

أسم المقرر :الاحصاء في الادارة
استاذ المقرر:د/ أحمد فرحان



المحاضرة (١)

المجموعات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء آخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C ,

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b , c ,

تابع تعريف المجموعة :-

يستخدم الرمز $\in$ "ينتمي إلى" ليعين عناصر المجموعة
فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A
فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة
 $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا
نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A و يكتب على
الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر) :-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسيّ المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " ، :-

مثال :-

$$A = \{ ٢, ٠, ١, ٤ \}$$

$$B = \{ a, b, c, d \}$$

$$C = \{ ١, ٢, ٣, \dots \}$$

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل ١ ٢ ٣ ٤ وهكذا)

$$D = \{ ١, ٢, ٣, \dots, ١٠٠ \}$$

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من ١ إلى ١٠٠ و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

$$A = \{ x : x \text{ عدد زوجي} \}$$

$$B = \{ x : x \text{ طالب بمقرر الاحصاء في الادارة} \}$$

$$C = \{ x : x \text{ طالب بنظام التعليم عن بعد} \}$$

$$D = \{ x : x \text{ عدد صحيح } -3 \leq x \leq 1 \}$$

$$X = \{ x : x \text{ عدد صحيح } 0 \leq x \leq 12 \}$$

أنواع المجموعات:

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز Φ (فاي) أو $\{ \}$.

أمثلة :-

$$A = \{ x : x \text{ عدد طبيعي زوجي و فردي} \}$$

$$B = \{ x : x \text{ دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية} \}$$

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

$$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$$

$$B = \{ 1 , 2 , 3 , \dots , 100 \}$$

$$C = \{ x , y , s , t , u \}$$

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

$$A = \{ x : x \text{ عدد طبيعي فردي} \}$$

$$B = \{ 10 , 20 , 30 , \dots \}$$

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$$A \subseteq B , B \subseteq A \quad \gg \gg \gg \gg \gg \quad A = B$$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

$$1- A = \{1, 5, 7, 9\} , B = \{9, 7, 5, 1\}$$

$$2- A = \{2, 5, 9\} , B = \{a, s, d\}$$

الحل

$$1 - A = B$$

$$2 - A \equiv B$$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و $B(A \cup B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما.

مثال :-

إذا كان $A = \{1, 2, 3, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ أوجد $(A \cup B)$ ؟

الحل

$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B ($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

$$\text{إذا كان } A = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \text{ و } B = \{0, 2, 4, 6\} \text{ أوجد } A \cap B$$

الحل

$$(A \cap B) = \{0, 2\}$$

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\bar{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

$$\text{إذا كان } U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ و } A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ أوجد}$$

الحل

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

الفرق :-

إذا كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وليست في B .

مثال :-

$$\text{إذا كانت } A = \{1, 2, 3, x, y\} \text{ و } B = \{3, 4, 5, x, w\} \text{ أوجد } A-B$$

$$\text{الحل: } A-B = \{1, 2, y\}$$

$$1- A \cup B$$

$$2- A \cap B$$

$$3- B - A$$

$$4- \bar{A}$$

$$5- \bar{B}$$

$$6- \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$7- \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$8- \bar{A} \cup A$$

$$9- \bar{A} \cap A$$

مثال :-

إذا كانت

$$A = \{1, 2, 3, x, y\} \text{ و}$$

$$B = \{3, 4, 5, x, w\}$$

و المجموعة الكلية

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, w, x, y, z\}$$

فأوجد :-

- 1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
- 2- $A \cap B = \{3, x\}$
- 3- $B - A = \{4, 5, w\}$
- 4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
- 5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
- 6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
- 7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
- 8- $\overline{A} \cup A = U$
- 9- $\overline{A} \cap A = \{ \}$

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ، B بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x, y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت $A = \{-2, 1\}$ و $B = \{-3, 1, 4\}$

فأوجد $A \times B$ و $B \times A$

الحل

$$A \times B = \{(-2, -3), (-2, 1), (-2, 4), (1, -3), (1, 1), (1, 4)\}$$

$$B \times A = \{(-3, -2), (-3, 1), (1, -2), (1, 1), (4, -2), (4, 1)\}$$

مثال :-

أنشئ $A \times B$ و $B \times A$ ، علماً بأن :-

$$B = \{w, x, y\} \text{ و } A = \{1, 2\}$$

الحل

$$A \times B = \{(1, w), (1, x), (1, y), (2, w), (2, x), (2, y)\}$$

$$B \times A = \{(w, 1), (w, 2), (x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$$

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1 = x_2)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الأول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني ، $(y_1 = y_2)$

مثال :-

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x+1, y - \frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$

الحل

$$x+1 = 4 \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg x = 4-1 = 3$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية $\emptyset$ و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز $P(S)$.

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a, b, c\}$

الحل

$$P(s) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \emptyset \}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فإن عدد عناصر $P(S)$ يساوي 2^n .

تمرين :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a, b, c\}$

$$P(S) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \emptyset \}$$

$$2^3 = 8$$

تمارين :

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

- (a) $A = \{x : x \text{ عدد سالب و موجب}\}$
- (b) $B = \{3, 6, 9, 12\}$
- (c) $C = \{x : x \text{ دولة أوروبية تقع في شبه الجزيرة العربية}\}$
- (d) $D = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$
- (e) $E = \{100, 200, 300, \dots\}$
- (f) $F = \{w, e, r, t\}$

٢- إذا كانت $A = \{3, 5, 7\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ فهل
يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{5, 10, 15, 20\}$, $B = \{15, 10, 5, 20\}$

2- $A = \{20, 50, 70\}$, $B = \{k, d, u\}$

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\bar{A}$

5- $\bar{B}$

6- $\bar{A} \cup \bar{B}$

7- $\bar{A} \cap \bar{B}$

8- $\bar{A} \cup A$

9- $\bar{A} \cap A$

4- إذا كانت

$A = \{8, 10, 12, r, m\}$ و

$B = \{4, 6, 10, o, r\}$

المجموعة الكلية

$U = \{4, 6, 8, 10, 12, o, r, m, p\}$

ثم أوجد :-

٥- إذا كانت $A = \{-5, 7\}$ و $B = \{-6, 4, 9\}$

فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة

$(x+1, y-10) = (2x, 15)$ ؟

٧- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{٢, ٥, ٨\}$ ؟

٨- إذا احتوت المجموعة S على ٥ من العناصر ، فأوجد عدد عناصر $P(S)$ ؟

المحاضرة (٢)

الدوال

الدالة:-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات، وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو (تتبعين بواسطة) كمية أخرى.

ملاحظة:-

إذا كانت F دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى.

حتى تكون F دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة

- واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور.

- مثال :

- إذا $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 8, 12\}$
- و $f_1 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 12)\}$
- $F_2 = \{(1, 4), (2, 8)\}$
- $F_3 = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (3, 12)\}$
- فهل f_1, f_2, f_3 دوال من A إلى B ؟

إذا $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 8, 12\}$ هل $f_1 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 8, 12\}$ فهل $f_2 = \{(1, 4), (2, 8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 8, 12\}$ فهل $f_3 = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (3, 12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل الدالة

- 1- $R = \{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (9, 9)\}$
- 2- $R = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
- 3- $R = \{(-4, 0), (-4, 4), (2, 3), (1, 9)\}$
- 4- $R = \{(-3, 1), (-1, 1), (0, 1), (4, 1)\}$
- 5- $R = \{(0, 7), (1, 5), (1, 2), (3, -4)\}$
- 6- $R = \{(-1, 2), (2, 2), (3, 5), (6, 1)\}$

$$1- R = \{(1,1) , (2,2) , (4,4) , (9,9)\}$$

$$2- R = \{(3,0) , (3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) \}$$

$$3- R = \{(-4,0) , (-4,4) , (2,3) , (1,9) \}$$

$$4- R = \{(-3,1) , (-1,1) , (0,1) , (4,1)\}$$

$$5- R = \{(0,7) , (1,5) , (1,2) , (3,-4)\}$$

$$6- R = \{(-1,2) , (2,2) , (3,5) , (6,1)\}$$

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- $f(2)$

2- $f(-1)$

3- $f(a)$

4- $f(x+1)$

مثال :

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ فأوجد :-

1- $f(-3)$

2- $f(1/2)$

3- $f(a)$

تمارين:-

١- للدالة $f(x) = 2x^2 - x - 5$ أحسب $f(t)$ و $f(-5)$.

٢- للدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ أحسب $f(2) + f(-1) + f(3)$.

٣- للدالة $f(x) = x + 4$ أحسب $2f(4) + 3f(-1)$.

٤- للدالة $f(x) = x^2 - 1$ أحسب $f(3) - f(-2)$.

الدوال الحقيقية :-

دالة كثيرة الحدود :

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الأعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) .

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$$

$$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى بالدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة، وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

إذا كانت $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = x^2 + 1$ مثال :

فأوجد:

$$\begin{aligned} 1- (f + g)(x) &= f(x) + f(g) \\ &= 3x + 5 + x^2 + 1 \\ &= x^2 + 3x + 6 \end{aligned}$$

مثال إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$\begin{aligned} 2-(f-g)(x) &= \\ &= f(x) - g(x) \\ &= (3x+5) - (x^2+1) \\ &= 3x+5 -x^2-1 \\ &= -x^2 + 3x +4 \end{aligned}$$

مثال إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$\begin{aligned} 3-(f \times g)(x) &= \\ &= f(x) \times g(x) \\ &= (3x+5) \times (x^2+1) \\ &= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\ &= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x \times 5x$ و $g(x) = x^2 + 1$

فأوجد :

$$4- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

أيجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرسم له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_2 \neq x_1$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-3)}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

إذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$
$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$
$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ إذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال :

هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$
$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

إذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m و يمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5, -3)$ و ميله يساوي -2 .

