهاية من اليسار})$$

$$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار ❌
إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :-

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

- 1- لا بد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R .
 - 2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .
 - 3- لا بد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .
- لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة (4)

الجزء الاول : تابع الاتصال
الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟**الحل**

$$f(5) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 6x = 6 \times 5 = 30$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذا فهذه الدالة غير متصلة عند $x=5$.**مثال :-**

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟**الحل**

$$f(10) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 12x^2 = 12 \times 10^2 = 1200$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذا فهذه الدالة غير متصلة عند $x=10$.**مثال :-**

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟**الحل**

$$f(8) = 20x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 1160 + 15x = 1160 + 15 \times 8 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 20x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

حيث أن النتائج متساوية إذا فهذه الدالة متصلة عند $x=8$.

تمارين الواجب :-**تمرين ١ :-**

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x \rightarrow 0} 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (10 - 2x + x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 12} (3x + 6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (9x - 2)$$

تمرين ٢ :-إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 20$ و $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -15$ أوجد ما يلي ، $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 18.5$:-

1- $\lim_{x \rightarrow 5} [h(x) + f(x)]$

2- $\lim_{x \rightarrow 5} [h(x) - g(x)]$

3- $\lim_{x \rightarrow 5} [g(x) \times f(x)]$

4- $\lim_{x \rightarrow 5} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right]$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

1- $\lim_{x \rightarrow 1} [5x - 2]^2$

2- $\lim_{x \rightarrow 2} [10 - 2x]^2$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^3 - 2x^2 - 50)$

2- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x)$

3- $\lim_{x \rightarrow 1} \log(10x^4 + 15)$

4- $\lim_{x \rightarrow 2} e^{2x^2 + 3x + 2}$

5- $\lim_{x \rightarrow 3} \ln(20x^2 - 5x + 10)$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \quad x < 2 \\ 5x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

2- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلاً:
إذا كان الربح مثلاً يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

$$y = 5x + 9$$

المعطى :- دالة أو معادلة

$$\frac{dy}{dx} = \text{?????}$$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يؤثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x^5$	$\frac{dy}{dx} = 5x^4$
2- $y = 15x^4$	$\frac{dy}{dx} = 60x^3$
3- $y = 10x$	$\frac{dy}{dx} = 10$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي \times مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي \times مشتقة الدالة الاولى

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x^2 - 7x)(3)$$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4) - (x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x - 6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس \times تفاضل ما بداخله

مثال :-

1 - $y = (15x^2 + 20)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$$

2 - $y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5 \quad (\text{المشتقة الاولى})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40 \quad (\text{المشتقة الثانية})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72 \quad (\text{المشتقة الثالثة})$$

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-**1- المرونة**

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهاية المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

لاحظ أن :-

المشتقة الاولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$م = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (٢):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 200 - 10x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠ وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -10)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}} \times \text{الكمية المطلوبة}$$

$$م = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 15x - 20)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠ وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = 15)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}} \times \text{الكمية المطلوبة}$$

$$م = (15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي $(D = 1.5x + 20)$ أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال؟

المحاضرة (5)

تابع التفاضل
وتطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار = المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K' = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - 0.04 = 0.56$$

3- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$1 - 0.56 = 0.44$$

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 18 + 0.8x - 0.15x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.8 - 0.3x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K' = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

3- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$1 - 0.5 = 0.5$$

3- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

2 - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

3 - تحديد نوع النهاية (عظمى - صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة :- يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = -0.4x^2 + 300x - 2000$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P' = -0.8x + 300$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = -0.8$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = 500 - 0.2x + 0.1x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P' = -0.2 + 0.2x$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = 0.2$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغري .

4- الربح الحدي1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة \times سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

6- الربح الحدي = الايراد الحدي - التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$$R' = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$$R' = 36x^2 + 40x - 10 = 36 \times 10^2 + 40 \times 10 - 10 = 3990 \text{ ريال}$$

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات
تعتمد على العلاقة التالية :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 4x^2 + 6x + 5$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الأيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة \times سعر بيع الوحدة

$$R = x \times (\text{دالة سعر بيع الوحدة})$$

$$R = (4x^2 + 6x + 5) \times x = 4x^3 + 6x^2 + 5x$$

2- الأيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الأيراد الكلي .

$$R' = 12x^2 + 12x + 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدات إذاً $x=15$

$$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 2885 \text{ ريال}$$

مثال (3) :-

في إحدى شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة
التالية :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الأيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة \times سعر بيع الوحدة

$$R = x \times (\text{دالة سعر بيع الوحدة})$$

$$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$$

2- الأيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الأيراد الكلي .

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

$$= 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20 = 4205 \text{ ريال}$$

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 - 12x + 15$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = 10x^2 - 12x + 15 \quad (\text{التكاليف الكلية})$$

$$C' = 20x - 12 \quad (\text{التكاليف الحدية})$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188 \text{ ريال}$$

مثال (5) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3 \quad (\text{التكاليف الكلية})$$

$$C' = 3 \times (5x^2 - 3x + 15)^2 \times (10x - 3) \quad (\text{التكاليف الحدية})$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$$\begin{aligned} C' &= 3 \times (5x^2 - 3x + 15)^2 \times (10x - 3) \\ &= 3 \times (5 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15)^2 \times (10 \times 20 - 3) \\ &= 3 \times (5 \times 400 - 60 + 15)^2 \times (200 - 3) \\ &= 3 \times (1955) \times (197) = 1155405 \quad \text{ريال} \end{aligned}$$

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17) \\ &= 2x^3 - 21x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$\begin{aligned} P &= 2x^3 - 21x^2 + x + 2 \\ P' &= 6x^2 - 42x + 1 \end{aligned}$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$$P' = 6x^2 - 42x + 1 = 6 \times 30^2 - 42 \times 30 + 1 = 4771 \quad \text{ريال}$$

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$$

$$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي .

$$P' = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5 = 36 \times 25^2 + 30 \times 25 - 5 = 23245 \text{ ريال}$$

تمرين شامل (1)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الإيرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

المطلوب :-

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$R' = 120x^3 + 24x^2 - 6$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$$R' = 120 \times 10^3 + 24 \times 10^2 - 6 = 122394 \text{ ريال}$$

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$C' = 39x^2 - 10x + 3$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$C' = 39 \times 12^2 - 10 \times 12 + 3 = 5499 \text{ ريال}$$

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

3- دالة الربح الكلي :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$P' = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 34 \times 12 - 9 =$$

تمرين شامل (2)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 3x^2 + 25x - 18$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

المطلوب :-

- 1- دالة الايراد الكلي .
- 2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .
- 3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .
- 4- دالة الربح الكلي .
- 5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 3x^2 + 25x - 18$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة \times سعر بيع الوحدة

$$R = x \times (\text{دالة سعر بيع الوحدة})$$

$$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$$

$$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R' = 9x^2 + 50x - 18$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$$R' = 9 \times 5^2 + 50 \times 5 - 18 = 1457 \text{ ريال}$$

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$C' = 20x + 2$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$$C' = 20 \times 20 + 2 = 402 \text{ ريال}$$

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

4- دالة الربح الكلي :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

$$P' = 9x^2 + 30x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$$P' = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180 \text{ ريال}$$

تمارين واجب :-

1- إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 0.3x - 0.01x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

2- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = 3x^2 + 5x + 100$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

3- إذا علمت أن :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 8x^3 + 10x^2 + 5x + 12$$

$$C = 4x^2 + 3x - 10$$

المطلوب :-

- 1- دالة الإيراد الكلي .
- 2- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .
- 3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 15 وحدة .
- 4- دالة الربح الكلي .
- 5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 12 وحدات .