الحل:-

$$m = -2 \quad , \quad x_1 = 5 \quad , \quad y_1 = -3$$
$$y - (-3) = -2(x - 5)$$
$$y + 3 = -2(x - 5)$$
$$y = -2x + 7$$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$$f_1 = \{(5,2), (9,3), (13,4)\}$$

$$f_2 = \{(5,2), (9,3), (13,6)\} \text{ و}$$

$$f_3 = \{(5,6), (9,2), (13,4), (9,6)\} \text{ و}$$

فهل $f_1 f_2 f_3$ دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

$$1- R = \{(1,4), (2,4), (3,3), (4,5)\}$$

$$2- R = \{(2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (5,2)\}$$

$$3- R = \{(-1,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$$

٣- للدالة $f(x) = 2x^3 + 10x^2 - 15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤- إذا كانت $f(x)=6x+3$ و $g(x)=10$ فأوجد:

$$(f+g)(x), (f-g)(x), (f \times g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6, \frac{-3}{4})$ و $B(4, \frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ و $B(7, \frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$-5x + 3y - 8 = 0$$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$12x = -9y + 30$$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y - 4 = 0$ و $4y = 16x + 4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y - 12x - 6 = 0$ ، $8y + 2x - 30 = 0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(9, -2)$ و ميله يساوي 5- ؟

المحاضرة (٣)

النهايات والاتصال

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدالة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عندما تؤول إلى ٢ وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي ٥ .

جبر النهايات :

١- إذا كانت $f(x) = c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢- إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\lim_{x \rightarrow 5} 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 5} 30 = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times 2) = 1 - 4 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

$$\begin{aligned} & ١- \lim_{x \rightarrow 2} [h(x) - f(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= 10.5 - 5 = 5.5 \end{aligned}$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$\begin{aligned} & ٢- \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \times h(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \\ &= -8 \times 10.5 = -84 \end{aligned}$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$\begin{aligned} & ٣- \lim_{x \rightarrow 2} 8 f(x) \\ &= 8 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 \times 5 = 40 \end{aligned}$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$\begin{aligned} & ٤- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} [3x - 1]^6 &= [\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1]^6 \\ &= [3 \times 1 - 1]^6 = [3 - 1]^6 = [2]^6 = 64\end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}1- \lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 + 5x^2 - 7) \\ &= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7 \\ &= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37\end{aligned}$$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}2- \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 7}{x - 5} \\ &= \frac{3 \times 3^2 + 7}{3 - 5} = \frac{3 \times 9 + 7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17\end{aligned}$$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}3- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{5x + 3} \\ &= \frac{2 \times 2 - 1}{5 \times 2 + 3} = \frac{4 - 1}{10 + 3} = \frac{3}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4- \lim_{x \rightarrow 2} e^x \\ &= e^2\end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned}5- \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 + 2x + 1} \\ &= e^{1^2 + 2 \times 1 + 1} = e^{1 + 2 + 1} = e^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6- \lim_{x \rightarrow 2} \log(3x^2 + 5) &= \log(3 \times 2^2 + 5) \\ &= \log(3 \times 4 + 5) \\ &= \log(12 + 5) = \log(17)\end{aligned}$$



أمثلة

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$٧- \lim_{x \rightarrow 3} \ln(2x - 5) = \ln(2 \times 3 - 5) = \ln(6 - 5) = \ln(1) = 0$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} ٨- \lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 + 4x - 2)^3 &= ((3 \times 1^3) + 4 \times 1 - 2)^3 \\ &= (3 + 4 - 2)^3 = (5)^3 = 125 \end{aligned}$$

$$٩- \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9} = ٢,٠٨$$

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & , x < ٥ \\ 15x - 2 & , x > ٥ \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلا بد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولى (x تؤول إلى ٣ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < ١ \\ 7x - 2 & , x > ١ \end{cases}$$

فأوجد :-

$$١- \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)}$$

$$= 7 \times 3 - 2 = 21 - 2 = 19$$

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < ١ \\ 7x - 2 & , x > ١ \end{cases} \text{ إذا كانت}$$

فأوجد :-

٢- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 3 \times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$٣- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

الحل

$$٣- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$$(\text{النهاية من اليمين}) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$$

$$(\text{النهاية من اليسار}) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ هذه النهاية غير موجودة}$$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , x < 5 \\ 6x - 10 & , x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \text{ (النهاية من اليمين)}$$

$$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \text{ (النهاية من اليسار)} =$$

$$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

- ١- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R .
 - ٢- لابد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .
 - ٣- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .
- لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة (٤)

الجزء الاول : تابع الاتصال

الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاتصال :-

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

$$f(5) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 6x = 6 \times 5 = 30$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذن فهذه الدالة غير متصلة عند $x=5$.

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

$$f(10) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 12x^2 = 12 \times 10^2 = 1200$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذن فهذه الدالة غير متصلة عند $x=10$.

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

$$f(8) = 20 \cdot 8^2 = 20 \times 64 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 1160 + 10x = 1160 + 10 \times 8 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 20 \cdot 8^2 = 20 \times 64 = 1280$$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند $x=8$.

تمارين الواجب :-

تمرين ١ :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x \rightarrow 0} 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (10 - 2x + x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 12} (3x + 6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (9x - 2)$$

تمرين ٢ :-

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 20$ و $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -15$ و $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 18.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

$$١- \lim_{x \rightarrow 5} [h(x) + f(x)]$$

$$٢- \lim_{x \rightarrow 5} [h(x) - g(x)]$$

$$٣- \lim_{x \rightarrow 5} [g(x) \times f(x)]$$

$$٤- \lim_{x \rightarrow 5} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right]$$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

$$١- \lim_{x \rightarrow 1} [5x - 2]^2$$

$$٢- \lim_{x \rightarrow 2} [10 - 2x]^2$$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$١- \lim_{x \rightarrow 5} (2x^3 - 2x^2 - 50)$$

$$٢- \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x)$$

$$٣- \lim_{x \rightarrow 1} \log(10x^4 + 15)$$

$$٤- \lim_{x \rightarrow 2} e^{2x^2 + 3x + 2}$$

$$٥- \lim_{x \rightarrow 3} \ln(20x^2 - 5x + 10)$$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , x < 2 \\ 5x - 2 & , x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$١- \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$٢- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 1$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلاً:

إذا كان الربح مثلاً يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل :

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الآخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y = 5x + 9$

المطلوب :- المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx} = ?$

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يؤثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

$$1 - y = x^4 \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3$$

$$٢- y = ١٥ x^٤ \quad \frac{dy}{dx} = ٦٠ x^٣$$

$$٣- y = ١٠ x \frac{dy}{dx} = ١٠$$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$١- y = ٥ x^٤ + ٦ x^٣ + ٨ x^٢ + ٣ x$$

$$\frac{dy}{dx} = ٢٠ x^٣ + ١٨ x^٢ + ١٦ x + ٣$$

$$٢- y = ٢٠ x^٥ + ١٠ x^٣ - ٥ x^٢ + ١٥ x + ٣٠$$

$$\frac{dy}{dx} = ١٠٠ x^٤ + ٣٠ x^٢ - ١٠ x + ١٥$$

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$١- y = ٥ x^٤ + ٦ x^٣ + ٨ x^٢ + ٣ x$$

$$\frac{dy}{dx} = ٢٠ x^٣ + ١٨ x^٢ + ١٦ x + ٣$$

$$٢- y = ٢٠ x^٥ + ١٠ x^٣ - ٥ x^٢ + ١٥ x + ٣٠$$

$$\frac{dy}{dx} = ١٠٠ x^٤ + ٣٠ x^٢ - ١٠ x + ١٥$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الاولى

مثال :-

$$١- y = (٣ x + ١) (x^٢ - ٧ x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (٣ x + ١) (٢x - ٧) + (x^٢ - ٧ x) (٣)$$

$$٢- y = (١٠ x^٢ - ١٢) (٥ x^٢ + ٢ x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (١٠ x^٢ - ١٢) (١٠ x + ٢) + (٣٠ x^٢) (٥ x^٢ + ٢ x)$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4) - (x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x - 6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

$$1 - y = (10x^2 + 20)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(10x^2 + 20)^2(20x)$$

$$2 - y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 10x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 40x^3 + 36x^2 + 40x - 5 \quad (\text{المشتقة الاولى})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 120x^2 + 72x + 40 \quad (\text{المشتقة الثانية})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 240x + 72$$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١- المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة $= 1$ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهاية المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}} \times$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠ وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}} \times$$

$$م = (-6) \times \frac{10}{100} = -0,6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن.

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 200 - 10x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠ وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -10)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}} \times \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}$$

$$م = (-10) \times \frac{20}{100} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة.

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 20 - 10x)$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠ وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D = 20 - 10x)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}} \times \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}$$

$$م = (-10) \times \frac{100}{1000} = -1,0$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن.

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي $(D = 20 + 1,5x)$ أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبة هي ٦٠٠ وحدة عند سعر ٢٠٠ ريال؟

المحاضرة (٥)

تابع التفاضل و تطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٢- الاستهلاك والادخار

١- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

٢- الميل الحدي للادخار = المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = ١

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$$K' = 0.6 - 0.04x \quad 1 = 0.6 - 0.04 = 0.56$$

٣- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$$= 1 - \text{الميل الحدي للاستهلاك} = 1 - 0.56 = 0.44$$

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 18 + 0.8x - 0.15x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.8 - 0.3x$$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$$K' = 0.8 - 0.3x \quad 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

٣- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال = ١ - الميل الحدي للاستهلاك = ١ - 0.5 = 0.5

٣- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

١ - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

٢ - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

٣ - تحديد نوع النهاية (**عظمى-صغرى**) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة .: يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = - ٠,٤x^2 + ٣٠٠x - ٢٠٠٠$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمى أم صغرى ؟

الحل

١- المشتقة الأولى للدالة :-

$$P' = - ٠,٨x + ٣٠٠$$

٢- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = - ٠,٨$$

٣- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمى

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = ٥٠٠ - ٠,٢x + ٠,١x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمى أم صغرى ؟

الحل

١- المشتقة الأولى للدالة :-

$$P' = - ٠,٢ + ٠,٢x$$

٢- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = ٠,٢$$

٣- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

٤- الربح الحدي

١- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

٢- الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

٣- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

٤- التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية .

٥- الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي .

٦- الربح الحدي = الإيراد الحدي - التكلفة الحدية .

مثال (١) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي

$$R' = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=10$

$$R' = 36x^2 + 40x - 10 = 36 \times 10^2 + 40 \times 10 - 10 = 3990$$

مثال (٢) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$\text{Selling price (سعر وحدة البيع)} = 4x^2 + 6x + 5$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة ؟

الحل

١- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$R = (\text{دالة سعر بيع الوحدة} \times x)$$

$$x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x \times R = (10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x)$$

٢- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً $x=5$

$$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12 \times 5^2 + 12 \times 5 + 5 = 288.5 \text{ r.s}$$

مثال (٣) :-

في إحدى شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الوحدة

$$R = (\text{دالة سعر بيع الوحدة } x)$$

$$x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20 \times R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20)$$

٢- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً $x=5$

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

$$= 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20$$

٢٠٥ ريال

مثال (٤) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 - 12x + 15$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = 10x^2 - 12x + 15 \text{ (التكاليف الكلية)}$$

$$C' = 20x - 12 \text{ (التكاليف الحدية)}$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=10$

$$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188 \text{ r.s.}$$

مثال (٥) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3 \text{ (التكاليف الكلية)}$$

$$C' = 3 \times (5x^2 - 3x + 15)^2 \times (10x - 3)$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=20$

$$\begin{aligned} C' &= 3 \times (5x^2 - 3x + 15)^2 \times (10x - 3) \\ &= 3 \times (5 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15)^2 \times (10 \times 20 - 3) \\ &= 3 \times (5 \times 400 - 60 + 15)^2 \times (200 - 3) \\ &= 3 \times (1955) \times (197) = 1155405 \text{ r.s.} \end{aligned}$$

مثال (٦) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 10) - (10x^2 + 9x - 17) \\ = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

$$P' = 6x^2 - 21x + 1$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=30$

$$P' = 6x^2 - 21x + 1 = 6 \times 30^2 - 21 \times 30 + 1 = 4771 \text{ r.s}$$

مثال (٧) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20) \\ = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٥ وحدة إذاً $x=25$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5 = 36 \times 25^2 + 30 \times 25 - 5 = 23245 \text{ r.s}$$

تمرين شامل (١)

الربح الحدي

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الإيرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = 30x^4 + 12x^3 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

المطلوب :-

١- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة .

٣- دالة الربح الكلي .

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

الحل

١- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$$R = 30x^4 + 12x^3 - 6x + 15$$

$$R' = 120x^3 + 36x^2 - 6$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=10$

$$R' = 120 \times 10^3 + 36 \times 10^2 - 6 = 122394 \text{ r.s}$$

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة :-

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$C' = 39x^2 - 10x + 3$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=12$

$$C' = 39 \times 12^2 - 10 \times 12 + 3 = 5499 \text{ r.s}$$

٣- دالة الربح الكلي :-

$$R = 30x^4 + 12x^3 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 30$$

$$P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=12$

$$P' = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 34 \times 12 - 9 =$$

تمرين شامل (٢)

الربح الحدي

لإعتبار المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 3x^2 + 25x - 18$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

المطلوب :-

- ١- دالة الايراد الكلي .
- ٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .
- ٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
- ٤- دالة الربح الكلي .
- ٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$R = (\text{دالة سعر البيع الوحدة}) \times x$$

$$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$$

$$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R' = 9x^2 + 50x - 18$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً $x=5$

$$R' = 9 \times 5^2 + 50 \times 5^2 - 18 = 1457 \text{ r.s}$$

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R' = 9x^2 + 50x - 18$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً $x=5$

$$R' = 9 \times 5^2 + 50 \times 5^2 - 18 = 1457 \text{ r.s}$$

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$C' = 20x + 2$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=20$

$$C' = 20 \times 20 + 2 = 402 \text{ r.s}$$

٤- دالة الربح الكلي :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

$$P' = 9x^2 + 30x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=10$

$$P' = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180 \text{ r.s}$$

تمارين واجب :-

١- إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 0,3x - 0,01x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للإدخار.

٢- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = 3x^2 + 5x + 100$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

٣- إذا علمت أن :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 8x^2 + 10x + 12$$

$$C = 4x^2 + 3x - 10$$

المطلوب :-

- ١- دالة الإيراد الكلي .
- ٢- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .
- ٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة .
- ٤- دالة الربح الكلي .
- ٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٢ وحدات .

المحاضرة (٦)

التكامل و تطبيقاته التجارية

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ، حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز $\int$ و هو رمز التكامل و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل $f(x)$ و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

١- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الأس واحد وأقسم على الأس الجديد .

$$\int x^n . dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k . dx = kx + c$$

$$\int . dx = x + c$$

مثال :-

$$١- \int x^3 . dx = \frac{1}{4} x^4 + c$$

$$٢- \int x^5 . dx = \frac{1}{6} x^6 + c$$

$$٣- \int 6 . dx = 6x + c$$

$$٤- \int 3x^4 . dx = \frac{3}{5} x^5 + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 . dx$$

الحل

$$y = \frac{1}{6} x^6 + \frac{4}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 3x + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6} x^6 + x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 6x + 8x + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4x^3 - 30x^2 + 20x + 3 \cdot dx$$

الحل

$$y = \frac{4}{4} x^4 - \frac{30}{3} x^3 + \frac{20}{2} x^2 + 3x + c$$

$$y = x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

٢- تكامل e^x :-

$$\int e^x \cdot dx = e^x + c$$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9x^2 - 10x + 15 \cdot dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة $(1, 4)$ ؟

الحل

$$y = \frac{9}{3} x^3 - \frac{10}{2} x^2 + 15x + c$$

$$y = 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$$

حيث أن قيمة $x = 1$ و قيمة $y = 4$ فإن :-

$$4 = 3(1)^3 - 5(1)^2 + 15(1) + c$$

$$4 = 3 \times 1 - 5 \times 1 + 15 + c$$

$$4 = 13 + c$$

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{4} x^2 - 7 \cdot dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٣، ٢)؟

الحل

$$y = \frac{1}{3 \times 4} x^4 - \frac{1}{4 \times 3} x^3 - 7x + c$$

$$y = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{12} x^3 - 7x + c$$

حيث أن قيمة x = ٢ و قيمة y = ٣ فإن :-

$$3 = \frac{1}{12} (2)^4 - \frac{1}{12} (2)^3 - 7 \times 2 + c$$

$$3 = \frac{16}{12} - \frac{8}{12} - 14 + c$$

$$C = 16,333$$

التطبيقات التجارية للتكامل

١- الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي .

٢- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

٣- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

٤- الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R' = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الإيراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الإيراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3} x^3 + \frac{6}{2} x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

٢- حجم الإيراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات أي أن $x=5$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الإيراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

$$\text{الإيراد الكلي} = 150 = (5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = \text{ريال}$$

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الحدية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن $x=10$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

$$\text{التكاليف الكلية} = 10000 = 30000 - 20000 + 400 - 400 = C \text{ ريال}$$

تمرين شامل (١)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

١- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$$

$$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة $x=20$ كما يلي :-

$$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$$

$$\text{ريال} = 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$$

وللوصول إلى حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=25$ كما يلي :-

$$C = 12 \times (25)^3 + 20 \times (25)^2 - 10 \times (25) = 199750 \text{ ريال}$$

٣- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي - التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$

$$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$$

$$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

حل آخر :-

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$$

$$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=10$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2 \times (10)^4 - 4 \times (10)^3 - 26 \times (10)^2 + 30 \times (10)$$

$$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700 \text{ r.s}$$

تمرين شامل (٢)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي لإحدى الشركات تأخذ الشكل التالي:-

$$R' = (2x+1)(5-3x^2)$$

وكانت دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = (3x+1)^2$$

المطلوب :-

١- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة .

١- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي

$$R' = (5 + 3x^2)(1 + x^2)$$

$$R' = 10x + 6x^3 + 5 + 3x^2$$

$$R' = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5 \text{ (الإيراد الحدي)}$$

وللوصول دالة الإيراد الكلي تمثل تكامل دالة الإيراد الحدي :-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right) x^4 + \left(\frac{3}{3}\right) x^3 + \left(\frac{10}{2}\right) x^2 + 5x$$

$$R = \left(\frac{6}{4}\right) x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x$$

وللوصول إلى حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات يتم التعويض عن $x=10$:-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right) (10)^4 + (10)^3 + (5)(10)^2 + 5(10) = 16500 \text{ r.s}$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية

$$C' = (1 + 6x + 9x^2)$$

$$(التكاليف الحدية) = 9x^2 + 6x + 1$$

$$C = 3x^3 + 3x^2 + x \text{ (التكاليف الكلية)}$$

وللوصول للحجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=20$:-

$$C = 3(20)^3 + 3(20)^2 + (20) = 25220 \text{ r.s}$$

٣- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الإيراد الحدي - التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$

$$= (6x^3 + 3x^2 + 10x + 5) - (9x^2 + 6x + 1)$$

$$= 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

حل آخر :-

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= \left(\left(\frac{6}{4} \right) x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x \right) - (3x^3 + 3x^2 + x)$$

$$= \left(\frac{6}{4} \right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = \left(\frac{6}{4} \right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=30$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = \left(\frac{6}{4} \right) \times (30)^4 - 2 \times (30)^3 + 2 \times (30)^2 + 4 \times (30) \\ = 1162920 \text{ r.s}$$

تمارين متنوعة :-

١- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار ٦٠% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

١- الميل الحدي للإدخار = ٠,٦٠ .

٢- الميل الحدي للإستهلاك = ١ - ٠,٦٠ = ٠,٤٠ .

٣- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$$k' = 0,40$$

$$K = 0,40x$$

٢- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار ٧٥% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

١- الميل الحدي للإدخار = ٠,٧٥ .

٢- الميل الحدي للإستهلاك = ١ - ٠,٧٥ = ٠,٢٥ .

٣- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$$k' = 0,25$$

$$K = 0,25x$$

المحاضرة (٧)

الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .
احتمال تحقيق الحدث A نشير له بالرمز $P(A)$ وحدود هذا الاحتمال هي :-

$$0 \leq A \leq 1$$

$$\text{احتمال تحقق حدث} = \frac{\text{الحدث تحقق حالات عدد } A}{\text{الكلية الحالات عدد}}$$

مثال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

٢٠ كرة بيضاء

٣٠ كرة حمراء

٥٠ كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

١. حمراء

٢. بيضاء

٣. سوداء

٤. حمراء أو سوداء

٥. حمراء أو سوداء أو بيضاء

الحل

$$١ - \text{احتمال أن تكون حمراء} = \frac{\text{حمراء الكرات عدد}}{\text{الكلية العدد}} = \frac{30}{100}$$

$$٢ - \text{احتمال أن تكون بيضاء} = \frac{\text{بيضاء الكرات عدد}}{\text{الكلية العدد}} = \frac{20}{100}$$

$$٣ - \text{احتمال أن تكون سوداء} = \frac{\text{سوداء الكرات عدد}}{\text{الكلية العدد}} = \frac{50}{100}$$

$$٤- \text{أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء} = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} = \frac{80}{100}$$

$$٥- \text{أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء} = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{20}{100} = \frac{100}{100} = ١$$

مثال :-

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي ١٠٠٠٠ طالب نجح منهم ٩٠٠٠ طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح ٨٠٠٠ طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

(١) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

(٢) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

(٣) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

(٤) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

(٥) حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .

(٦) حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .

(٧) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .

الحل

$$١- \text{حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة} = \frac{9000}{10000} = ٩٠\%$$

$$٢- \text{حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة} = \frac{1000}{10000} = ١٠\%$$

$$٣- \text{حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي} = \frac{8000}{10000} = ٨٠\%$$

$$٤- \text{حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي} = \frac{2000}{10000} = ٢٠\%$$

$$٥- \text{حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً} = \frac{8000}{10000} \times \frac{9000}{10000} = ٠,٧٢ = ٧٢\%$$

$$٦- \text{حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً} = \frac{2000}{10000} \times \frac{1000}{10000} = ٠,٠٢ = ٢\%$$

$$٧- \text{حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط} = \frac{2000}{10000} \times \frac{8000}{10000} + \frac{2000}{10000} \times \frac{9000}{10000}$$

$$= ٠,٢٦ = ٠,١ \times ٠,٨ + ٠,٢ \times ٠,٩$$

مثال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-

٦٠ طالب يدرسون محاسبة .

٣٠ طالب يدرسون تسويق .

١٠ طلاب يدرسون مالية .

إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

- (١) احتمال أن يكون تخصص محاسبة .
- (٢) احتمال أن يكون تخصص تسويق .
- (٣) احتمال أن يكون تخصص مالية .
- (٤) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .
- (٥) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .

الحل

- (١) احتمال أن يكون تخصص محاسبة = $\frac{60}{100}$
- (٢) احتمال أن يكون تخصص تسويق = $\frac{30}{100}$
- (٣) احتمال أن يكون تخصص مالية = $\frac{10}{100}$
- (٤) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق = $\frac{90}{100} = \frac{30}{100} + \frac{60}{100}$
- (٥) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية = $1 = \frac{10}{100} + \frac{30}{100} + \frac{60}{100}$

نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنين معاً ويسمى الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حيث أن :-

- P(A) هو احتمال تحقق الحدث A .
- P(B) هو احتمال تحقق الحدث B .
- P(A ∩ B) : التقاطع و يشير إلى احتمال تحقق الحدثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني) .
- P(A ∪ B) : الاتحاد ويشير إلى احتمال تحقق أحد الحدثين على الأقل (الحدث الاول أو الثاني)

مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد ٥٠ طالب نجح في المحاسبة ٣٠ طالب و نجح في الاقتصاد ٤٠ طالب فإذا علمت أن هناك ٢٥ طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فأحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الأقل ؟

الحل :-

$$١ - \text{نرمز إلى احتمال النجاح في المحاسبة بالرمز } P(A) = \frac{30}{50} = ٠,٦٠$$

٢- نرمز إلى احتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز $P(B) = \frac{40}{50} = 0,80$

٣- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى احتمال النجاح في المادة الاولى و احتمال النجاح في المادة الثانية وهو ما يعني التقاطع =

$$0,50 = \frac{25}{50} = P(A \cap B)$$

٤- المطلوب هو احتمال النجاح في مادة واحدة على الأقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد $= P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,60 + 0,80 - 0,50 = 0,90$$

مثال :-

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم اختيار عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ شخص وجد من بينهم ٥٠ شخص يتصفحوا جريدة الرياض و ٦٠ شخص يتصفحون جريدة المال و ٣٠ شخص يتصفحون الجريدتين معاً، فاحسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الأقل ؟

الحل

١- نرمز إلى احتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز $P(A) = \frac{50}{100} = 0,50$

٢- نرمز إلى احتمال تصفح جريدة المال بالرمز $P(B) = \frac{60}{100} = 0,60$

٣- احتمال تصفح الجريدتين معاً يشير إلى تصفح الجريدة الاولى والجريدة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$0,30 = \frac{30}{100} = P(A \cap B)$$

٤- المطلوب هو احتمال النجاح في مادة واحدة على الأقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد $= P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,50 + 0,60 - 0,30 = 0,80$$

أنواع الاحداث A و B :-

١- أحداث متنافية (متعارضة) : وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجذك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = 0$$

٢- أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الآخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال وفي هذه الحالة فإن احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

٣- أحداث غير مستقلة: وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الآخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن احتمال تحقق الحدثين معاً :-

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

مثال :-

إذا كان $[P(A) = 0,3, P(B) = 0,4, P(A \cap B) = 0,12]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة ؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ الشرط}$$

$$(1) \quad P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$$

$$(2) \quad P(A \cap B) = 0,12$$

$$(3) \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

(٤) إذا هذه الاحداث مستقلة .

مثال :-

إذا كان $[P(A) = 0,5, P(B) = 0,3, P(A \cap B) = 0,2]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ الشرط}$$

$$(1) \quad P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$$

$$(2) \quad P(A \cap B) = 0,2$$

$$(3) \quad P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

(٤) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

مثال

إذا علمت أن $P(A) = 0,2$ و $P(B) = 0,4$ وأن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

$$P(A \cap B) \quad (١)$$

$$P(A \cup B) \quad (٢)$$

$$P(\bar{A}) \quad (٣)$$

$$P(\bar{B}) \quad (٤)$$

الحل

١- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذا فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = ٠$$

٢- ومن ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ٠,٢ + ٠,٤ - ٠ = ٠,٦$$

٣- إحتمال $P(\bar{A})$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$$P(\bar{A}) = ١ - P(A)$$

$$= ١ - ٠,٢ = ٠,٨$$

$$P(\bar{B}) = ١ - P(B)$$

$$= ١ - ٠,٤ = ٠,٦$$

الاحتمال الشرطي :-

هو أحتمال تحقق حدث معين وليكن A و لكن بشرط حدوث الحدث B أولاً و نرمز له بالرمز $P(A | B)$ و كمثال على ذلك إذا تم تقدير إحتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض إحتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة ١ ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

لاحظ الحالات التالية :-

١- في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = ٠$$

٢- في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

٣- في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال :-

إذا كان :-

$$P(A) = ٠,٦ , P(B) = ٠,٨ , P(A \cap B) = ٠,٥$$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$$P(A \cup B) , P(A | B) , P(B | A) , P(\bar{A}) , P(\bar{B})$$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (١)$$

$$P(A) \times P(B) = ٠,٦ \times ٠,٨ = ٠,٤٨ \quad (٢)$$

$$P(A \cap B) = ٠,٥ \quad (٣)$$

إذا $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ هذه الاحداث غير مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ٠,٦ + ٠,٨ - ٠,٥ = ٠,٩ \quad (١)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} = ٠,٦٢٥ \quad (٢)$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = ٠,٨٣٣ \quad (٣)$$

$$P(\bar{A}) = ١ - P(A) = ١ - ٠,٦ = ٠,٤ \quad (٤)$$

$$P(\bar{B}) = ١ - P(B) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢ \quad (٥)$$

مثال :-

إذا كان :-

$$P(A) = ٠,٧ , P(B) = ٠,٤ , P(A \cap B) = ٠,٢٨$$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$$P(A \cup B) , P(A | B) , P(B | A) , P(\bar{A}) , P(\bar{B})$$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (١)$$

$$P(A) \times P(B) = ٠,٧ \times ٠,٤ = ٠,٢٨ \quad (٢)$$

$$P(A \cap B) = ٠,٢٨ \quad (٣)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (٤)$$

إذا هذه الاحداث مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ٠,٧ + ٠,٤ - ٠,٢٨ = ٠,٨٢ \quad (١)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} = ٠,٧ \quad (٢)$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = ٠,٤ \quad (٣)$$

$$P(\bar{A}) = ١ - P(A) = ١ - ٠,٧ = ٠,٣ \quad (٤)$$

$$P(\bar{B}) = ١ - P(B) = ١ - ٠,٤ = ٠,٦ \quad (٥)$$

المحاضرة (٨)