المحاضرة (6)

التكامل
وتطبيقاته التجارية

التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ، حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت f زمرا ما كنتسذل ماكتلا تيلمء نء ريبعتللو $\frac{dy}{dx}$ و هو رمز التكامل و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل $f(x)$ و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x) . dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

١- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n . dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k . dx = kx + c$$

$$\int . dx = x + c$$

مثال :-

$$1- \int x^3 . dx = \frac{1}{4} x^4 + c$$

$$2- \int x^5 . dx = \frac{1}{6} x^6 + c$$

$$3- \int 6 . dx = 6x + c$$

$$4- \int 3x^4 . dx = \frac{3}{5} x^5 + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 . dx$$

الحل

$$y = \frac{1}{6} x^6 + \frac{4}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6} x^6 + x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4x^3 - 30x^2 + 20x + 3 . dx$$

الحل

$$y = \frac{4}{4} x^4 - \frac{30}{3} x^3 + \frac{20}{2} x^2 + 3x + c$$

$$y = x^4 - x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

٢- تكامل e^x :-

$$\int e^x . dx = e^x + c$$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} . dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9x^2 - 10x + 15 . dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

الحل

$$y = \frac{9}{3} x^3 - \frac{10}{2} x^2 + 15x + c$$

$$y = 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$$

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

$$1 = 3(4)^3 - 5(4)^2 + 15 \times 4 + c$$

$$1 = 3 \times 64 - 5 \times 16 + 60 + c$$

$$1 = 172 + c$$

$$c = -171$$

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{4} x^2 - 7 . dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (2,3)؟

الحل

$$y = \frac{1}{3 \times 4} x^4 - \frac{1}{4 \times 3} x^3 - 7x + c$$

$$y = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{12} x^3 - 7x + c$$

حيث أن قيمة x = 2 و قيمة y = 3 فإن :-

$$3 = \frac{1}{12} (2)^4 - \frac{1}{12} (2)^3 - 7 \times 2 + c$$

$$3 = \frac{16}{12} - \frac{8}{12} - 14 + c$$

$$c = 16.333$$

التطبيقات التجارية للتكامل

- 1- الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي .
- 2- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .
- 3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .
- 4- الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R' = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الإيراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الإيراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3} x^3 + \frac{6}{2} x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

2- حجم الإيراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الإيراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

$$\text{ربال } 150 = 5^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = (5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = \text{الإيراد الكلي}$$

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الحدية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن $x=10$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

$$\text{ريال } C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$$

تمرين شامل (1)**مثال :-**

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

- ١- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
- ٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة .
- ٣- دالة الربح الحدي .
- ٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .
- ٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

حيث أن دالة الإيراد الحدي هي :

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

فيمكن الوصول إلى دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الإيراد الحدي كما يلي :-

$$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$$

$$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$$

وللوصول إلى حجم الإيراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة $x=20$ كما يلي :-

$$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$$

$$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000 \text{ ريال}$$

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-
حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$$

وللوصول إلى حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=25$ كما يلي :-

$$C = 12 \times (25)^3 + 20 \times (25)^2 - 10 \times (25) = 199750 \text{ ريال}$$

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الإيراد الحدي - التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$

$$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$$

$$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

حل آخر :-

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$$

$$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=10$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2 \times (10)^4 - 4 \times (10)^3 - 26 \times (10)^2 + 30 \times (10) \\ = 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700 \text{ ريال}$$

تمرين شامل (2)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي لإحدى الشركات تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = (2x+1)(5-3x^2)$$

وكانت دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = (3x+1)^2$$

المطلوب :-

- 1- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .
- 2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .
- 3- دالة الربح الحدي .
- 4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .
- 5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدة .

١ - حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-
الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي

$$R' = (2x+1)(5+3x^2)$$

$$R' = 10x + 6x^3 + 5 + 3x^2$$

$$R' = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5 \quad (\text{الإيراد الحدي})$$

وللوصول دالة الإيراد الكلي تمثل تكامل دالة الإيراد الحدي :-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right)x^4 + \left(\frac{3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{10}{2}\right)x^2 + 5x$$

$$R = \left(\frac{6}{4}\right)x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x$$

وللوصول إلى حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات يتم التعويض عن $x=10$:-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right)(10)^4 + (10)^3 + (5)(10)^2 + 5(10) = 16550$$

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-
التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية

$$C' = (3x+1)^2$$

$$= 9x^2 + 6x + 1 \quad (\text{التكاليف الحدية})$$

$$C = 3x^3 + 3x^2 + x \quad (\text{التكاليف الكلية})$$

وللوصول لحجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=20$:-

$$C = 3(20)^3 + 3(20)^2 + (20) = 25220 \text{ ريال}$$

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي - التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$

$$= (6x^3 + 3x^2 + 10x + 5) - (9x^2 + 6x + 1)$$

$$= 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

حل آخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= \left(\left(\frac{6}{4}\right) x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x\right) - (3x^3 + 3x^2 + x)$$

$$= \left(\frac{6}{4}\right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدة :-
دالة الربح الكلي هي :-

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=30$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) \times (30)^4 - 2 \times (30)^3 + 2 \times (30)^2 + 4 \times (30) = 1162920 \text{ ريال}$$

تمارين متنوعة :-

1- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار 60% من دخله و يستهلك الباقي، المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

$$1 - 0.60 = \text{الميل الحدي للإدخار} .$$

$$0.40 = 0.60 - 1 = \text{الميل الحدي للإستهلاك}$$

$$3- \text{الاستهلاك} = \text{تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك}$$

$$k' = 0.40$$

$$K = 0.40x$$

تمارين متنوعة :-

2- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار 75% من دخله و يستهلك الباقي، المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

$$1 - 0.75 = \text{الميل الحدي للإدخار} .$$

$$0.25 = 0.75 - 1 = \text{الميل الحدي للإستهلاك}$$

$$3- \text{الاستهلاك} = \text{تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك}$$

$$k' = 0.25$$

$$K = 0.25x$$

المحاضرة (٧) الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .
احتمال تحقيق الحدث A نشير له بالرمز P(A) وحدود هذا الاحتمال هي :-

$$0 \leq A \leq 1$$

$$\text{احتمال تحقق حدث} = \frac{\text{عدد حالات تحقق الحدث } A}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