تابع نظرية الاحتمالات

مثال :-

في دراسة لتخصصات ٤٠٠ طالب وطالبة من خريجي جامعة الملك فيصل كانت النتائج كالتالي :-

التخصص	طالب B	طالبة C	المجموع
علمي S	١٢٠	٤٠	١٦٠
أدبي L	٩٦	١٤٤	٢٤٠
المجموع	٢١٦	١٨٤	٤٠٠

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب احتمال أن يكون الشخص طالب أو علمي ؟

$$P(B \cup S) = P(B) + P(S) - P(B \cap S)$$

$$= \frac{216}{400} + \frac{160}{400} - \frac{120}{400} = \frac{256}{400} = ٠,٦٤$$

حساب احتمال أن يكون الشخص طالبة و تخصص أدبي :-

$$P(C \cap L) = \frac{144}{400} = ٠,٣٦$$

إذا علمت أن الشخص المختار طالبة أحسب احتمال أن يكون تخصصها أدبي :-

$$P(L | C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{144}{400}}{\frac{184}{400}} = \frac{144}{184} = ٠,٧٨٢٦$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراه B	المجموع
ذكر C	١٢٠	١٦٠	٢٨٠
أنثى D	٨٠	٢٤٠	٣٢٠
المجموع	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠

حساب إحتمال أن يكون الشخص ذكر أو حاصل على ماجستير :-

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A)$$

$$= \frac{280}{600} + \frac{200}{600} - \frac{120}{600} = \frac{360}{600} = 0,6$$

حساب إحتمال أن يكون الشخص أنثى و حاصلة على ماجستير :-

$$P(D \cap A) = \frac{80}{600} = 0,1333$$

إذا علمت أن الشخص المختار حاصل على ماجستير أحسب احتمال أن يكون ذكر :-

$$P(C | A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{120}{600}}{\frac{200}{600}} = \frac{120}{200} = 0,6$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0,6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0,7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

١- إحتمال النجاح في المقررين معاً ؟

الحل

$$P(A) = 0,6 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)}$$

$$P(B) = 0,7 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)}$$

احتمال النجاح في المقررين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$

٢- إحتمال الرسوب في المقررين معاً ؟

الحل

$$P(A) = 0,6 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4 \text{ (احتمال الرسوب في الرياضيات)}$$

$$P(B) = 0,7 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3 \text{ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)}$$

$$P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

٣- احتمال نجاح الطالب في مقرر واحد فقط ؟

الحل

$$P(A) = 0,6 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4 \text{ (احتمال الرسوب في الرياضيات)}$$

$$P(B) = 0,7 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3 \text{ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)}$$

$$P = 0,6 \times 0,3 + 0,7 \times 0,4 = 0,18 + 0,28 = 0,46$$

٤- احتمال النجاح في مقرر واحد على الأقل ؟

الحل

$$P(A) = 0,6 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)}$$

$$P(B) = 0,7 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)}$$

$$P(A \cap B) = 0,42$$

احتمال النجاح في مقرر واحد على الأقل يقصد بذلك الاتحاد :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88$$

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

١- المتغيرات العشوائية المنفصلة

Discrete Random Variables

٢- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

١- المتغير العشوائي المنفصل :-

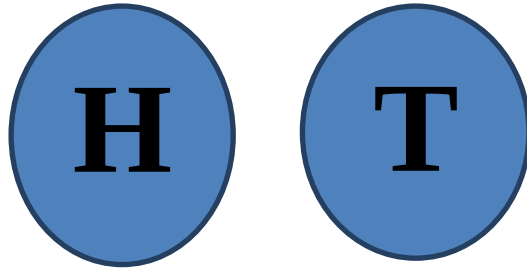
هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة (وبمعنى آخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي ٥، ٤، ٣، ٢، ١، لا يمكن أن يأخذ صورة كسرية).

٢- المتغير العشوائي المتصل :-

ويطلق عليه المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة وجميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم وكمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة ٧، ٣٥ أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب)

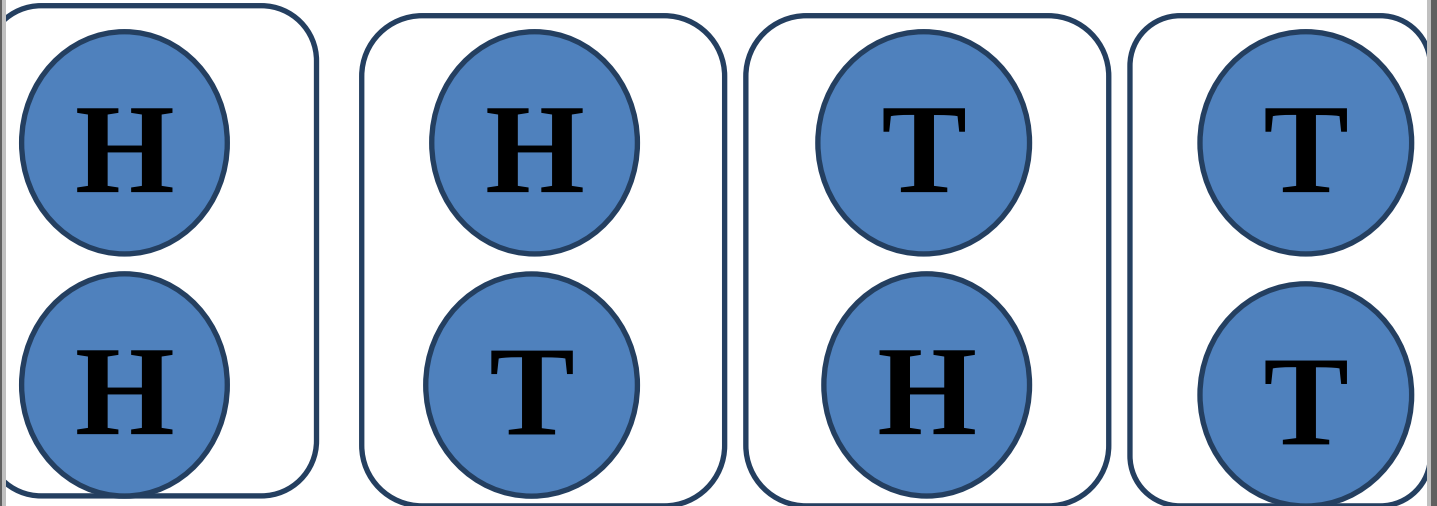
مثال :-

في تجربةلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة , فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته ؟



الحل

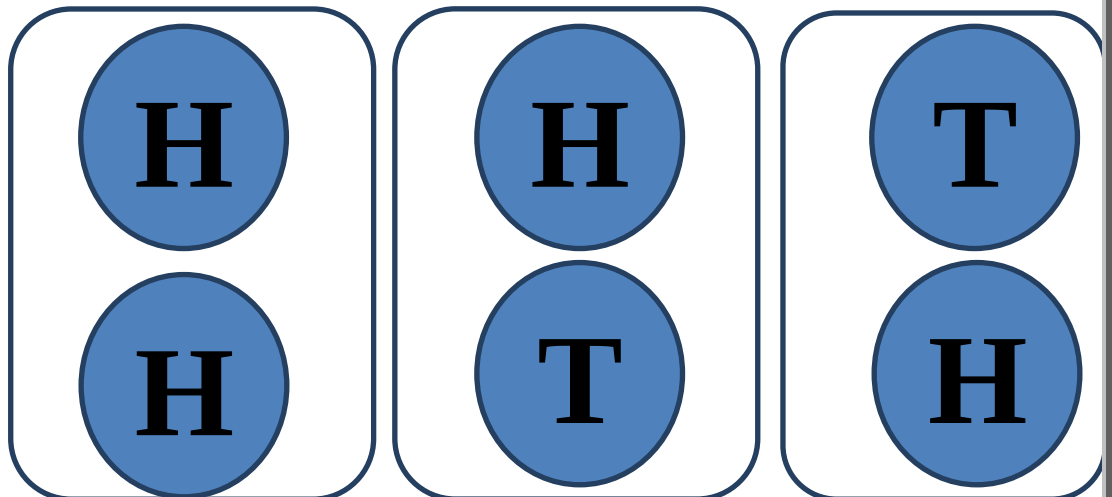
١- فراغ العينة (S): $S = \{HH, HT, TH, TT\}$



٢- الحدث (A):

(تمثل وصف لنتائج التي يمكن أن يأخذها المتغير)

$A = \{HH, HT, TH\}$



٣- المتغير العشوائي (X):

(وصف رقمي لعدد مرات ظهور الصورة)

٤- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير $p(x)$:-

$$P(x=0) = 1/4 \quad \text{where (TT)}$$

$$P(x=1) = 2/4 = 1/2 \quad \text{where (HT, TH)}$$

$$P(x=2) = 1/4 \quad \text{where (HH)}$$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) =$$

مثال :-

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع العددين الظاهرين فأوجد القيم التي يأخذها المتغير X وأوجد احتمال الحصول على كل من هذه القيم ؟

الحل

١- فراغ العينة (S) :-

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

٢- المتغير العشوائي (X) :-

(وصف رقمي لمجموع العددين الظاهرين)

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

٣- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير $p(x)$:-

$$P(x=2) = 1/36$$

$$P(x=3) = 2/36$$

$$P(x=4) = 3/36$$

$$P(x=5) = 4/36$$

$$P(x=6) = 5/36$$

$$P(x=7) = 6/36$$

$$P(x=8) = 5/36$$

$$P(x=9) = 4/36$$

$$P(x=10) = 3/36$$

$$P(x=11) = 2/36$$

$$P(x=12) = 1/36$$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$P(x=٠) + P(x=١) + P(x=٢) + \dots + P(x=١٢) = ١$$

تمارين واجب :-

مثال :-

إذا أعطيت الجدول التالي :-

المجموع	B	A	
٥٥	٤٥	١٠	X
٤٥	١٥	٣٠	Y
١٠٠	٦٠	٤٠	المجموع

المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

١- $P(A)$

٢- $P(\bar{A})$

٣- $P(X)$

٤- $P(\bar{X})$

٦- $P(A \cap X)$

٥- $P(B \cap X)$

٨- $P(B \cup Y)$

٧- $P(A \cup Y)$

١٠- $P(B|Y)$

٩- $P(A|Y)$

للحل :-

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و تقديرات التخرج :-

النوع / المستوى التعليمي	جيد A	ممتاز B	المجموع
ذكر X	٢٠٠	٣٠٠	٥٠٠
أنثى Y	٤٠٠	١٠٠	٥٠٠
المجموع	٦٠٠	٤٠٠	١٠٠٠

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

- ١- أحسب احتمال أن يكون ذكر أو حاصل على تقدير جيد ؟
- ٢- أحسب احتمال أن تكون أنثى و حاصلة على تقدير ممتاز ؟
- ٣- إذا علمت أنها أنثى فما هو احتمال أن تكون حاصلة على تقدير جيد ؟

المحاضرة (٩)

تابع نظرية الاحتمالات

مثال :

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص :

النوع / المستوى التعليمي	X	y	المجموع
A	٥	١٠	١٥
B	١٢	٣	١٥
المجموع	١٧	١٣	٣٠

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

$P(B \cup y)$	$P(y)$
$P(x \cap A)$	$P(\bar{B})$
$P(A y)$	$P(B x)$

تمرين :-

مصنع يستخدم ثلاث آلات في الانتاج فإذا كانت الآلة الاولى تنتج ٣٠% من إنتاج المصنع و الآلة الثانية تنتج ٥٠% من الانتاج و الباقي للآلة الثالثة فإذا كانت نسبة الانتاج المعيب للآلات الثلاثة على التوالي هي ٥% و ١% و ٢% ، وإذا تم سحب وحدة عشوائياً من إنتاج المصنع احسب :-

١- احتمال أن تكون معيبة :-

$$P = ٠,٣٠ * ٠,٥ + ٠,٥٠ * ٠,٠١ + ٠,٢٠ * ٠,٠٢ = ٠,٠٢٤$$

٢- إذا علمت ان هذه الوحدة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة الثالثة :-

$$P = \frac{0.004}{0.024} = \frac{4}{24}$$

تمرين :-

تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما، فإذا كانت السكرتيرة A تطبع ٤٠% من المراسلات، و تطبع ٣٠% B و تطبع ٣٠% C الباقية ، إذا كان احتمال أن A تخطئ في الطباعة هو ٠,٠٢ و احتمال الخطأ في عند B هو ٠,٠٣ و احتماله عند C هو ٠,٠٤ .

سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ , أوجد احتمال أن تكون السكرتيرة B هي التي طبعتها؟

$$P = \frac{0.30 \times 0.03}{0.40 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.30 \times 0.04}$$

$$= \frac{9}{29} = 0.31$$

التوزيع الاحتمالي :-

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، وهو جدول مكون من صفين ، الأول به القيم الممكنة للمتغير ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير.

مثال :-

كون جدول التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

$$P(x=0) = 1/4 \quad \text{where (TT)}$$

$$P(x=1) = 2/4 = 1/2 \quad \text{where (HT, TH)}$$

$$P(x=2) = 1/4 \quad \text{where (HH)}$$

X	0	1	2	المجموع
P(x)	1/4	1/2	1/4	1

التوقع الرياضي :-

هو الوسط الحسابي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز μ أو $E(x)$ ويتم حسابه باستخدام القانون التالي:-

$$\mu = E(x) = \sum (x \times P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي حاصل جمع كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مضروبة في احتمالها و الجدول التالي يوضح كيفية الوصول إلى قيمة التوقع الرياضي :-

x	الصف ١	المجموع
P(x)	الصف ٢	1
E(x)	1 × 2	القيمة المتوقعة

التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي منفصل .
و كان $p(x)$ هو توزيعه الاحتمالي .
فإن وسطه الحسابي أو توقعه الرياضي يعطى
بالعلاقة:

$$\mu = E(X) = \sum x p(x)$$

مثال :-

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

X	الصف (1)	0	1	2	Σ
P(X = x)	الصف (2)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$\mu = E(x)$	(٢) × (١)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

مثال :

إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي , فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟

x	0	1	2	3	4	Σ
P(X =x)	0.20	0.30	0.25	0.15	0.10	1
μ = E(x)	0	0.30	0.50	0.45	0.40	1.65

$$\mu = E(X) = \sum x \cdot p(x) = 1.65$$

التباين والانحراف المعياري :-

التباين للمتغير العشوائي x الذي له قيمة متوقعة تساوي E(x) هو :-

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \sum E(x^2) - (E(x))^2$$

و الانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

و للوصول إلى قيمة التباين و الانحراف المعياري يتم إتباع الخطوات التالية :-

X	(1) صف	Σ
P(X =x)	(2) صف	١
μ = E(x)	صف ٣ = صف ١ * صف ٢	القيمة المتوقعة
$E(x^2)$	صف ٤ = صف ١ * صف ٣	

التباين = ناتج صف ٤ - (ناتج صف ٣)^٢

تمرين :-

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري والتباين للتوزيع الاحتمالي التالي:-

x	0	1	2	3
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1

الحل :-

x	0	1	2	3	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1	1	الاحتمال
$E(x)=x \cdot P(x)$	0	0.2	0.8	0.3	1.3	التوقع
$E(X^2)=x \cdot E(x)$	0	0.2	1.6	0.9	2.7	
σ^2	$=E(x^2)-E(x)^2$				1.01	التباين
σ					1.005	الانحراف المعياري

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	2	4	5	6
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25

المطلوب :-

(١) الوسط الحسابي .

(٢) التباين .

(٣) الانحراف المعياري .

(٤) $P(x \geq 4)$.

(٥) $P(2 \leq x \leq 5)$.

x	2	4	5	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0.3	1.4	1.25	1.5	4.45	التوقع
E(X ²)=x.E(x)	0.6	5.6	6.25	9	21.45	
v(x) =σ ²	=E(x ²)-E(x) ²		=٢١,٤٥-(٤,٤٥ ^٢)=		1.647	التباين
σ	=√σ ^٢ = √١.٦٤٧				1.28355	الانحراف المعياري

$$= P(x \geq 4)$$

١- الوسط الحسابي = التوقع الرياضي = ٤,٤٥

٢- التباين = ١,٦٤٧

٣- الانحراف المعياري = ١,٢٨٣٥

$$\begin{aligned} P(x \geq 4) &= P(4) + P(5) + P(6) = 0,35 + 0,25 + 0,25 = 0,85 \\ &= 1 - P(3) = 1 - 0,15 = 0,85 \end{aligned}$$

$$P(2 \leq x < 5) = P(2) + P(4) = 0,15 + 0,35 = 0,5$$

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	٠	٢	٤	٦
P(x)	٠,١	٠,٢	٠,٤	?

المطلوب :-

(١) $P(6)$

(٢) الوسط الحسابي .

(٣) التباين .

(٤) الانحراف المعياري .

(٥) $P(x \geq 4)$.

x	٠	٢	٤	٦	Σ	قيم المتغير
P(x)	٠,١	٠,٢	٠,٤	٠,٣	1	الاحتمال
$E(x) = x \cdot P(x)$	٠	٠,٤	١,٦	١,٨	٣,٨	التوقع

$E(X^2) = x \cdot E(x)$	٠	٠,٨	٦,٤	١٠,٨	١٨	مربع التوقع
$v(x) = \sigma^2$	$= E(X^2) - E(x)^2$		$= 18 - 3,8^2 = 3,56$		٣,٥٦	التباين
σ					١,٨٩	الانحراف المعياري

$$P(٦) = ٠,٣, \quad P(x \geq ٤) = P(٤) + P(٦) = ٠,٤ + ٠,٣ = ٠,٧$$

مدخن
غير مدخن

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن = $\frac{1}{5}$ عند سؤال ١٠ أفراد

سليم
تالف

إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق $\frac{2}{7}$ عند سحب مصباح من كل صندوق من ٥٠ صندوق في كل مرة قد يكون....

صورة
كتابة

رمي قطعة النقد ١٠ مرات

حاضرة
غائبة

إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة $\frac{1}{4}$, بمتابعة حضور الطالبة في ٥ محاضرات

جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

١. نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
٢. نتيجة كل محاولة مستقلة عن الأخرى .
٣. احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابت و ليكن p و احتمال الخطأ $q = 1 - p$
٤. إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك n محاولة.

تجربة ذات الحدين

X يسمى متغير ذات الحدين
و توزيعه الاحتمالي هو توزيع ذات الحدين
حيث $x=0,1,2,3,\dots,n$

إذا كان $X =$ عدد
النجاحات في n
محاولة

عند رمي قطعة نقد ٧ مرات إذا اعتبرنا ظهور H هو النجاح فإن
 $P(X=4)$ تعني.....
ما احتمال أن يظهر الوجه H أربع مرات عند رمي قطعة النقد ٧ مرات.

مراجعة على التوافق :-

تمرين :-

عند إجراء تجربة ذات الحدين ٥ مرات X متغير ذات حدين
 P احتمال الفشل $q=1-p$ فإن احتمالة تحقق هذه الظاهرة ثلاث مرات

$$p(X=3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3}$$

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند إجراء التجربة n مرة :

$$p(X=x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح و $q = 1 - p$
 $x=0,1,2,3,\dots,n$

تمرين :-

الظاهر فيها H. رميت قطعة نقود متزنة ٤ مرات , أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد

التجربة تحقق شروط ذات الحدين , نفرض أن النجاح هو ظهور H .

$$n = 4, p = \frac{1}{2}, q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b\left(x, 4, \frac{1}{2}\right) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4$$
$$= \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

تمرين :-

عند رمي حجر النرد ٤ مرات, ما احتمال عدم ظهور الوجه ٦؟ ما احتمال ظهور ٦ مرتين؟

فراغ العينة = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

إذا فرضنا أن النجاح هو ظهور العدد ٦ .

احتمال النجاح $p = \frac{1}{6}$, احتمال الفشل $q = \frac{5}{6}$, $n = 4$

$$b\left(x, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{4-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$p(\text{ظهور عدم } 6) = b\left(0, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0}$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$p(\text{ظهور 6 مرتين}) = b\left(2, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}$$

إذا كان X متغير ذات الحدين n, p فإن :

$$E(X) = \mu = np$$

التوقع
الرياضي

$$\sigma^2 = npq$$

التباين

تمرين :-

ثلاث مرات و أحسب التوقع و التباين ؟ H في تجربة إلقاء قطعة نقود خمس مرات أوجد احتمال ظهور الوجه

الحل

$$١- p(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$٢- E(X) = \mu = np = ٥ \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$٣- \sigma^2 = npq = ٥ \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

تمارين الواجب

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	٠	١	٢	٣
P(x)	٠,٢	٠,١	٠,٣	?

المطلوب :-

١) $p(3)$

٢) الوسط الحسابي .

٣) التباين .

٤) الانحراف المعياري .

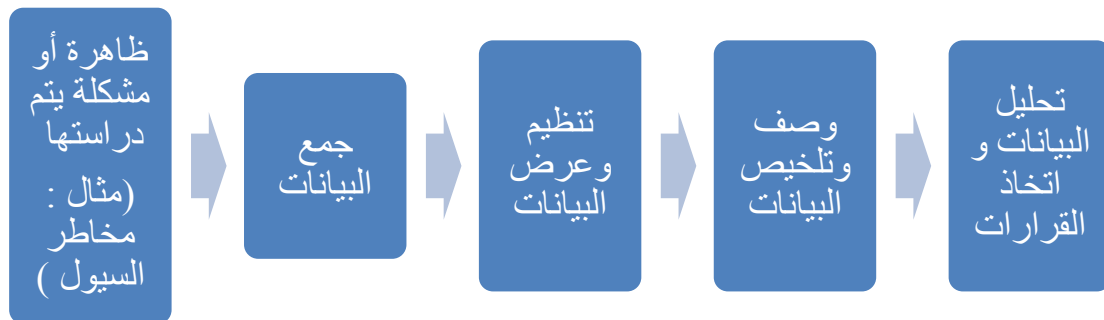
٥) $P(x \geq 2)$.

المحاضرة (١٠)

١- جمع البيانات وترميزها وعرضها

٢- مقاييس النزعة المركزية

١- جمع البيانات و ترميزها وعرضها



علم الإحصاء : هو العلم الذي يبحث في تصميم أساليب جمع البيانات والتقنيات المختلفة لتنظيم وتصنيف وعرض هذه البيانات ، وتلخيص هذه البيانات في صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس خصائصها الأساسية ، وتحليلها بغرض اتخاذ القرارات المناسبة .



المجتمع : هو المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء ، واستخلاص خصائص هذا المجتمع هو الهدف النهائي للدراسة الإحصائية .

العينة : هي مجموعة جزئية من مفردات المجتمع محل الدراسة يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح .



بعض المفاهيم الأساسية:-

البيانات (Data):-

مجموعة القيم التي يتم جمعها من مفردات المجتمع أو العينة لخاصية معينة (متغير).

أنواع البيانات:-

١ - بيانات نوعية (وصفية) :

البيانات التي يمكن حصرها في عدة أوجه وصفية ولا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها كالجمع و الطرح

٢ - البيانات الكمية :

أ- البيانات الكمية المنفصلة

ب- البيانات الكمية المتصلة

تنظيم وعرض البيانات :-

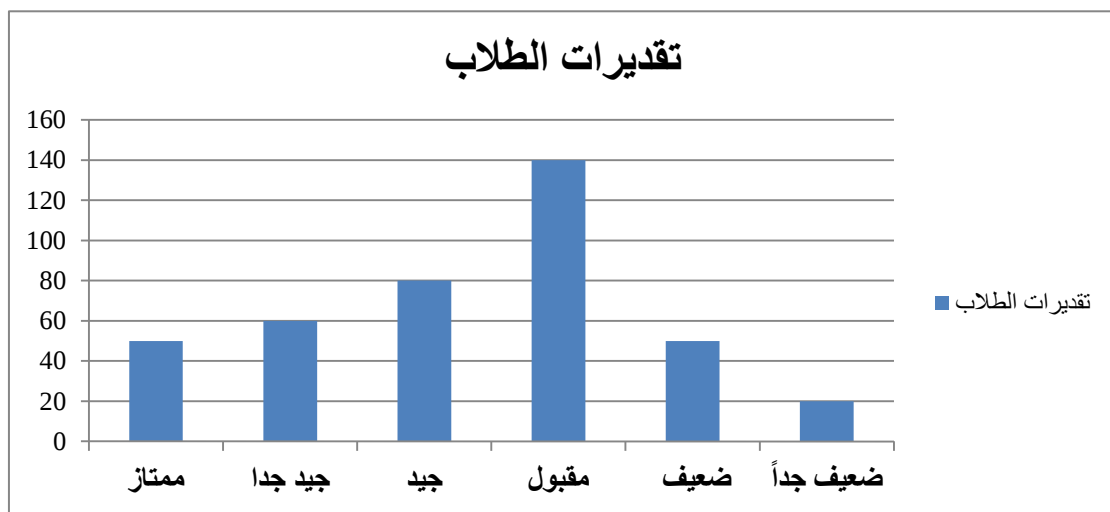
١. طريقة الجدول :-

مثال : عدد الطلاب الحاصلين على تقدير معين في مقرر الاحصاء في الادارة :-

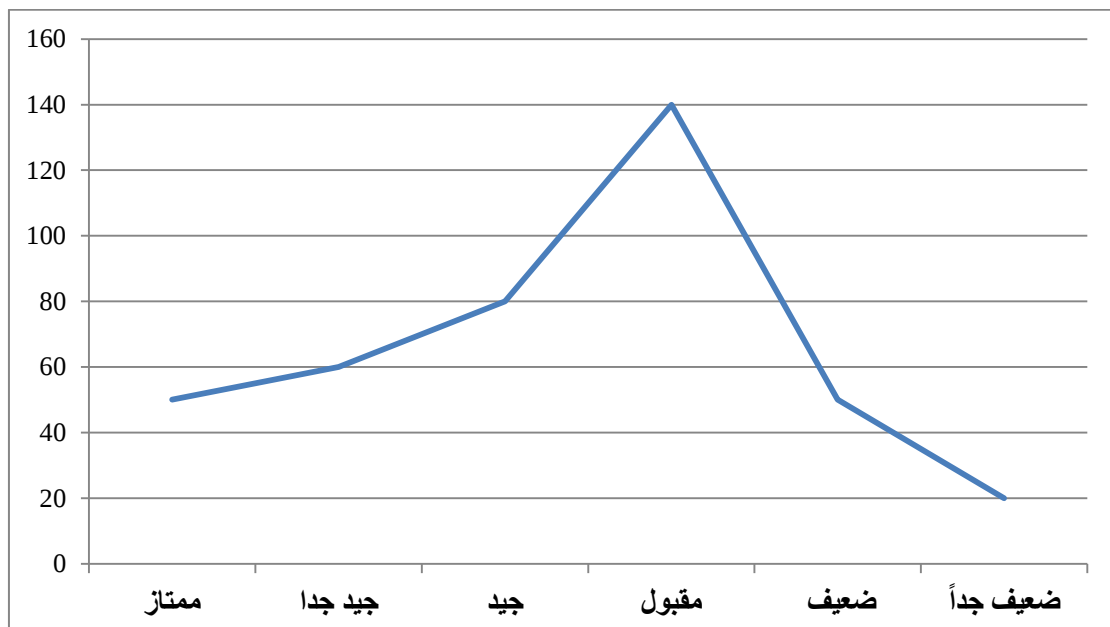
عدد الطلاب	التقدير
٥٠	ممتاز
٦٠	جيد جدا
٨٠	جيد

١٤٠	مقبول
٥٠	ضعيف
٢٠	ضعيف جداً
٤٠٠	المجموع

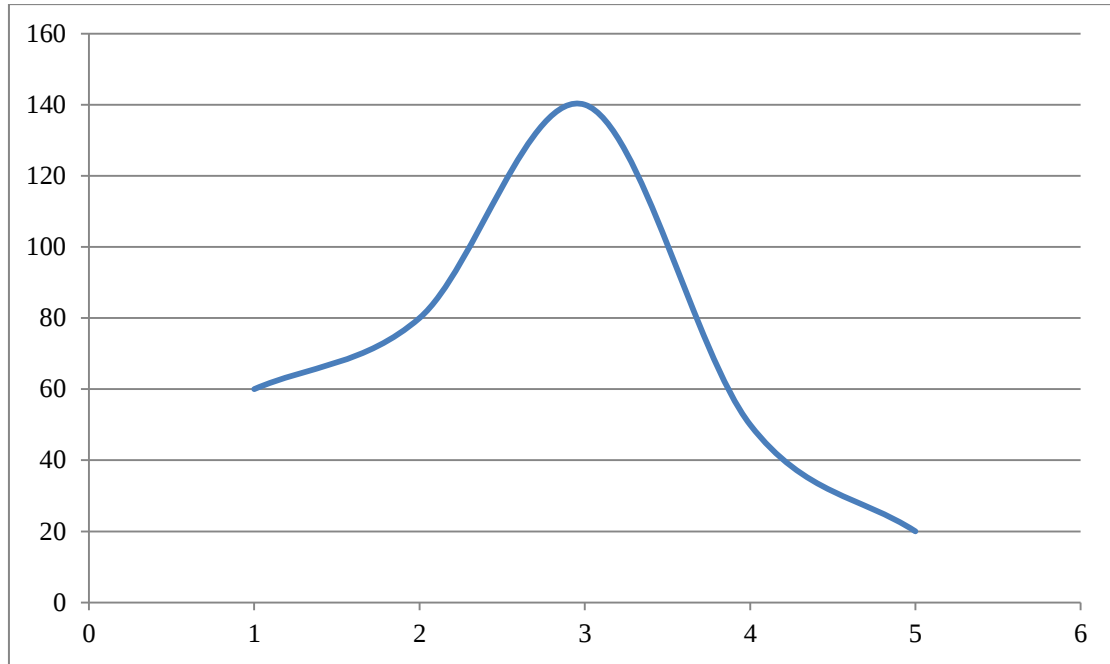
٢. طريقة الأعمدة أو المستطيلات :



٣. طريقة الخطوط المستقيمة :-



٤- طريقة الخط المنحني :-



وصف البيانات:-

المقاييس الإحصائية الوصفية

- مقاييس النزعة المركزية. * معاملات الالتواء.
- وغيرها..... * مقاييس التشتت

٢- مقاييس النزعة المركزية

القيم التي تقترب منها أو تتركز حولها أو تتوزع بالقرب منها معظم البيانات

١- الوسط الحسابي .

٢- الوسيط .

٣- المنوال .

أولاً : الوسط الحسابي (المتوسط) :-

أ- البيانات غير الميوبة :-

إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_N$ تمثل بيانات عينة من المجتمع

الوسط الحسابي يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

الوسط الحسابي = $\frac{\text{القيم مجموع}}{\text{عددها}}$

مثال :-

البيانات التالية تمثل درجات أحد الطلاب في الفصل الدراسي الاول:-

٨, ٥, ٧, ٦, ١٠, ٥, ٧, ١١

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطالب ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

$$\text{درجة} = \frac{8+5+7+6+10+5+7+11}{8} = ٦,٢٥$$

ب – البيانات المبوبة :-

تأخذ البيانات المبوبة في العادة الشكل التالي :-

fx	مراكز الفئات x	التكرارات f	الفئات
40	5	8	0 – 10
150	15	10	10 – 20
$\sum xf$		$\sum f$	المجموع

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \text{المتوسط}$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئات الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	المجموع	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250	250

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب .

• نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى - الحد الأدنى للفئة الأولى

$$= 10 - 0 = 10 \text{ طول الفئة}$$

• نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{10 + 0}{2} = 5$$

مراكز الفئات الأخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الأولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
المجموع	$\Sigma f =$		$\Sigma x_i f_i =$

في الصفحة القادمة الحل بالجدول و لكن الهدف ان يحل الطالب مع الدكتور اولاً ثم رؤية الاجابه

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
0 – 10	20	5	١٠٠
10 - 20	50	15	٧٥٠
20 – 30	90	25	٢٢٥٠
30 – 40	60	35	٢١٠٠
40 - 50	30	45	١٣٥٠
المجموع	$\sum f=250$		$\sum x_i f_i = 6550$

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6550}{250} = 26.2 \text{ درجة}$$

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالريال في مانتين محل بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب متوسط الاجر الأسبوعي للعامل .

- نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى - الحد الأدنى للفئة الأولى
 $10 = 15 - 5$ = طول الفئة
- نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{15 + 5}{2} = 10$$

مراكز الفئات الأخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الأولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
5 -	30	10	300
15 -	20	20	400
25 -	60	30	1800
35 -	50	40	2000
45 - 55	40	50	2000
المجموع	$\Sigma f = 200$		$\Sigma x_i f_i = 6500$

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{6500}{200} = 32.5 \text{ ريال}$$

٢ - الوسيط

هو القيمة العددية التي تقل عنها نصف البيانات (50%) ويزيد عنها النصف الآخر. ويعرف كذلك بأنه مقياس الموقع لأن قيمته تعتمد على موقعه في البيانات.

طريقة حسابه (في حالة البيانات غير المبوبة)

أ- الوسيط من البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_n$ تمثل بيانات عينة من المجتمع

فإن الوسيط يحسب كالتالي:

١. نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.

٢. نوجد موقع الوسيط $\frac{n+1}{2}$.

٣. إذا كان n عدد فردي فإن الناتج يكون عدد صحيح و بالتالي الوسيط هو $x_{\frac{n+1}{2}}$.

٤. إذا كان n عدد زوجي فإن الناتج يكون عدد غير صحيحو بالتالي الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين يقع بينهما العنصر $x_{\frac{n+1}{2}}$.

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

٢٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ١٠ ، ٤٠ ،

الحل

١- ترتيب البيانات تصاعدياً :

١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠

٢- ترتيب الوسيط $= \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

٣- الوسيط هو القيمة الثالثة :- الوسيط = ٤٠

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

٢٠ ، ٨٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ١٠ ، ٤٠ ،

الحل

١- ترتيب البيانات تصاعدياً :

١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٨٠

٢- ترتيب الوسيط $= \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3,5$

٣- ترتيب الوسيط هو رقم كسري إذاً الوسيط هو متوسط القيمتين التي موقعهما ٣ و ٤

الوسيط $= \frac{40+50}{2} = 45$

ب- الوسيط من البيانات المبوبة :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

٢- ترتيب الوسيط $= \frac{\sum f}{2}$ = التكرارات مجموع

٣- الوسيط =

الحد الأدنى للفئة الوسيطة + $\frac{\text{الوسيط ترتيب} - \text{السابق الترتيب}}{\text{اللاحق الترتيب} - \text{السابق الترتيب}} \times \text{طول الفئة الوسيطة}$

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالجنية في مائتين معرض تجاري بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحلات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

١- جدول التمرين :

٢- الجدول التكراري للمجتمع الصاعد:

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع	فئات الدرجات	f
أقل 5	0	5 -	30
أقل 15	30	15 -	20
أقل 25	50	25 -	60
أقل 35	110	35 -	50
أقل 45	160	45 - 55	40
أقل 55	200	المجموع	200

١- الجدول التكراري للمجتمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 5	0
أقل 15	30
أقل 25	50
أقل 35	110
أقل 45	160
أقل 55	200

ترتيب
الوسيط

٢- ترتيب الوسيط :-

$$100 = \frac{200}{2} = \frac{\text{التكرارات مجموع}}{2}$$

البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع

٣- الوسيط =

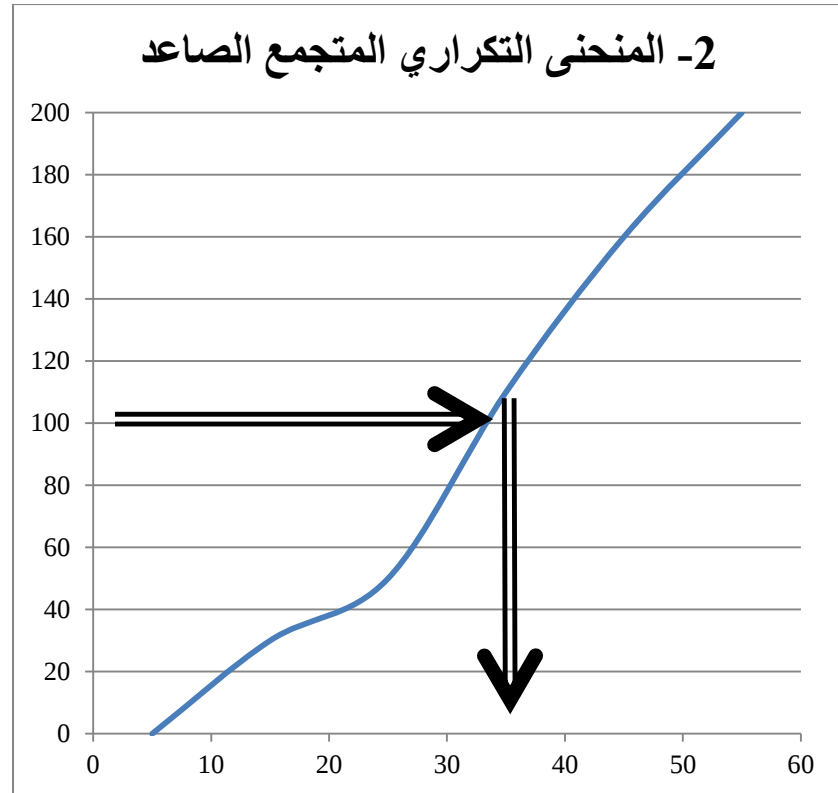
$$= 25 + \frac{100 - 50}{110 - 50} \times 10 =$$

٣٣,٣٣ ريال

الوسيط من الرسم :-

- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 5	0
أقل 15	30
أقل 25	50
أقل 35	110
أقل 45	160
أقل 55	200



مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئات الدرجات	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

١- الجدول التمرين :- ١- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 0	0
أقل 10	20
أقل 20	70
أقل 30	160
أقل 40	220
أقل 50	250

فئات الدرجات	f
0 – 10	20
10 – 20	50
20 – 30	90
30 – 40	60
40 – 50	30
المجموع	250

١- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 0	0
أقل 10	20
أقل 20	70
أقل 30	160
أقل 40	220
أقل 50	250

ترتيب
الوسط

٢- ترتيب الوسيط :-

$$125 = \frac{250}{2} = \frac{\text{التكرارات مجموع}}{2}$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الوسيط =

$$\text{درجة} = 20 + \frac{125 - 70}{160 - 70} \times 10 = 26,11$$

تمرين واجب :

مثال :-

الجدول التالي يبين درجات تحديد مستوى ٣٠ طالب في مقرر الفقه الاسلامي :-

فئات الدرجات	4 – 20	20 – 36	36 – 52	52 – 68	68 – 84	84 - 100	المجموع
عدد الطلاب	3	2	6	10	7	2	30

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