مثال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

٢٠ كرة بيضاء

٣٠ كرة حمراء

٥٠ كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

١. حمراء

٢. بيضاء

٣. سوداء

٤. حمراء أو سوداء

٥. حمراء أو سوداء أو بيضاء

الحل

$$١- \text{أحتمال أن تكون حمراء} = \frac{\text{عدد الكرات حمراء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{30}{100}$$

$$٢- \text{أحتمال أن تكون بيضاء} = \frac{\text{عدد الكرات بيضاء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{20}{100}$$

$$٣- \text{أحتمال أن تكون سوداء} = \frac{\text{عدد الكرات سوداء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{50}{100}$$

$$٤- \text{أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء} = \frac{50}{100} + \frac{30}{100} = \frac{80}{100}$$

$$٥- \text{أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء} = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{20}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

مثال :-

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي ١٠٠٠٠ طالب نجح منهم ٩٠٠٠ طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح ٨٠٠٠ طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

- ١ حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .
- ٢ حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .
- ٣ حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .
- ٤ حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .
- ٥ حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .
- ٦ حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .
- ٧ حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .

الحل

- ١ . حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = $\frac{9000}{10000} = ٩٠\%$.
- ٢ . حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = $\frac{1000}{10000} = ١٠\%$.
- ٣ . حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{8000}{10000} = ٨٠\%$.
- ٤ . حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{2000}{10000} = ٢٠\%$.
- ٥ - حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً = $\frac{8000}{10000} \times \frac{9000}{10000} = ٠.٧٢ = ٧٢\%$.
- ٦ - حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً = $\frac{2000}{10000} \times \frac{1000}{10000} = ٠.٠٢ = ٢\%$.
- ٧ - حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط =

$$\frac{2000}{10000} \times \frac{8000}{10000} + \frac{2000}{10000} \times \frac{9000}{10000} =$$

$$0.26 = 0.1 \times 0.8 + 0.2 \times 0.9 =$$

مثال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-

٦٠ طالب يدرسون محاسبة .

٣٠ طالب يدرسون تسويق .

١٠ طلاب يدرسون مالية .

إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

(١) احتمال أن يكون تخصص محاسبة .

(٢) احتمال أن يكون تخصص تسويق .

(٣) احتمال أن يكون تخصص مالية .

(٤) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .

(٥) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .

الحل

(١) احتمال أن يكون تخصص محاسبة = $\frac{60}{100}$

(٢) احتمال أن يكون تخصص تسويق = $\frac{30}{100}$

(٣) احتمال أن يكون تخصص مالية = $\frac{10}{100}$

(٤) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق = $\frac{30}{100} + \frac{60}{100} = \frac{90}{100}$

(٥) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية = $\frac{10}{100} + \frac{30}{100} + \frac{60}{100} = 1$

نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنان معاً ويسمى الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حيث أن :-

P(A) هو احتمال تحقق الحدث A .

P(B) هو احتمال تحقق الحدث B .

P(A ∩ B) : التقاطع و يشير إلى احتمال تحقق الحدثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني) .

P(A ∪ B) : الاتحاد ويشير إلى احتمال تحقق أحد الحدثين على الأقل (الحدث الاول أو الثاني)

مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد ٥٠ طالب نجح في المحاسبة ٣٠ طالب و نجح في الاقتصاد ٤٠ طالب فإذا علمت أن هناك ٢٥ طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فاحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الأقل ؟

الحل :-

$$1- \text{نرمز إلى احتمال النجاح في المحاسبة بالرمز } P(A) = \frac{30}{50} = 0.60$$

$$2- \text{نرمز إلى احتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز } P(B) = \frac{40}{50} = 0.80$$

٣- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى احتمال النجاح في المادة الاولى و احتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(A \cap B) = \frac{25}{50} = 0.50$$

٤- المطلوب هو احتمال النجاح في مادة واحدة على الأقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.60 + 0.80 - 0.50 = 0.90$$

مثال :-

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم إختيار عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ شخص وجد من بينهم ٥٠ شخص يتصفحوا جريدة الرياض و ٦٠ شخص يتصفحون جريدة المال و ٣٠ شخص يتصفحون الجريدتين معاً، فاحسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الأقل ؟

الحل

$$1- \text{نرمز إلى احتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز } P(A) = \frac{50}{100} = 0.50$$

$$2- \text{نرمز إلى احتمال تصفح جريدة المال بالرمز } P(B) = \frac{60}{100} = 0.60$$

٣- احتمال تصفح الجريدتين معاً يشير إلى تصفح الجريدة الاولى و الجريدة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(A \cap B) = \frac{30}{100} = 0.30$$

٤- المطلوب هو احتمال النجاح في مادة واحدة على الأقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.50 + 0.60 - 0.30 = 0.80$$

أنواع الاحداث A و B :-

١- أحداث متنافية (متعارضة) : وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجدك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = 0$$

٢- أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الآخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال و في هذه الحالة فإن احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

٣- أحداث غير مستقلة : وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الآخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن احتمال تحقق الحدثين معاً :-
 $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

مثال :-

إذا كان $[P(A)= 0.3 , P(B)= 0.4 , P(A \cap B)=0.12]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{الشرط}$$

- 1) $P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$
- 2) $P(A \cap B) = 0.12$
- 3) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- 4) إذا هذه الاحداث مستقلة

مثال :-

إذا كان $[P(A)= 0.5 , P(B)= 0.3 , P(A \cap B)=0.2]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{الشرط}$$

- 1) $P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$
- 2) $P(A \cap B) = 0.2$
- 3) $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$
- 4) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

مثال :-

إذا علمت أن $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.4$ و أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

- 1) $P(A \cap B)$
- 2) $P(A \cup B)$
- 3) $P(\bar{A})$
- 4) $P(\bar{B})$

الحل

١- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذا فإن احتمال تحققهما معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = 0$$

٢- و من ثم فإن احتمال تحقق أحد الحدثين على الأقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.4 - 0 = 0.6$$

٣- احتمال $P(\bar{A})$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0.2 = 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - 0.4 = 0.6 \end{aligned}$$

الاحتمال الشرطي :-

هو احتمال تحقق حدث معين وليكن A و لكن بشرط حدوث الحدث B أولاً و نرسم له بالرمز $P(A|B)$ و كمثل على ذلك إذا تم تقدير احتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض احتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة ١ ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

لاحظ الحالات التالية :-

١. في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

١. في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

١. في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال :-

إذا كان :-

$$P(A) = 0.6 , P(B) = 0.8 , P(A \cap B) = 0.5$$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$$P(A \cup B) , P(A | B) , P(B | A) , P(\bar{A}) , P(\bar{B})$$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

- 1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- 2) $P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.8 = 0.48$
- 3) $P(A \cap B) = 0.5$
- 4) $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث غير مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

- 1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$
- 2) $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625$
- 3) $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = 0.833$
- 4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$
- 5) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2$

مثال :-

إذا كان :-

$$P(A) = 0.7 , P(B) = 0.4 , P(A \cap B) = 0.28$$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$$P(A \cup B) , P(A | B) , P(B | A) , P(\bar{A}) , P(\bar{B})$$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

- 1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- 2) $P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$
- 3) $P(A \cap B) = 0.28$
- 4) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

- 1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82$
- 2) $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} = 0.7$
- 3) $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = 0.4$
- 4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$
- 5) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$

المحاضرة (٨)

تابع الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-**مثال :-**

في دراسة لتخصصات 400 طالب وطالبة من خريجي جامعة الملك فيصل كانت النتائج كالتالي :-

المجموع	طالبة C	طالب B	التخصص
160	40	120	علمي S
240	144	96	أدبي L
400	184	216	المجموع

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

1 - حساب احتمال ان يكون الشخص طالب **أو** علمي ؟

$$P(B \cup S) = P(B) + P(S) - P(B \cap S)$$

$$= \frac{216}{400} + \frac{160}{400} - \frac{120}{400} = \frac{256}{400} = 0.64$$

2 - حساب احتمال ان يكون الشخص طالبة **و** تخصص أدبي :-

$$P(C \cap L) = \frac{144}{400} = 0.36$$

3 - إذا علمت ان الشخص المختار طالبة أحسب احتمال أن يكون تخصصها أدبي :-

$$P(L | C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{144}{400}}{\frac{184}{400}} = \frac{144}{184} = 0.7826$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

المجموع	دكتوراه B	ماجستير A	النوع / المستوى التعليمي
280	160	120	ذكر C
220	240	80	أنثى D
600	400	200	المجموع

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب احتمال أن يكون الشخص ذكر أو حاصل على ماجستير :-

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A)$$

$$= \frac{280}{600} + \frac{200}{600} - \frac{120}{600} = \frac{360}{600} = 0.6$$

الاحصاء في الادارة (بو عبد المحسن)

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراه B	المجموع
ذكر C	120	160	280
أنثى D	80	240	220
المجموع	200	400	600

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب احتمال أن يكون الشخص أنثى و حاصلة على ماجستير :-

$$P(D \cap A) = \frac{80}{600} = 0.1333$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراه B	المجموع
ذكر C	120	160	280
أنثى D	80	240	220
المجموع	200	400	600

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

إذا علمت أن الشخص المختار حاصل على ماجستير أحسب احتمال أن يكون ذكر :-

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{120}{600}}{\frac{200}{600}} = \frac{120}{200} = 0.6$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر

الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

١- احتمال النجاح في المقررين معاً ؟

الحل

$P(A) = 0.6$ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(B) = 0.7$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

احتمال النجاح في المقررين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-
٢- احتمال الرسوب في المقررين معاً ؟

الحل

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.6 && \text{(احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)} \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4 && \text{(احتمال الرسوب في الرياضيات)} \\ P(B) &= 0.7 && \text{(احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)} \\ P(\bar{B}) &= 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3 && \text{(احتمال الرسوب في الاقتصاد)} \\ P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) &= 0.4 \times 0.3 = 0.12 \end{aligned}$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-
٣- احتمال نجاح الطالب في مقرر واحد فقط ؟

الحل

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.6 && \text{(احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)} \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4 && \text{(احتمال الرسوب في الرياضيات)} \\ P(B) &= 0.7 && \text{(احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)} \\ P(\bar{B}) &= 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3 && \text{(احتمال الرسوب في الاقتصاد)} \\ P &= 0.6 \times 0.3 + 0.7 \times 0.4 = 0.18 + 0.28 = 0.46 \end{aligned}$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-
٤- احتمال النجاح في مقرر واحد على الاقل ؟

الحل

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.6 && \text{(احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)} \\ P(B) &= 0.7 && \text{(احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)} \\ P(A \cap B) &= 0.42 \end{aligned}$$

احتمال النجاح في مقرر واحد على الاقل يقصد بذلك الاتحاد :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$$

المتغيرات العشوائية :-

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة Discrete Random Variables

2- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة) Continuous Random Variables

1- المتغير العشوائي المنفصل :-

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة (وبمعنى آخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي 1،2،3،4،5.... لا يمكن أن يأخذ صورة كسرية).

2- المتغير العشوائي المتصل :-

ويطلق عليه المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة و جميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم و كمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة 35.7 أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب)

مثال :-

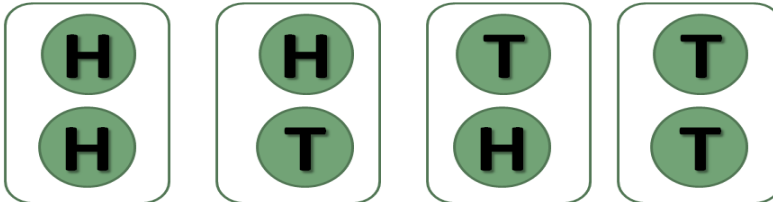
في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة ، فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته ؟



الحل

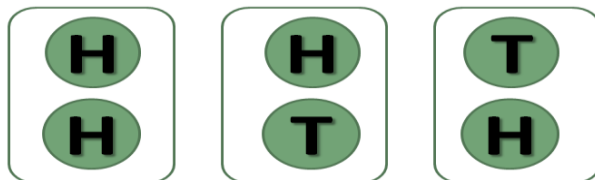
1- فراغ العينة (S) :-

$$S = \{ HH , HT, TH, TT \}$$



2- الحدث (A) :- (تمثل وصف لنتائج التي يمكن أن يأخذها المتغير)

$$A = \{ HH , HT, TH \}$$



3- المتغير العشوائي (X) :- (وصف رقمي لعدد مرات ظهور الصورة)

$$X = \{2, 1, 0\}$$

4- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير $p(x)$:-

$$P(x=0) = \frac{1}{4} \quad \text{where (TT)}$$

$$P(x=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{where (HT, TH)}$$

$$P(x=2) = \frac{1}{4} \quad \text{where (HH)}$$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$\begin{aligned} P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) &= \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

مثال :-

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع العددين الظاهرين فأوجد القيم التي يأخذها المتغير X وأوجد احتمال الحصول على كل من هذه القيم ؟

الحل

1- فراغ العينة (S) :-

$$\begin{aligned} S = \{ &(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \} \end{aligned}$$

2- المتغير العشوائي (X) :- (وصف رقمي لمجموع العددين الظاهرين)

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

3- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير $p(x)$:-

$$P(x=2) = \frac{1}{36}$$

$$P(x=3) = \frac{2}{36}$$

$$P(x=4) = \frac{3}{36}$$

$$P(x=5) = \frac{4}{36}$$

$$P(x=6) = \frac{5}{36}$$

$$P(x=7) = \frac{6}{36}$$

$$P(x=8) = \frac{5}{36}$$

$$P(x=9) = \frac{4}{36}$$

$$P(x=10) = \frac{3}{36}$$

$$P(x=11) = \frac{2}{36}$$

$$P(x=12) = \frac{1}{36}$$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) \dots + P(x=12) = 1$$

تمارين واجب :-**مثال :-**

إذا أعطيت الجدول التالي :-

المجموع	B	A	
55	45	10	X
45	15	30	Y
100	60	40	المجموع

المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

1- $P(A)$

2- $P(\bar{A})$

3- $P(X)$

4- $P(\bar{X})$

5- $P(A \cap X)$

6- $P(B \cap X)$

7- $P(A \cup Y)$

8- $P(B \cup Y)$

9- $P(A|Y)$

10- $P(B|Y)$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و تقديرات التخرج :-

المجموع	ممتاز B	جيد A	النوع / المستوى التعليمي
500	300	200	ذكر X
500	100	400	أنثى Y
1000	400	600	المجموع

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

- 1- أحسب احتمال أن يكون ذكر أو حاصل على تقدير جيد ؟
- 2- أحسب احتمال أن تكون أنثى و حاصلة على تقدير ممتاز ؟
- 3- إذا علمت أنها أنثى فما هو احتمال أن تكون حاصلة على تقدير جيد ؟

المحاضرة (9)**تابع نظرية الاحتمالات****مثال :-**

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص :-

النوع / المستوى التعليمي	x	y	المجموع
A	5	10	15
B	12	3	15
المجموع	17	13	30

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

$$\begin{array}{ll}
 P(B|y) & P(y) \\
 P(x \cap A) & P(\bar{B}) \\
 P(A | y) & P(B | x)
 \end{array}$$

تمرين :-

مصنع يستخدم ثلاث آلات في الانتاج فإذا كانت الآلة الاولى تنتج 30% من إنتاج المصنع و الآلة الثانية تنتج 50% من الانتاج و الباقي للآلة الثالثة فإذا كانت نسبة الانتاج المعيب للآلات الثلاثة على التوالي هي 5% و 1% و 2%، وإذا تم سحب وحدة عشوائياً من إنتاج المصنع **احسب :-**

1- احتمال أن تكون معيبة :-

$$P = 0.30 \times 0.5 + 0.50 \times 0.01 + 0.20 \times 0.02 = 0.024$$

2- إذا علمت ان هذه الوحدة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة الثالثة :-

$$P = \frac{0.004}{0.024} = \frac{4}{24}$$

تمرين :-

تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما، فإذا كانت السكرتيرة A تطبع 40% من المراسلات، و تطبع B 30% و تطبع C 30% الباقية، إذا كان احتمال أن A تخطئ في الطباعة هو 0.02 و احتمال الخطأ في عند B هو 0.03 و احتمالها عند C هو 0.04.

سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ، أوجد احتمال أن تكون السكرتيرة B هي التي طبعتها؟

$$P = \frac{0.30 \times 0.03}{0.40 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.30 \times 0.04} = \frac{9}{29} = 0.31$$

التوزيع الاحتمالي :-

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، وهو جدول مكون من صفين ، الأول به القيم الممكنة للمتغير ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير.

مثال :-

كون جدول التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

$$P(x=0) = \frac{1}{4} \quad \text{where (TT)}$$

$$P(x=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{where (HT , TH)}$$

$$P(x=2) = \frac{1}{4} \quad \text{where (HH)}$$

X	0	1	2	المجموع
P(x)	1/4	1/2	1/4	1

التوقع الرياضي :-

هو الوسط الحسابي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز μ أو $E(x)$ ويتم حسابه باستخدام القانون التالي:-

$$\mu = E(x) = \sum(x \times P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي حاصل جمع كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مضروبة في احتمالها و الجدول التالي يوضح كيفية الوصول إلى قيمة التوقع الرياضي :-

x	الصف 1	المجموع
P(x)	الصف 2	1
E(x)	1 × 2	القيمة المتوقعة

التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي منفصل .
و كان $p(x)$ هو توزيعه الاحتمالي .
فإن وسطه الحسابي أو توقعه الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$\mu = E(X) = \sum_{\text{لجميع قيم } x} x p(x)$$

مثال :-

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

x	الصف (1)	0	1	2	Σ
$P(X=x)$	الصف (2)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$\mu = E(x)$	(1) \times (2)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

مثال :-

إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي ، فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟

x	0	1	2	3	4	Σ
$P(X=x)$	0.20	0.30	0.25	0.15	0.10	1
$\mu = E(x)$	0	0.30	0.50	0.45	0.40	1.65

$$\mu = E(X) = \sum x \cdot p(x) = 1.65$$

التباين والانحراف المعياري :-

التباين للمتغير العشوائي x الذي له قيمة متوقعة تساوي $E(x)$ هو :-

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \sum E(x^2) - (E(x))^2$$

و الانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

و للوصول إلى قيمة التباين و الانحراف المعياري يتم إتباع الخطوات التالية :-

x	(1) صف	Σ
$P(X=x)$	(2) صف	1
$\mu = E(x)$	صف = 3	القيمة المتوقعة
$E(x^2)$	صف 1 * صف 2 صف = 4	
	صف 1 * صف 3	

$$\text{التباين} = \text{ناتج صف 4} - (\text{ناتج صف 3})^2$$

تمرين :-

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري والتباين للتوزيع الاحتمالي التالي:-

x	0	1	2	3
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1

الحل :-

x	0	1	2	3	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1	1	الاحتمال
E(x)=x .P(x)	0	0.2	0.8	0.3	1.3	التوقع
E(X²)=x. E(x)	0	0.2	1.6	0.9	2.7	
σ²	=E(x²)-E(x)²				1.01	التباين
σ	√σ²				1.005	الانحراف المعياري

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	2	4	5	6
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25

- المطلوب :- (1) الوسط الحسابي .
 (2) التباين .
 (3) الانحراف المعياري .
 (4) P(x≥4) .
 (5) P(2≤x≤5)

x	2	4	5	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0.3	1.4	1.25	1.5	4.45	التوقع
E(X ²)=x.E(x)	0.6	5.6	6.25	9	21.45	
v(x) = σ ²	=E(x ²)-E(x) ²		=21.45-(4.45 ²)=		1.647	التباين
σ	=√σ ² = √1.647				1.2835	الانحراف المعياري
					5	

$$= P(x \geq 4)$$

$$(1) \text{ الوسط الحسابي} = \text{التوقع الرياضي} = 4.45$$

$$(2) \text{ التباين} = 1.647$$

$$(3) \text{ الانحراف المعياري} = 1.2835$$

$$(4) P(x \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6) = 0.35 + 0.25 + 0.25 = 0.85$$

$$= 1 - P(2) = 1 - 0.15 = 0.85$$

$$(5) P(2 \leq x < 5) = P(2) + P(4) = 0.15 + 0.35 = 0.5$$

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	0	2	4	6
P(x)	0.1	0.2	0.4	?

المطلوب :-

- (1) p(6)
- (2) الوسط الحسابي .
- (3) التباين .
- (4) الانحراف المعياري .
- (5) P(x ≥ 4) .
- (6) P(2 ≤ x ≤ 5)

x	0	2	4	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.1	0.2	0.4	0.3	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0	0.4	1.6	1.8	3.8	التوقع
E(X ²)=x.E(x)	0	0.8	6.4	10.8	18	مربع التوقع
v(x) = σ^2	$=E(x^2)-E(x)^2$		$=18-3.8^2=3.56$		3.56	التباين
σ					1.89	الانحراف المعياري

$$P(6) = 0.3$$

$$, P(x \geq 4) = P(4) + P(6) = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

مدخن
غير مدخن

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن $= \frac{1}{3}$ عند سؤال ١٠ أفراداً فكل منهم قد يكون....

سليم
تالف

إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق $= \frac{2}{7}$ ، عند سحب مصباح من كل صندوق من ٥٠ صندوق في كل مرة قد يكون....

صورة
كتابة

رمي قطعة النقد 10 مرات

حاضرة
غائبة

إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة $\frac{1}{4}$ ، بمتابعة حضور الطالبة في ٥ محاضرات

جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

١. نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
٢. نتيجة كل محاولة مستقلة عن الأخرى .
٣. احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابت و ليكن p و احتمال الخطأ $q = 1 - p$
٤. إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك n محاولة.

تجربة ذات الحدين

X يسمى متغير ذات الحدين
و توزيعه الاحتمالي هو توزيع ذات الحدين
حيث $x=0,1,2,3,\dots,n$

إذا كان $X =$ عدد
النجاحات في n
محاولة

عند رمي قطعة نقد 7 مرات إذا اعتبرنا ظهور H هو النجاح فإن
 $P(X=4)$ تعني.....

ما احتمال أن يظهر الوجه H أربع مرات عند رمي قطعة النقد 7 مرات.

تمرين :-

عند إجراء تجربة ذات الحدين 5 مرات , نفترض أن x متغير ذات الحدين .
احتمال النجاح = p , احتمال الفشل = $q=1-p$ فإن احتمالية تحقق هذه الظاهرة ثلاث مرات

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3}$$

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند إجراء التجربة n مرة :

$$p(X = x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح و $q = 1 - p$

$$x= 0,1,2,3,\dots,n$$

تمرين :-

رميت قطعة نقود متزنة 4 مرات , أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد H الظاهر فيها.

التجربة تحقق شروط ذات الحدين ، نفرض أن النجاح هو ظهور H .

$$n = 4, p = \frac{1}{2}, q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b\left(x, 4, \frac{1}{2}\right) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$= \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

تمرين :-

عند رمي حجر النرد 4 مرات, ما احتمال عدم ظهور الوجه 6؟ ما احتمال ظهور 6 مرتين؟

فراغ العينة = {1,2,3,4,5,6}

إذا فرضنا أن النجاح هو ظهور العدد 6 .

احتمال النجاح $p = \frac{1}{6}$ ، احتمال الفشل $q = \frac{5}{6}$ ، $n=4$

$$b\left(x, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{4-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$p(\text{عدم ظهور 6}) = b\left(0, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$p(\text{ظهور 6 مرتين}) = b\left(2, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}$$

إذا كان X متغير ذات الحدين n, p فإن :

$$E(X) = \mu = np$$

التوقع
الرياضي

$$\sigma^2 = npq$$

التباين

تمرين :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود خمس مرات أوجد احتمال ظهور الوجه H ثلاث مرات و أحسب التوقع و التباين ؟
الحل

$$1- p(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2- E(X) = \mu = np = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$3- \sigma^2 = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

تمرين واجب :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	0	1	2	3
P(x)	0.2	0.1	0.3	?

المطلوب :-

- (1) p(3)
- (2) الوسط الحسابي .
- (3) التباين .
- (4) الانحراف المعياري .
- (5) P(x≥2)
- (6) P(2≤x≤5)

المحاضرة (10)

1- جمع البيانات وترميزها وعرضها

2- مقاييس النزعة المركزية

1- جمع البيانات وترميزها وعرضها

الخطوات المنهجية للتحليل الإحصائي في البحث العلمي :



تعريف علم الإحصاء :

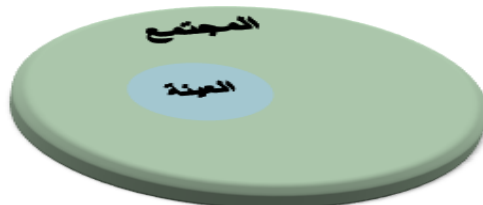
علم الإحصاء : هو العلم الذي يبحث في تصميم أساليب جمع البيانات والتقنيات المختلفة لتنظيم وتصنيف وعرض هذه البيانات ، وتلخيص هذه البيانات في صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس خصائصها الأساسية ، وتحليلها بغرض اتخاذ القرارات المناسبة .



تعريف المجتمع والعينة :-

المجتمع : هو المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء ، واستخلاص خصائص هذا المجتمع هو الهدف النهائي للدراسة الإحصائية .

العينة : هي مجموعة جزئية من مفردات المجتمع محل الدراسة يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع



تمثيل صحيح .

بعض المفاهيم الأساسية:-

البيانات (Data):- مجموعة القيم التي يتم جمعها من مفردات المجتمع أو العينة لخاصية معينة (متغير).

أنواع البيانات:-

1- بيانات نوعية (وصفية): البيانات التي يمكن حصرها في عدة أوجه وصفية و لا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها كالجمع و الطرح

2- البيانات الكمية :

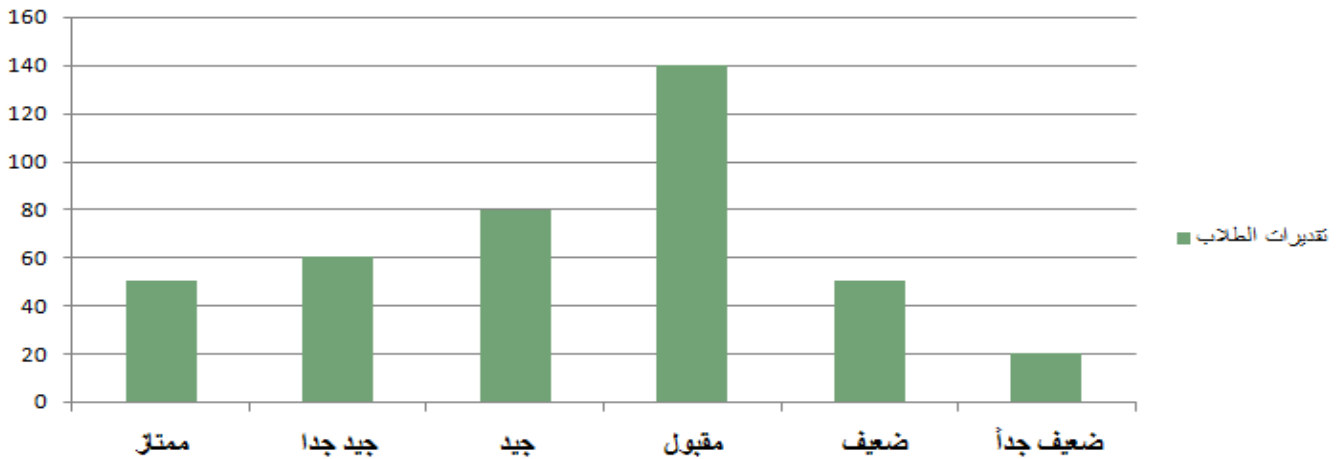
أ- البيانات الكمية المنفصلة

ب- البيانات الكمية المتصلة

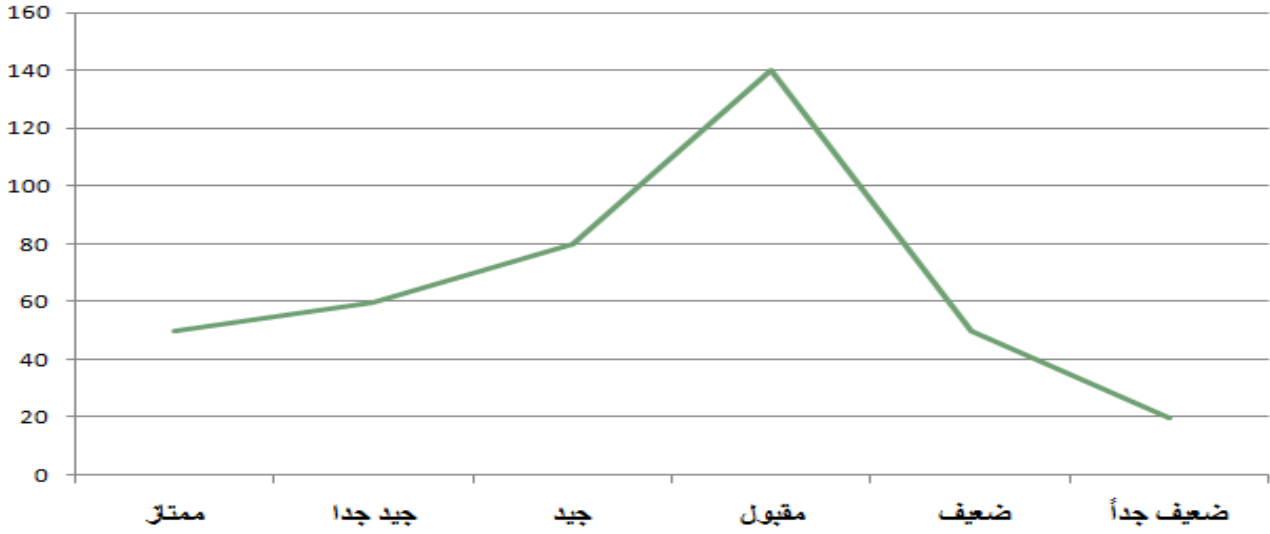
تنظيم وعرض البيانات :-**1. طريقة الجدول :-**

مثال : عدد الطلاب الحاصلين على تقدير معين في مقرر الاحصاء في الادارة :-

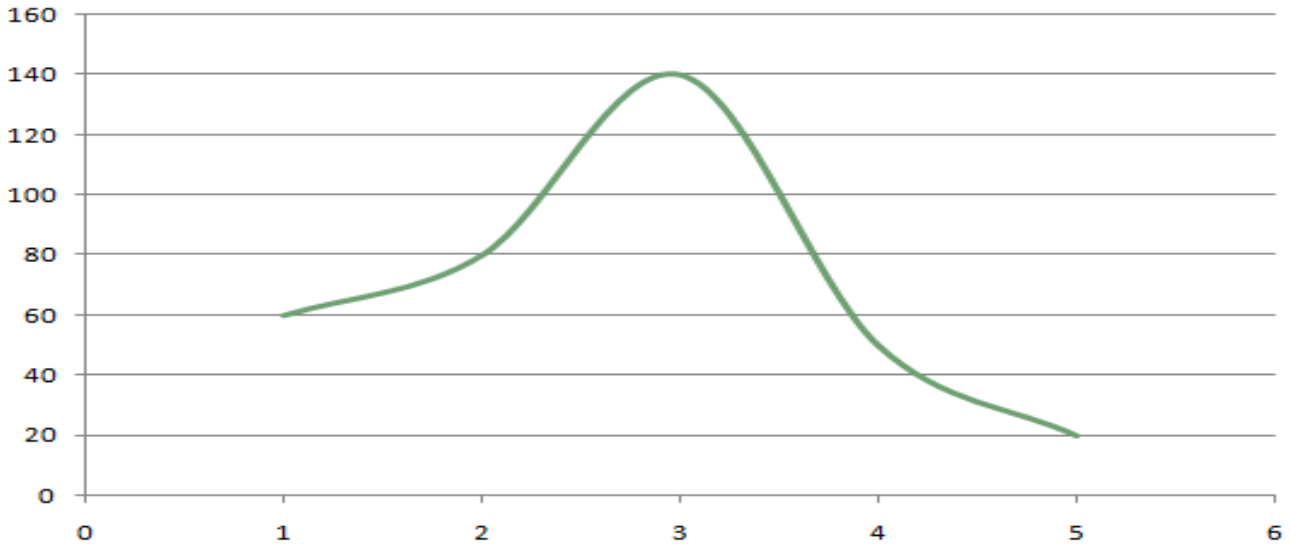
التقدير	عدد الطلاب
ممتاز	50
جيد جدا	60
جيد	80
مقبول	140
ضعيف	50
ضعيف جداً	20
المجموع	400

2. طريقة الأعمدة أو المستطيلات :-**تقديرات الطلاب**

3- طريقة الخطوط المستقيمة :-



4- طريقة الخط المنحني :-



المقاييس الإحصائية الوصفية

- مقاييس النزعة المركزية.
- مقاييس التشتت.
- معاملات الالتواء.
- وغيرها.....

2- مقاييس النزعة المركزية:-

القيم التي تقترب منها أو تتركز حولها أو تتوزع بالقرب منها معظم البيانات

1- الوسط الحسابي .

2- الوسيط .

3- المنوال .

أولاً : الوسط الحسابي (المتوسط) :-**أ- البيانات غير المبوبة :-**

إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_N تمثل بيانات عينة من المجتمع
الوسط الحسابي يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

مثال :-

البيانات التالية تمثل درجات أحد الطلاب في الفصل الدراسي الاول:-
8 , 5 , 7 , 6 , 10 , 5 , 7 , 11

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطالب ؟

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \\ &= \frac{8+5+7+6+10+5+7+11}{8} = 6.25 \text{ درجة} \end{aligned}$$

ب - البيانات المبوبة :-

تأخذ البيانات المبوبة في العادة الشكل التالي :-

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	fx
0 – 10	8	5	40
10 – 20	10	15	150
المجموع	$\sum f$		$\sum xf$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \text{المتوسط}$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئات الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب .

• نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى - الحد الأدنى للفئة الأولى

$$\text{طول الفئة} = 10 - 0 = 10$$

• نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{10 + 0}{2} = 5$$

مراكز الفئات الأخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الأولى

الحل :-

فئات الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
المجموع	$\Sigma f =$		$\Sigma x_i f_i =$

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
0 - 10	20	5	100
10 - 20	50	15	750
20 - 30	90	25	2250
30 - 40	60	35	2100
40 - 50	30	45	1350
المجموع	$\sum f=250$		$\sum x_i f_i= 6550$

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6550}{250} = 26.2 \text{ درجة}$$

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالريال في مانتين محل بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحلات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب متوسط الأجر الأسبوعي للعامل .

• نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى - الحد الأدنى للفئة الأولى
 طول الفئة = $15 - 5 = 10$

• نوجد مركز الفئة الأولى
 $x_1 = \frac{15 + 5}{2} = 10$

مراكز الفئات الأخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الأولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
5 -	30	10	300
15 -	20	20	400
25 -	60	30	1800
35 -	50	40	2000
45 - 55	40	50	2000
المجموع	$\sum f=200$		$\sum x_i f_i= 6500$

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6500}{200} = 32.5 \text{ ريال}$$

2- الوسيط

هو القيمة العددية التي تقل عنها نصف البيانات (50%) ويزيد عنها النصف الآخر. ويعرف كذلك بأنه مقياس الموقع لأن قيمته تعتمد على موقعه في البيانات.

طريقة حسابه (في حالة البيانات غير المبوبة)

أ- الوسيط من البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n تمثل بيانات عينة من المجتمع فإن الوسيط يحسب كالتالي:

١. نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.

٢. نوجد موقع الوسيط $\frac{n+1}{2}$.

٣. إذا كان n عدد فردي فإن الناتج يكون عدد صحيح و بالتالي الوسيط هو $\frac{x_{n+1}}{2}$.

٤. إذا كان n عدد زوجي فإن الناتج يكون عدد غير صحيح و بالتالي الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين يقع بينهما العنصر $\frac{x_{n+1}}{2}$.

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

20 , 40 , 10 , 60 , 50

الحل :

١- ترتيب البيانات تصاعدياً :

10 , 20 , 40 , 50 , 60

٢- ترتيب الوسيط $= \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

٣- الوسيط هو القيمة الثالثة :- الوسيط = ٤٠

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

20 , 40 , 10 , 60 , 50 , 80

الحل :

١- ترتيب البيانات تصاعدياً :

10 , 20 , 40 , 50 , 60 , 80

٢- ترتيب الوسيط = $\frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$

٣- ترتيب الوسيط هو رقم كسري إذاً الوسيط هو متوسط القيمتين التي موقعهما ٣ و ٤

الوسيط = $\frac{40+50}{2} = 45$

ب- الوسيط من البيانات المبوبة :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

٢- ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum f}{2}$

٣- الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطة + $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{الترتيب السابق}}{\text{الترتيب اللاحق} - \text{الترتيب السابق}} \times \text{طول الفئة الوسيطة}$ **مثال :-**

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالجنية في مائتين معرض تجاري بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

1- الجدول التمرين :-

فئات الدرجات	f
5 -	30
15 -	20
25 -	60
35 -	50
45 - 55	40
المجموع	200

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 5	0
أقل 15	30
أقل 25	50
أقل 35	110
أقل 45	160
أقل 55	200

٢- ترتيب الوسيط :-

$$100 = \frac{200}{2} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$$

البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع

٣- الوسيط =

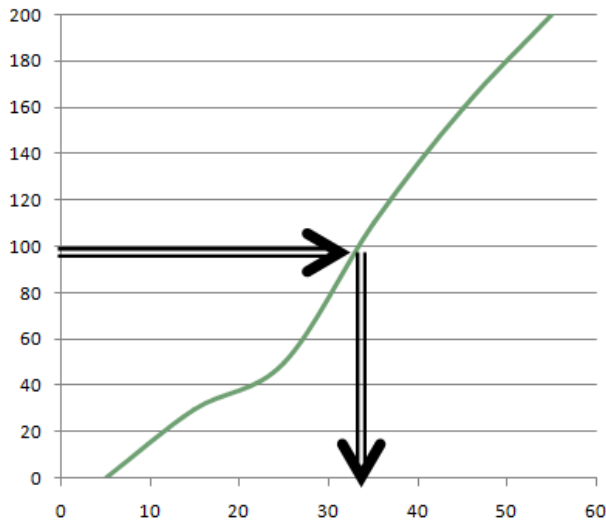
$$= 25 + \frac{100 - 50}{110 - 50} \times 10 = 33.33 \text{ ريال}$$

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع	ترتيب الوسيط
أقل 5	0	
أقل 15	30	
أقل 25	50	
أقل 35	110	
أقل 45	160	
أقل 55	200	

الوسيط من الرسم :-

2- المنحنى التكراري المتجمع الصاعد



1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 5	0
أقل 15	30
أقل 25	50
أقل 35	110
أقل 45	160
أقل 55	200

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئات الدرجات	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 0	0
أقل 10	20
أقل 20	70
أقل 30	160
أقل 40	220
أقل 50	250

فئات الدرجات	f
0 – 10	20
10 – 20	50
20 – 30	90
30 – 40	60
40 – 50	30
المجموع	250

2- ترتيب الوسيط :-

$$\text{مجموع التكرارات} = \frac{250}{2} = 125$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

3- الوسيط =

$$= 20 + \frac{125 - 70}{160 - 70} \times 10 = \text{درجة } 26.11$$

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 0	0
أقل 10	20
أقل 20	70
أقل 30	160
أقل 40	220
أقل 50	250

ترتيب الوسيط

تمرين الواجب

مثال :-

الجدول التالي يبين درجات تحديد مستوى 30 طالب في مقرر الفقه الإسلامي :-

فئات الدرجات	4 – 20	20 – 36	36 – 52	52 – 68	68 – 84	84 - 100	المجموع
عدد الطلاب	3	2	6	10	7	2	30

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .