المحاضرة (1)

المجموعات

تعريف المجموعة :- يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء أخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C , ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b , c , ...

يستخدم الرمز $\in$ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة

$a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة{ } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

A = { 2,0,1,4}

B= { a , b ,c , d }

C= { 1 , 2 , 3 .....}

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل 1 2 3 4 وهكذا)

D = { 1, 2 , 3,.....,100}

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x : x عدد زوجي }

B = { x : x طالب بمقرر الاحصاء في الادارة }

C = { x : x طالب بنظام التعليم عن بعد }

D = { x : $-3 \leq x \leq 1$ x عدد صحيح }

X = { x : $0 \leq x \leq 12$ x عدد صحيح }

أنواع المجموعات :-

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

A = { x : x عدد طبيعي زوجي و فردي }

B = { x : x دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية }

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

A = { 2 , 4 , 6 , 8 }

B = { 1 , 2 , 3 , …….. , 100}

C = { x , y , s, t u }

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

A = { x : عدد طبيعي فردي }

B = { 10, 20 , 30 ,……… }

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{2 , 4 , 6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فإن
$A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A$ ≫≫≫≫ $A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{1, 5, 7 , 9\}$, $B = \{9 , 7 ,5 ,1\}$

2- $A= \{2 ,5 ,9\}$, $B = \{a , s , d\}$

الحل

$1 - A = B$

$2 - A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B $(A \cup B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان $A = \{1 , 2 , 3 , 7\}$ و $B= \{2 , 4 , 6 , 8\}$ أوجد (AUB) ؟

الحل

$(AUB) = \{1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان A = { -1 , 0 , 1 , 2 , 3} وB = {0,2,4,6,} أوجد A ∩ B

الحل

(A ∩ B) = {0 , 2 }

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} و A={2,4,6,8,10}
أوجد

الحل

$\overline{A}$ = {1,3,5,7,9}

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت A={1,2,3,x,y} و B={3,4,5,x,w} أوجد A-B

الحل

A-B = { 1 , 2 , y }

مثال :-

إذا كانت

A={1,2,3,x,y} و

B={3,4,5,x,w}

و المجموعة الكلية

U = { 1,2,3,4,5,w,x,y,z}

فأوجد :-

1- A∪B
2- A ∩ B
3- B – A
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A}$ ∪ $\overline{B}$
7- $\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$
8- $\overline{A}$ ∪ A
9- $\overline{A}$ ∩ A

1- A∪B = {1, 2, 3, 4, 5, x, y, w}
2- A ∩ B = {3, X}
3- B – A = {4, 5, w}
4- $\overline{A}$ = {4, 5, w, z}
5- $\overline{B}$ = {1, 2, y, z}
6- $\overline{A}$ ∪ $\overline{B}$ = {1, 2, 4, 5, y, w, z}
7- $\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$ = {z}
8- $\overline{A}$ ∪ A = U
9- $\overline{A}$ ∩ A = { }

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ،B $(A\times B)$ بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x , y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت $A=\{-2,1\}$ و $B =\{-3,1,4\}$

فأوجد $A \times B$ و $B \times A$

الحل

$A \times B =\{(-2,-3) , (-2,1) , (-2,4) , (1,-3) , (1,1) , (1,4)\}$

$B \times A = \{(-3,-2) , (-3,1) ,(1,-2) , (1,1) ,(4,-2) , (4,1)\}$

مثال :-

أنشئ $A \times B$ و $B \times A$، علماً بأن :-

$A=\{1,2\}$ و $B = \{ w , x , y \}$

الحل

$A \times B =\{(1,w) ,(1,x) , (1,y) , (2,w) , (2,x) , (2,y)\}$

$B \times A = \{(w,1),(w,2),(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1=x_2)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الاول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني ، $(y_1=y_2)$

مثال :-

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x+1 , y - \frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$

الحل

$X+1 = 4 \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad x = 4-1 =3$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a , b , c\}$

الحل

$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} ,\{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} ,\{a,b,c\} ,\emptyset \}$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

تمرين : أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { a, b , c }

P(S) = { {a} , {b} , {c} , {a,b} , {a,c} ,{b,c} ,{a,b,c} , Ø }
$2^3 = 8$

تمارين :-

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عدد سالب و موجب x }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , ...,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,.......}

(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }

2- A= { 20 ,50 ,70 } , B = { k , d , u }

4- إذا كانت

$A=\{8,10,12,r,m\}$ و
$B=\{4,6,10,o,r\}$

المجموعة الكلية

$U = \{4,6,8,10,12,o,r,m,p\}$

ثم أوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

٥- إذا كانت $A=\{-5,7\}$ و $B =\{-6,4,9\}$
فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة
$(x+1 , y - 10) = (2x , 15)$ ؟

7- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2 , 5 , 8\}$ ؟

8- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر ، فأوجد عدد عناصر $P(S)$ ؟

المحاضرة (٢)

الدوال

الدالة :-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ،وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو تتعين بواسطة) كمية أخرى .

ملاحظة :-

إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و تسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون f دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

مثال :

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ وكانت

$f_1=\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ و

$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ و

$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ هل

$f_1=\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من Aإلى B؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل

$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل

$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

مثال :-

إذا كان $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ ، $f=\{(1,3),(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي لمعرفة ما إذا كانت تمثل دالة أم لا ،ثم أوجد مداها

تمرين :

أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R=\{(1,1),(2,2),(4,4),(9,9)\}$
2- $R=\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
3- $R=\{(-4,0),(-4,4),(2,3),(1,9)\}$
4- $R=\{(-3,1),(-1,1),(0,1),(4,1)\}$
5- $R=\{0,7),(1,5),(1,2),(3,-4)\}$
6- $R=\{(-1,2),(2,2),(3,5),(6,1)\}$

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}

2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }

3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}

5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}

6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :
إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- f(2)

2- f(-1)

3- f(a)

4- f(x+1)

مثال :
إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ فأوجد :-

1- f(-3)

2- f(1/2)

3- f(a)

تمارين :-

١- للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب $f(t)$ و $f(-5)$.

٢- للدالة $f(x)=3x^2-2$ أحسب $f(2)+f(-1)+f(3)$.

٣- للدالة $f(x)=x+4$ أحسب $2f(4)+3f(-1)$.

٤- للدالة $f(x)=x^2-1$ أحسب $f(3)-f(-2)$.

الدوال الحقيقية :-

- **دالة كثيرة الحدود :** هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$
$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)
2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)
3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)
4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)
5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال : إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$
$= f(x) + f(g)$
$= 3x+5 + x^2+1$
$= x^2+3x+6$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

2-$(f - g)(x) =$
$= f(x) - g(x)$
$= (3x+5) - (x^2+1)$
$= 3x+5 - x^2 - 1$
$= -x^2 + 3x + 4$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$
فأوجد:

$$3\text{-}\ (f \times g)(x) =$$
$$= f(x) \times g(x)$$
$$= (3x+5) \times (x^2+1)$$
$$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$$
$$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$
فأوجد:

$$4\text{-}\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

ايجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1\ ,\ y_1)$ و $B(x_1\ ,\ y_1)$
ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و
نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_1 \neq x_2$

مثال :-
أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(1,-3) و B(3,7) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7--3}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-
أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a وb لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ اذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال : **هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟**

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$

$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$$

اذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي 2- .

الحل

$m = -2$, $x_1 = 5$, $y_1 = -3$

$y - (-3) = -2(x-5)$

$Y + 3 = -2(x-5)$

$y = -2x + 7$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$f_1 = \{(5,2),(9,3),(13,4)\}$

و $f_2 = \{(5,2),(9,3),(13,6)\}$

و$f_3 = \{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- R ={(1,4) ,(2,4) ,(3,3) ,(4,5)}

2- R ={(2,4) ,(3,1) ,(3,2) ,(4,1) ,(5,2) }

3- R ={(-1,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

٣- للدالة $f(x)= 2x^3 + 10\,x^2 -15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤-إذا كانت <u>f(x)=6x+3</u> و <u>g(x)=10</u> فأوجد:

$$(f+g)(x)\ ,\ \ (f-g)(x)\ \ ,\ (f\times g)(x)\ \ ,\ \ (\frac{f}{g})(x)$$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6,\frac{-3}{4})$ و $B(4,\frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ و $B(7,\frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$-5x + 3y - 8 = 0$$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$12\,x = -9y + 30$$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y -4 = 0$ و $4y= 16x +4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y -12x -6 = 0$ ، $8y + 2x -30 =0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (9,-2) و ميله يساوي -5 ؟

المحاضرة (3)

النهايات و الاتصال

النهايات :

مفهوم النهاية :-
يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a.

مثال :-
إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $\lim_{x \to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :
١- إذا كانت $f(x)=c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $\lim_{x \to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢- إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-
أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x \to 5} 30$$
$$\lim_{x \to 2} (1 - 2x)$$
$$\lim_{x \to 2} (3x + 4)$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5)$$

الحل

$$\lim_{x \to 5} 30 = 30$$
$$\lim_{x \to 2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times -2) = 5$$
$$\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times 1/2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

مثال :
إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$1- \lim_{x \to 5} [h(x) - f(x)]$$
$$= \lim_{x \to 2} h(x) - \lim_{x \to 2} f(x)$$
$$= 10.5 - 5 = 5.5$$

مثال :
إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$2- \lim_{x \to 5} [g(x) \times h(x)]$$
$$= \lim_{x \to 2} g(x) \times \lim_{x \to 2} h(x)$$
$$= -8 \times 10.5 = -84$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

3- $\lim_{x\to 2} 8\,f(x)$

$$= 8 \times \lim_{x\to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

4- $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\lim_{x\to 1}[3x - 1]^6 = [\lim_{x\to 1} 3x - 1]^6$$
$$= [3\times1-1]^6 = [3-1]^6 = [2]^6 = 64$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 2}(3x^3 + 5x^2 - 7)$

$$= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7$$
$$= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2- $\lim_{x\to 3} \frac{3x^2+7}{x-5}$

$$= \frac{3 \times 3^2 + 7}{3-5} = \frac{3\times 9+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

3- $\lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{5x+3}$

$$= \frac{2\times2-1}{5\times2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$$

4- $\lim_{x\to 2} e^x$

$$= e^2$$

أمثلة :

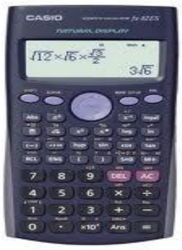
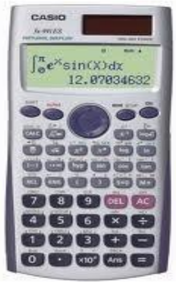
أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

5- $\lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1}$

$$= e^{1^2+2\times1+1} = e^{1+2+1} = e^4$$

6- $\lim_{x\to 2} log(3x^2 + 5) = \log(3\times2^2 + 5)$

$$= \log(3\times4+5)$$
$$= \log(12+5) = \log(17)$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$7- \lim_{x \to 3} ln(2x - 5)$ = ln (2×3-5) = ln (6-5) = ln (1) =0

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$8- \lim_{x \to 1} (3x^3 + 4x - 2)^3$ = ((3×1³) + 4 × 1 -2)³

= (3+4-2)³ = (5)³ = 125

$9- \lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9} =$
2.08

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & , \quad x < 5 \\ 15x - 2 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى ٣ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$1- \lim_{x \to 3} f(x)$ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)

= 7x -2 = 7 × 3 -2 = 19

مثال :

إذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$2- \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (\frac{1}{2})^2 + 5 = 3 \times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ **(النهاية من اليمين)**

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ **(النهاية من اليسار)**

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ **هذه النهاية غير موجودة**

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$\lim_{x\to 5} f(x)$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 5} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x\to 5^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x\to 5^+} f(x)$ **(النهاية من اليمين)**

$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) =$ **(النهاية من اليسار)**

$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) \neq \lim_{x\to 5^-} f(x)$$

$\lim_{x\to 5} f(x)$ **هذه النهاية غير موجودة**

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة *f(x)* متصلة في النقطة *a* إذا تحققت الشروط التالية :-

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى *R*.

2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة (4)

الجزء الاول : تابع الاتصال
الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \quad 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim_{x \to 5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim_{x \to 5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \quad 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , \quad x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$\lim_{x \to 10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$\lim_{x \to 10^-} f(x)$ = $12x^2$ = 12× 10^2 = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \quad x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , \quad x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

f(8) = 20 x^2 = 20 × $(8)^2$ = 20 × 64 = 1280

$\lim_{x \to 8^+} f(x)$ = 1160 +15x = 1160 +15 × 8 = 1280

$\lim_{x \to 8^-} f(x)$ = 20 x^2 = 20 × $(8)^2$ = 20 × 64 = 1280

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

تمارين الواجب :-

تمرين ١ :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$\lim_{x\to 0} 5$

$\lim_{x\to 5}(10 - 2x + x^2)$

$\lim_{x\to 12}(3x + 6)$

$\lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x - 2)$

تمرين ٢ :-

إذا كانت $\lim_{x\to 5} f(x) = 20$ و $\lim_{x\to 5} g(x) = -15$ و $\lim_{x\to 5} h(x) = 18.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to 5}[h(x) + f(x)]$

2- $\lim_{x\to 5}[h(x) - g(x)]$

3- $\lim_{x\to 5}[g(x) \times f(x)]$

4- $\lim_{x\to 5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

1- $\lim_{x\to 1}[5x - 2]^2$

2- $\lim_{x\to 2}[10 - 2x]^2$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 5}(2x^3 - 2x^2 - 50)$

2- $\lim_{x\to 0}(1 - e^x)$

3- $\lim_{x\to 1} log(10x^4 + 15)$

4- $\lim_{x\to 2} e^{2x^2+3x+2}$

5- $\lim_{x\to 3} ln(20x^2 - 5x + 10)$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \quad x < 2 \\ 5x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x\to 3} f(x)$

2- $\lim_{x\to 1} f(x)$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$ =????

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$y = 15$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x^5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

2- $y = 15x^4$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 60x^3$

3- $y = 10x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 10$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

$1 - y = (15x2 + 20)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$$

$2 - y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$

$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$ (المشتقة الاولى)

$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$ (المشتقة الثانية)

$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$ (المشتقة الثالثة)

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = $(-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (٢):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي ($D= 200 – 10\ x$) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}= -10$)

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي ($D= 15x-20$) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}= 15$)

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي ($D = 1.5x +20$) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

المحاضرة (5)

تابع التفاضل
وتطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .
قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل
قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = 0.6 - 0.04\,x$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$K' = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - .04 = 0.56$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8\,x - 0.15x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = 0.8 - 0.3\,x$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$K' = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.5 = 0.5

3- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .
2 - يتم إيجاد المشتقة الثانية .
3 - تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= - 0.4x^2 + 300x -2000$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^/ = -0.8x + 300$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = -0.8$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= 500-0.2x +0.1x^2$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^/ = -0.2 + 0.2x$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = 0.2$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

4- الربح الحدي

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة
2- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية
3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .
4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .
5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .
6- الربح الحدي = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x +30$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$R^/ = 36x^2 + 40x - 10$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$R^/ = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10=3990$ ريال

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) $= 4x^2 + 6x + 5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × x

$R = (4x^2 + 6x + 5) \times x = 4x^3 + 6x^2 + 5x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 12x^2 + 12x + 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدات إذاً $x=15$

$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12\times15^2 + 12\times15 + 5 = 2885$ ريال

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × x

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20 = 4205$ ريال

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = 10x^2 - 12x + 15$ (التكاليف الكلية)

$C' = 20x - 12$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188$ ريال

مثال (5) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$ (التكاليف الكلية)

$C' = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C' = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$

$= 3\times(5\times20^2 - 3\times20 + 15)^2\times(10\times20 - 3)$

$= 3\times (5\times400 - 60 + 15)^2 \times(200-3)$

$= 3\times(1955) \times(197) = 1155405$ ريال

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$

$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

$P' = 6x^2 - 21x + 1$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$P' = 6x^2 - 21x + 1 = 6\times30^2 - 21\times30 + 1 = 4771$ ريال

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R – C$

$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$

$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

$P^{/} = 36x^2 + 30x - 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$P^{/} = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 - 5 = 23245$ ريال

تمرين شامل (1)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$R^{/} = 120x^3 + 24x^2 - 6$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$R^{/} = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394$ ريال

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$C' = 39x^2 - 10x + 3$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$C' = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499$ ريال

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

3- دالة الربح الكلي :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$

$P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$P' = 120\times12^3 - 39\times12^2 + 34\times12 - 9 =$

تمرين شامل (2)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $3x^2 + 25x - 18$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .
2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .
3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .
4- دالة الربح الكلي .
5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $3x^2 + 25x - 18$
$C = 10x^2 + 2x - 5$

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × **x**

$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$

$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$
$C = 10x^2 + 2x - 5$

الحل

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R' = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R' = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457$ ريال

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$
$C = 10x^2 + 2x - 5$

الحل

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$C' = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C' = 20\times20 + 2 = 402$ ريال

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$
$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

4- دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$
$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$P^{/} = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$P^{/} = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180$ ريال

تمارين واجب :-

1- إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 0.3x - 0.01x^2)$المطلوب
أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

2- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = 3x^2 + 5x + 100$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

3- إذا علمت أن :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $8x^3 + 10x^2 + 5x + 12$

$C = 4x^2 + 3x - 10$

<u>المطلوب :-</u>

1- دالة الايراد الكلي .
2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .
3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 15 وحدة .
4- دالة الربح الكلي .
5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 12 وحدات .

المحاضرة (6)

التكامل
وتطبيقاته التجارية

التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ، حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ زمرلا مدختسن لماكتلا ةيلمع نع ريبعتللو $\int$ و هو رمز التكامل و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).\,dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

١ - تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n\,.dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

$$\int k\,.dx = k\,x + c$$

$$\int \;.dx = x + c$$

مثال :-

$$1-\int x^3\,.dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$2-\int x^5\,.dx = \frac{1}{6}x^6 + c$$

$$3-\int 6\,.dx = 6\,x + c$$

$$4-\int 3x^4\,.dx = \frac{3}{5}x^5 + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8\,.dx$$

الحل

$$y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6}x^6 + x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4\,x^3 - 30x^2 + 20x + 3\,.dx$$

الحل

$$y = \frac{4}{4}x^4 - \frac{30}{3}x^3 + \frac{20}{2}x^2 + 3x + c$$

$$y = x^4 - x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

٢- تكامل e^x :-

$$\int e^x\,.dx = e^x + c$$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x}\,.dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9\,x^2 - 10x + 15\ .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

الحل

$y = \frac{9}{3}\,x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x + c$

$y = 3\,x^3 - 5x^2 + 15x + c$

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

$1 = 3\,(4)^3 - 5(4)^2 + 15x4 + c$

$1 = 3×64 - 5 \times 16 + 60 + c$

$1 = 172 + c$

$c = -171$

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7\ .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (2,3)؟

الحل

$y = \frac{1}{3\times4}\,x^4 - \frac{1}{4\times3}x^3 - 7x + c$

$y = \frac{1}{12}\,x^4 - \frac{1}{12}x^3 - 7x + c$

حيث أن قيمة x = 2 و قيمة y = 3 فإن :-

$3 = \frac{1}{12}\,(2)^4 - \frac{1}{12}(2)^3 - 7x2 + c$

$3 = \frac{16}{12} - \frac{8}{12} - 14 + c$

$C = 16.333$

التطبيقات التجارية للتكامل

1- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .
2- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .
3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .
4- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$R/ = 3x^2 + 6x - 10$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$

$R = x^3 + 3x^2 - 10x$

٢- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$R = x^3 + 3x^2 - 10x$

الايراد الكلي= $(5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = 150$ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الحدية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$

$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$

التكاليف الكلية$C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$ ريال

تمرين شامل (1)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$C' = 36x^2 + 40x - 10$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
٢- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع ٢٥ وحدة .
٣- دالة الربح الحدي .
٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .
٥- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$

$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=20 كما يلي :-

$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$

$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$ ريال

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-
حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$C' = 36x^2 + 40x - 10$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة x=25 كما يلي :-

$C = 12\times(25)^3 + 20\times(25)^2 - 10\times(25) = 199750$ ريال

3- دالة الربح الحدي :-
الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$
$$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$$
$$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$
$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$
$$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$$
$$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-
دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=10 في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$P = 2\times(10)^4 - 4\times(10)^3 - 26\times(10)^2 + 30\times(10)$

$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700$ ريال

تمرين شامل (2)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي لإحدي الشركات تأخذ الشكل التالي:-

$$R' = (2x+1)(5-3x^2)$$

وكانت دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = (3x+1)^2$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .
2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .
3- دالة الربح الحدي .
4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .
5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدة .

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-
الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي

$R' = (2x+1)(5+3x^2)$

$R' = 10x + 6x^3 + 5 + 3x^2$

$R' = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5$ **(الايراد الحدي)**

وللوصول دالة الايراد الكلي تمثل تكامل دالة الايراد الحدي :-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right)x^4 + \left(\frac{3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{10}{2}\right)x^2 + 5x$$
$$R = \left(\frac{6}{4}\right)x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات يتم التعويض عن x=10 :-

$R = \left(\frac{6}{4}\right)(10)^4 + (10)^3 + (5)(10)^2 + 5(10) = 16550$ ريال

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-
التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية

$C' = (3x+1)^2$
$= 9x^2 + 6x + 1$ (التكاليف الحدية)
$C = 3x^3 + 3x^2 + x$ (التكاليف الكلية)

وللوصول لحجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة يتم التعويض عن قيمة x=20 :-

$C = 3(20)^3 + 3(20)^2 + (20) = 25220$ ريال

3- دالة الربح الحدي :-
الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P' = R' - C'$
$= (6x^3 + 3x^2 + 10x + 5) - (9x^2 + 6x + 1)$
$= 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$

٤- دالة الربح الكلي :-
الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P' = 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$
$P = (\frac{6}{4}) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$

حل أخر :-
الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P = R - C$
$= ((\frac{6}{4}) x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x) - (3x^3 + 3x^2 + x)$
$= (\frac{6}{4}) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة :-
دالة الربح الكلي هي :-

$P = (\frac{6}{4}) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=30 في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$P = (\frac{6}{4}) \times (30)^4 - 2 \times (30)^3 + 2 \times (30)^2 + 4 \times (30)$
$= 1162920$ ريال

تمارين متنوعة :-
1- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار 60% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟
الحل
1- الميل الحدي للإدخار = 0.60 .
2- الميل الحدي للإستهلاك = 1 - 0.60 = 0.40
3- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك
$k' = 0.40$
$K = 0.40x$

تمارين متنوعة :-
2- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار 75% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟
الحل
1- الميل الحدي للإدخار = 0.75 .
2- الميل الحدي للإستهلاك = 1 - 0.75 = 0.25
3- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك
$k' = 0.25$
$K = 0.25x$

المحاضرة (٧)

الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .

احتمال تحقيق الحدث A نشير له بالرمز P(A) وحدود هذا الاحتمال هي :-

$$0 \leq A \leq 1$$

$$\text{احتمال تحقق حدث} = \frac{\text{عدد حالات تحقق الحدث } A}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

مثال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

٢٠ كرة بيضاء

٣٠ كرة حمراء

٥٠ كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

1. **حمراء**
2. **بيضاء**
3. **سوداء**
4. **حمراء أو سوداء**
5. **حمراء أو سوداء أو بيضاء**

الحل

١- أحتمال أن تكون حمراء $= \frac{\text{عدد الكرات حمراء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{30}{100}$

٢- أحتمال أن تكون بيضاء $= \frac{\text{عدد الكرات بيضاء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{20}{100}$

٣- أحتمال أن تكون سوداء $= \frac{\text{عدد الكرات سوداء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{50}{100}$

٤- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء $= \frac{30}{100} + \frac{50}{100} = \frac{80}{100}$

٥- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء $= \frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{20}{100} = \frac{100}{100} = 1$

مثال :-

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي ١٠٠٠٠ طالب نجح منهم ٩٠٠٠ طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح ٨٠٠٠ طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

1) **حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .**
2) **حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .**
3) **حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .**
4) **حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .**
5) **حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .**
6) **حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .**
7) **حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .**

الحل

1. **حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة** $= \frac{9000}{10000} =$ **٩٠ % .**

2. **حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة** $= \frac{1000}{10000} =$ **١٠ % .**

3. **حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي** $= \frac{8000}{10000} =$ **٨٠ % .**

4. **حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي** $= \frac{2000}{10000} =$ **٢٠ % .**

٥ - **حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً** $= \frac{9000}{10000} \times \frac{8000}{10000} =$ **٠.٧٢ = ٧٢ %.**

٦ - **حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً** $= \frac{1000}{10000} \times \frac{2000}{10000} =$ **٠.٠٢= ٢%.**

٧ - **حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط =**

$$= \frac{9000}{10000} \times \frac{2000}{10000} + \frac{8000}{10000} \times \frac{2000}{10000}$$

$$= 0.9 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1 = 0.26$$

مثال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-
٦٠ طالب يدرسون محاسبة .
٣٠ طالب يدرسون تسويق .
١٠ طلاب يدرسون مالية .
إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

1) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة .**
2) **إحتمال أن يكون تخصص تسويق .**
3) **إحتمال أن يكون تخصص مالية .**
4) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .**
5) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .**

الحل

1) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة** $= \frac{60}{100}$
2) **إحتمال أن يكون تخصص تسويق** $= \frac{30}{100}$
3) **إحتمال أن يكون تخصص مالية** $= \frac{10}{100}$
4) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق** $= \frac{60}{100} + \frac{30}{100} = \frac{90}{100}$
5) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية** $= \frac{60}{100} + \frac{30}{100} + \frac{10}{100} = 1$

نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنين معاً ويسمي الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حيث أن :-

P(A) هو إحتمال تحقق الحدث A .
P(B) هو إحتمال تحقق الحدث B .
P(A∩B) : التقاطع و يشير إلى إحتمال تحقق الحدثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني).
P(A∪B) : الاتحاد ويشير إلى إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل (الحدث الاول أو الثاني)

مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد ٥٠ طالب نجح في المحاسبة ٣٠ طالب و نجح في الاقتصاد ٤٠ طالب فإذا علمت أن هناك ٢٥ طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فاحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل ؟

الحل :-

١- نرمز إلى إحتمال النجاح في المحاسبة بالرمز $P(A) = \frac{30}{50} = 0.60$

٢- نرمز إلى إحتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز $P(B) = \frac{40}{50} = 0.80$

٣- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى إحتمال النجاح في المادة الاولى و إحتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(A \cap B) = \frac{25}{50} = 0.50$$

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A \cup B)$ =

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.60 + 0.80 - 0.50 = 0.90$$

مثال :-

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم إختيار عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ شخص وجد من بينهم ٥٠ شخص يتصفحوا جريدة الرياض و٦٠ شخص يتصفحون جريدة المال و ٣٠ شخص يتصفحون الجريدتين معاً، فاحسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الاقل ؟

الحل

١- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز $P(A) = \frac{50}{100} = 0.50$

٢- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة المال بالرمز $P(B) = \frac{60}{100} = 0.60$

٣- احتمال تصفح الجريدتين معاً يشير إلى تصفح الجريدة الاولى والجريدة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(A \cap B) = \frac{30}{100} = 0.30$$

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A \cup B)$ =

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.50 + 0.60 - 0.30 = 0.80$$

أنواع الاحداث A و B :-

١- أحداث متنافية (متعارضة) : وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الأخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجدك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = 0$$

٢- أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الاخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال وفي هذه الحالة فإن أحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

٣- أحداث غير مستقلة : وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الاخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً :-

$$P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

مثال :-

إذا كان $[P(A)= 0.3 , P(B)= 0.4 , P(A\cap B)=0.12]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة ؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

1) $P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$
2) $P(A\cap B) = 0.12$
3) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$
4) إذا هذه الاحداث مستقلة

مثال :-

إذا كان $[P(A)= 0.5 , P(B)= 0.3 , P(A\cap B)=0.2]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

1) $P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$
2) $P(A\cap B) = 0.2$
3) $P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$
4) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

مثال :-

إذا علمت أن $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.4$ و أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

1) $P(A\cap B)$
2) $P(A\cup B)$
3) $P(\bar{A})$
4) $P(\bar{B})$

الحل

١- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذاً فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

$P(A \cap B) = 0$

٢- و من ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :-

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.4 - 0 = 0.6$

٣- إحتمال $P(\bar{A})$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0.2 = 0.8 \\ P(\bar{B}) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - 0.4 = 0.6 \end{aligned}$$

الاحتمال الشرطي :-

هو أحتمال تحقق حدث معين وليكن A و لكن بشرط حدوث الحدث B أولاً و نرمز له بالرمز $P(A|B)$ و كمثال على ذلك إذا تم تقدير إحتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض إحتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة ١ ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

لاحظ الحالات التالية :-

١. في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

١. في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

١. في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال :-

إذا كان :-

P(A) = 0.6 , P(B)= 0.8 , P(A∩B)= 0.5

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

P(A∪B) , P($A|B$) , P($B|A$) , P($\bar{A}$) , P($\bar{B}$)

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

1) **P(A∩B) = P(A) × P(B)**
2) **P(A) × P(B) = 0.6 ×0.8 = 0.48**
3) **P(A∩B) = 0.5**
4) **P(A∩B) ≠ P(A) × P(B)**

إذا هذه الاحداث غير مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

1) **P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B) = 0.6 + 0.8 – 0.5 = 0.9**
2) **P(A|B) =** $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} =$ **0.625**
3) **P(B|A) =** $\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} =$ **0.833**
4) **P($\bar{A}$) = 1- P(A) = 1- 0.6 = 0.4**
5) **P($\bar{B}$) = 1- P(B) = 1- 0.8 = 0.2**

مثال :-

إذا كان :-

P(A) = 0.7 , P(B)= 0.4 , P(A∩B)= 0.28

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

P(A∪B) , P($A|B$) , P($B|A$) , P($\bar{A}$) , P($\bar{B}$)

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
2) $P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$
3) $P(A \cap B) = 0.28$
4) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82$
2) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} = 0.7$
3) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = 0.4$
4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$
5) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$

المحاضرة (٨)

تابع الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

مثال :-

في دراسة لتخصصات 400 طالب وطالبة من خريجي جامعة الملك فيصل كانت النتائج كالتالي :-

التخصص	طالب B	طالبة C	المجموع
علمي S	120	40	160
أدبي L	96	144	240
المجموع	216	184	400

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

1 - حساب إحتمال ان يكون الشخص طالب أو علمي ؟

$$P(B \cup S) = P(B) + P(S) - P(B \cap S)$$

$$= \frac{216}{400} + \frac{160}{400} - \frac{120}{400} = \frac{256}{400} = 0.64$$

2 - حساب إحتمال ان يكون الشخص طالبة و تخصص أدبي :-

$$P(C \cap L) = \frac{144}{400} = 0.36$$

3 - إذا علمت ان الشخص المختار طالبة أحسب احتمال أن يكون تخصصها أدبي :-

$$P(L \mid C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{144}{400}}{\frac{184}{400}} = \frac{144}{184} = 0.7826$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراه B	المجموع
ذكر C	120	160	280
أنثى D	80	240	220
المجموع	200	400	600

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب إحتمال أن يكون الشخص ذكر أو حاصل على ماجستير :-

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A)$$

$$= \frac{280}{600} + \frac{200}{600} - \frac{120}{600} = \frac{360}{600} = 0.6$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراه B	المجموع
ذكرC	120	160	280
أنثى D	80	240	220
المجموع	200	400	600

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب إحتمال أن يكون الشخص أنثى و حاصلة على ماجستير :-

$$P(D\cap A) = \frac{80}{600} = 0.1333$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراه B	المجموع
ذكرC	120	160	280
أنثى D	80	240	220
المجموع	200	400	600

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

إذا علمت أن الشخص المختار حاصل على ماجستير أحسب احتمال أن يكون ذكر :-

$$P(C|A) = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{120}{600}}{\frac{200}{600}} = \frac{120}{200} = 0.6$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

١- إحتمال النجاح في المقررين معاً ؟

الحل

$P(A) = 0.6$ **(احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)**

$P(B) = 0.7$ **(احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)**

احتمال النجاح في المقررين معاً يساوي :-

$$P(A\cap B)= P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

٢- إحتمال الرسوب في المقررين معاً ؟

الحل

$P(A) = 0.6$ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$ (احتمال الرسوب في الرياضيات)

$P(B) = 0.7$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3$ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)

$P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

٣- احتمال نجاح الطالب في مقرر واحد فقط ؟

الحل

$P(A) = 0.6$ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$ (احتمال الرسوب في الرياضيات)

$P(B) = 0.7$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3$ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)

$P = 0.6 \times 0.3 + 0.7 \times 0.4 = 0.18 + 0.28 = 0.46$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

٤- احتمال النجاح في مقرر واحد على الاقل ؟

الحل

$P(A) = 0.6$ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(B) = 0.7$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(A \cap B) = 0.42$

احتمال النجاح في مقرر واحد على الاقل يقصد بذلك الاتحاد :-

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$

المتغيرات العشوائية :-

<u>المتغير العشوائي</u> هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة Discrete Random Variables

2- المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة) Continuous Random Variables

1- المتغير العشوائي المنفصل :-

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة (وبمعنى أخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي 1،2،3،4،5،....لا يمكن أن يأخذ صورة كسرية).

2- المتغير العشوائي المتصل :-

ويطلق علية المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة و جميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم و كمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة 35.7 أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب)

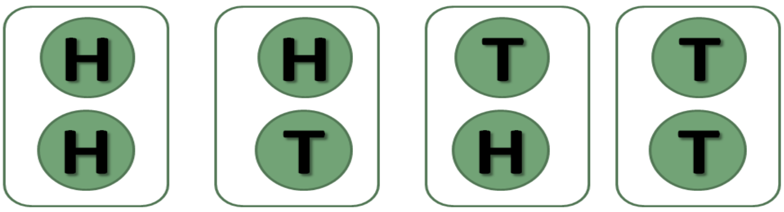
مثال :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة , فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته ؟

<u>الحل</u>

<u>1- فراغ العينة (S):-</u>

S = { HH ,HT,TH,TT}



<u>2- الحدث (A):-</u> (تمثل وصف لنتائج التي يمكن أن يأخذها المتغير)

A ={HH ,HT,TH}

3- المتغير العشوائي (X):-(وصف رقمي لعدد مرات ظهور الصورة)

$X = \{2, 1, 0\}$

4- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):-

P(x=0) = ¼ where (TT)
P(x=1) = 2/4 = ½ where (HT , TH)
P(x=2) = ¼ where (HH

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) =$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 1$$

مثال :-

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع العددين الظاهرين فأوجدي القيم التي يأخذها المتغير X وأوجدي احتمال الحصول على كل من هذه القيم ؟

الحل

1- فراغ العينة (S):-

**S = { (1,1), (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) ,(1,6) ,
(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) ,
(3,1) , (3, 2) , (3, 3) , (3, 4) , (3, 5) , (3, 6) ,
(4, 1) , (4, 2) , (4, 3) , (4, 4) , (4, 5) , (4, 6) ,
(5, 1) , (5, 2) , (5, 3) , (5, 4) , (5, 5) , (5, 6) ,
(6, 1) , (6, 2) , (6, 3) , (6, 4) , (6, 5) , (6, 6) }**

2- المتغير العشوائى (X):- (وصف رقمي لمجموع العددين الظاهرين)

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

3- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):-

**P(x=2) = 1/36 P(x=3) = 2/36
P(x=4) = 3/36 P(x=5) = 4/36
P(x=6) = 5/36 P(x=7) = 6/36
P(x=8) = 5/36 P(x=9) = 4/36
P(x=10) = 3/36 P(x=11) = 2/36
P(x=12) = 1/36**

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

P(x=0) + P(x=1) +P(x=2) ...... +P(x = 12) = 1

تمارين واجب :-

مثال :-

إذا أعطيت الجدول التالي :-

	A	B	المجموع
X	10	45	55
Y	30	15	45
المجموع	40	60	100

المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

1- P(A)

2- $P(\overline{A})$

3- P(X)

4- $P(\overline{X})$

5- P(A∩X)

6- P(B∩X)

7- P(A∪Y)

8- P(B∪Y)

9- P(A|Y)

10- P(B|Y)

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و تقديرات التخرج :-

النوع / المستوى التعليمي	جيد A	ممتاز B	المجموع
ذكرX	200	300	500
أنثى Y	400	100	500
المجموع	600	400	1000

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

1- أحسب إحتمال أن يكون ذكر أو حاصل على تقدير جيد ؟

2- أحسب أحتمال أن تكون أنثى و حاصلة على تقدير ممتاز ؟

3- إذا علمت أنها أنثى فما هو أحتمال أن تكون حاصلة على تقدير جيد ؟

المحاضرة (9)

تابع نظرية الاحتمالات

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص :-

النوع / المستوى التعليمي	x	y	المجموع
A	5	10	15
B	12	3	15
المجموع	17	13	30

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

$P(y)$ — $P(B \cup y)$

$P(\bar{B})$ — $P(x \cap A)$

$P(B \mid x)$ — $P(A \mid y)$

تمرين :-

مصنع يستخدم ثلاث آلات في الانتاج فإذا كانت الالة الاولى تنتج 30% من إنتاج المصنع و الالة الثانية تنتج 50% من الانتاج و الباقي للألة الثالثة فإذا كانت نسبة الانتاج المعيب للألأت الثلاثة على التوالي هي 5% و 1% و 2% ،وإذا تم سحب وحدة عشوائياً من إنتاج المصنع إحسب :-

١- احتمال أن تكون معيبة :-

$$P = 0.30*0.5 + 0.50*0.01 + 0.20*0.02 = 0.024$$

٢- اذا علمت ان هذه الوحدة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الالة الثالثة :-

$$P = \frac{0.004}{0.024} = \frac{4}{24}$$

تمرين :-

تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما, فإذا كانت السكرتيرة A تطبع 40% من المراسلات, و تطبع B 30% و تطبع C 30% الباقية , إذا كان احتمال أن A تخطئ في الطباعة هو 0.02 و احتمال الخطأ في عند B هو 0.03 و احتماله عند C هو 0.04.

سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ , أوجد احتمال أن تكون السكرتيرة B هي التي طبعتها؟

$$P = \frac{0.30 \times 0.03}{0.40 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.30 \times 0.04} = \frac{9}{29} = 0.31$$

التوزيع الاحتمالي :-

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير،وهو جدول مكون من صفين ، الأول به القيم الممكنة للمتغير ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير.

مثال :-

كون جدول التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

P(x=0) = ¼ where (TT)

P(x=1) = 2/4 = ½ where (HT , TH)

P(x=2) = ¼ where (HH)

X	0	1	2	المجموع
P(x)	1/4	1/2	1/4	1

التوقع الرياضي :-

هو الوسط الحسابي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز μ أو E(x) ويتم حسابه باستخدام القانون التالي:-

$$\mu = E(x) = \sum(x \times P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي حاصل جمع كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مضروبة في احتمالها و الجدول التالي يوضح كيفية الوصول إلى قيمة التوقع الرياضي :-

x	الصف 1	المجموع
P(x)	الصف 2	1
E(x)	2 × 1	القيمة المتوقعة

التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي منفصل .

و كان $p(x)$ هو توزيعه الاحتمالي .

فإن وسطه الحسابي أو توقعه الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$\mu = E(X) = \sum_{x \text{لجميع قيم}} x\,p(x)$$

مثال :-

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

X	الصف (1)	0	1	2	Σ
P(X =x)	الصف (2)	¼	½	¼	1
μ = E(x)	(1) × (2)	0	½	½	1

مثال :-

إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي ، فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟

x	0	1	2	3	4	Σ
P(X =x)	0.20	0.30	0.25	0.15	0.10	1
μ = E(x)	0	0.30	0.50	0.45	0.40	1.65

$$\mu = E(X) = \sum x \,.\, p(x) = 1.65$$

التباين والانحراف المعياري :-

التباين للمتغير العشوائي x الذي له قيمة متوقعة تساوي E(x) هو :-

$$Var(x) = \sigma^2 = \sum E(x^2) - (E(x))^2$$

و الانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

و للوصول إلى قيمة التباين و الانحراف المعياري يتم إتباع الخطوات التالية :-

X	صف(1)	Σ
P(X =x)	صف(2)	1
μ = E(x)	صف3 = صف 1* صف 2	القيمة المتوقعة
E(x²)	صف4 = صف 1* صف 3	

التباين = ناتج صف 4 – (ناتج صف 3)²

تمرين :-

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري والتباين للتوزيع الاحتمالي التالي:-

x	0	1	2	3
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1

الحل :-

x	0	1	2	3	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1	1	الاحتمال
E(x)=x .P(x)	0	0.2	0.8	0.3	1.3	التوقع
$E(X^2)$=x. E(x)	0	0.2	1.6	0.9	2.7	
σ^2	$=E(x^2)-E(x)^2$				1.01	التباين
σ	$\sqrt{\sigma^2}$		$=\sqrt{1.01}$		1.005	الانحراف المعياري

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	2	4	5	6
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25

المطلوب :-
1) الوسط الحسابي .
2) التباين .
3) الانحراف المعياري .
4) $P(x\geq4)$.
5) $P(2\leq x\leq5)$

x	2	4	5	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0.3	1.4	1.25	1.5	4.45	التوقع
$E(X^2)$=x.E(x)	0.6	5.6	6.25	9	21.45	
v(x) =σ^2	=$E(x^2)-E(x)^2$		=21.45-(4.45^2)=		1.647	التباين
σ	$=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{1.647}$				1.28355	الانحراف المعياري

= P(x≥4)

1) الوسط الحسابي = التوقع الرياضي = 4.45
2) التباين = 1.647
3) الانحراف المعياري = 1.2835
4) $P(x\geq4) = P(4) + P(5) + P(6)= 0.35 + 0.25+ 0.25 =0.85$
$= 1 - P(2) = 1 – 0.15 = 0.85$
5) $P(2\leq x<5) = P(2) + P(4) = 0.15 + 0.35 = 0.5$

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	0	2	4	6
P(x)	0.1	0.2	0.4	?

المطلوب :-

1) p(6)
2) الوسط الحسابي .
3) التباين .
4) الانحراف المعياري .
5) P(x≥4) .
6) P(2≤x≤5)

x	0	2	4	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	**0.1**	**0.2**	**0.4**	**0.3**	**1**	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0	0.4	1.6	1.8	**3.8**	التوقع
$E(X^2)$=x.E(x)	0	0.8	6.4	10.8	**18**	مربع التوقع
v(x) =σ^2	=$E(x^2)$-$E(x)^2$		=18-3.8^2=3.56		**3.56**	التباين
σ					**1.89**	الانحراف المعياري

$P(6) = 0.3$, $P(x \geq 4) = P(4) + P(6) = 0.4 + 0.3 = 0.7$

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن = $\frac{1}{3}$ عند سؤال ١٠ أفرادا فكل منهم قد يكون....

مدخن
غير مدخن

إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق = $\frac{2}{7}$، عند سحب مصباح من كل صندوق من ٥٠ صندوق في كل مرة قد يكون....

سليم
تالف

رمي قطعة النقد 10 مرات

صورة
كتابة

إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة $\frac{1}{4}$ ، بمتابعة حضور الطالبة في ٥ محاضرات

حاضرة
غائبة

جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

١. نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
٢. نتيجة كل محاولة مستقلة عن الأخرى .
٣. احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابت و ليكن p و احتمال الخطأ $q = 1 - p$
٤. إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك n محاولة.

تجربة ذات الحدين

إذا كان x = عدد النجاحات في n محاولة

x يسمى متغير ذات الحدين
و توزيعه الاحتمالي هو توزيع ذات الحدين
حيث x=0,1,2,3,.....n

عند رمي قطعة نقد 7 مرات إذا اعتبرنا ظهور H هو النجاح فإن P(X=4) تعني.....

ما احتمال أن يظهر الوجه H أربع مرات عند رمي قطعة النقد 7 مرات.

تمرين :-

عند اجراء تجربة ذات الحدين 5 مرات , نفترض أن x متغير ذات الحدين .
احتمال النجاح = p , احتمال الفشل = q=1-p فإن احتمالةتحقق هذه الظاهرة ثلاث مرات

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}\, p^3 q^{5-3}$$

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند اجراء التجربة n مرة :

$$p(X = x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x}\, p^x\, q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح و $q = 1 - p$

x= 0,1,2,3........n

تمرين :-

رميت قطعة نقود متزنة 4 مرات , أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد H الظاهر فيها.

التجربة تحقق شروط ذات الحدين ، نفرض أن النجاح هو ظهور H .

$$n = 4\ , p = \frac{1}{2}\ , q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b\left(x, 4, \frac{1}{2}\right) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \quad , x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$= \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

تمرين :-

عند رمي حجر النرد 4 مرات, ما احتمال عدم ظهور الوجه6؟ ما احتمال ظهور 6 مرتين ؟

فراغ العينة = {1,2,3,4,5,6}

إذا فرضنا أن النجاح هو ظهور العدد ٦ .

احتمال النجاح p= $\frac{1}{6}$ ، احتمال الفشل q = $\frac{5}{6}$ ، n=4

$$b\left(x, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$p(\text{عدم ظهور } 6) = b\left(0, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-0}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{4}$$

$$p(\text{ظهور } 6 \text{ مرتين}) = b\left(2, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}$$

إذا كان X متغير ذات الحدين n, p فإن :

التوقع الرياضي	$E(X) = \mu = np$
التباين	$\sigma^2 = npq$

تمرين :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود خمس مرات أوجد أحتمال ظهور الوجه H ثلاث مرات و أحسب التوقع و التباين ؟

الحل

1- $p(X=3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^2$

2- $E(X) = \mu = np = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

3- $\sigma^2 = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

تمرين واجب :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	0	1	2	3
P(x)	0.2	0.1	0.3	?

المطلوب :-

1) p(3)
2) الوسط الحسابي .
3) التباين .
4) الانحراف المعياري .
5) $P(x \geq 2)$.
6) $P(2 \leq x \leq 5)$

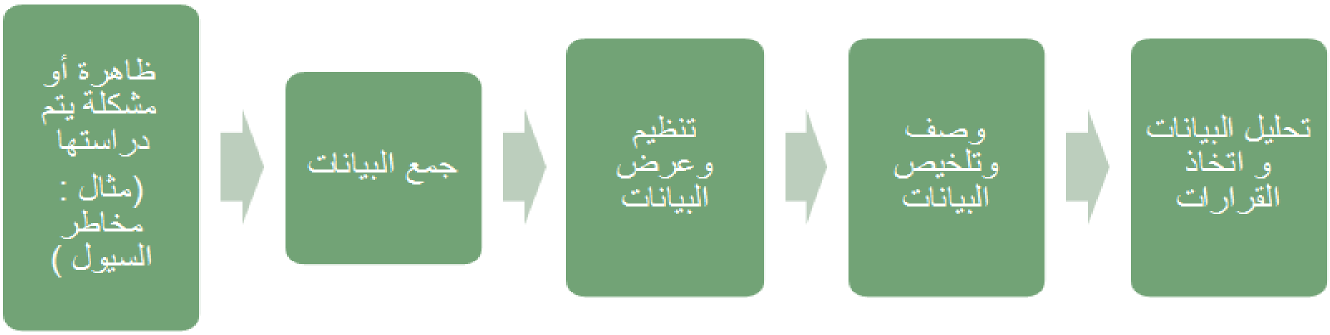
المحاضرة (10)

1- جمع البيانات وترميزها وعرضها

2- مقاييس النزعة المركزية

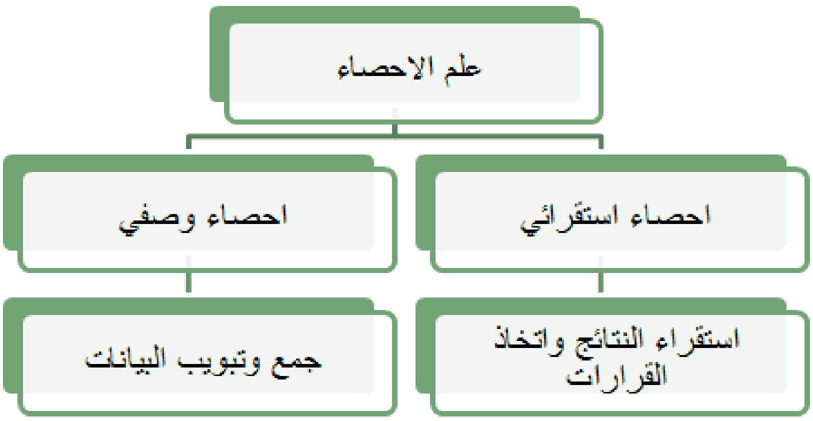
1- جمع البيانات و ترميزها وعرضها

الخطوات المنهجية للتحليل الإحصائي في البحث العلمي :



تعريف علم الإحصاء :

علم الإحصاء : هو العلم الذي يبحث في تصميم أساليب جمع البيانات والتقنيات المختلفة لتنظيم وتصنيف وعرض هذه البيانات ، وتلخيص هذه البيانات في صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس خصائصها الأساسية ، وتحليلها بغرض اتخاذ القرارات المناسبة .



تعريف المجتمع والعينة :-

المجتمع : هو المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء ، واستخلاص خصائص هذا المجتمع هو الهدف النهائي للدراسة الإحصائية .

العينة : هي مجموعة جزئية من مفردات المجتمع محل الدراسة يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح .

بعض المفاهيم الأساسية:-

البيانات (Data):- مجموعة القيم التي يتم جمعها من مفردات المجتمع أو العينة لخاصية معينة (متغير).

أنواع البيانات:-

1- بيانات نوعية (وصفية) : البيانات التي يمكن حصرها في عدة أوجه وصفية و لا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها كالجمع و الطرح

2- البيانات الكمية :

أ- البيانات الكمية المنفصلة

ب- البيانات الكمية المتصلة

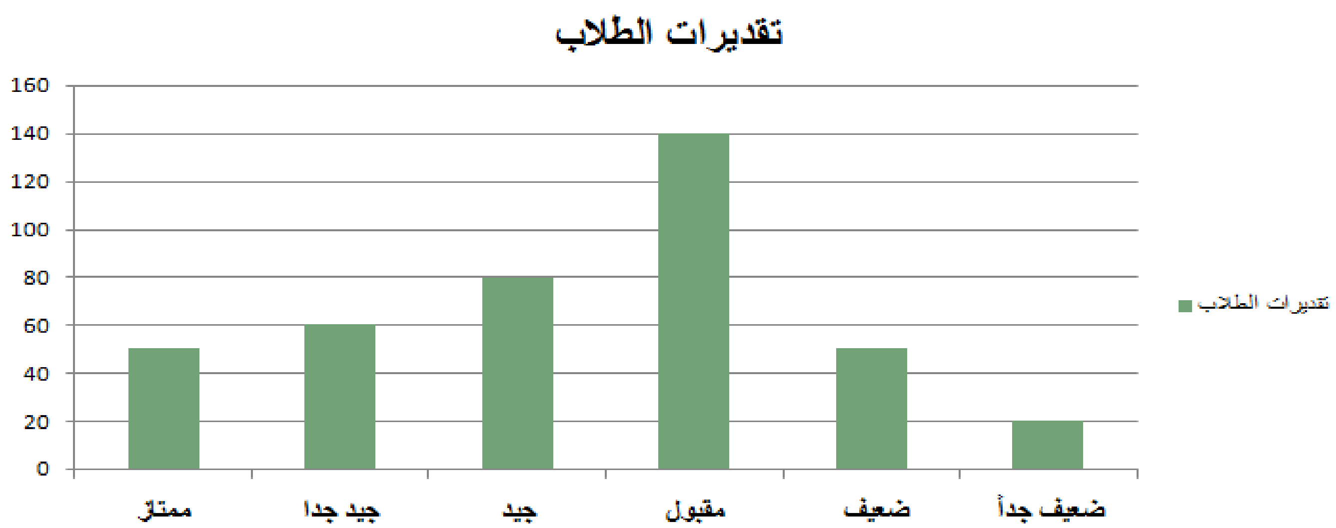
تنظيم وعرض البيانات :-

1. طريقة الجدول :-

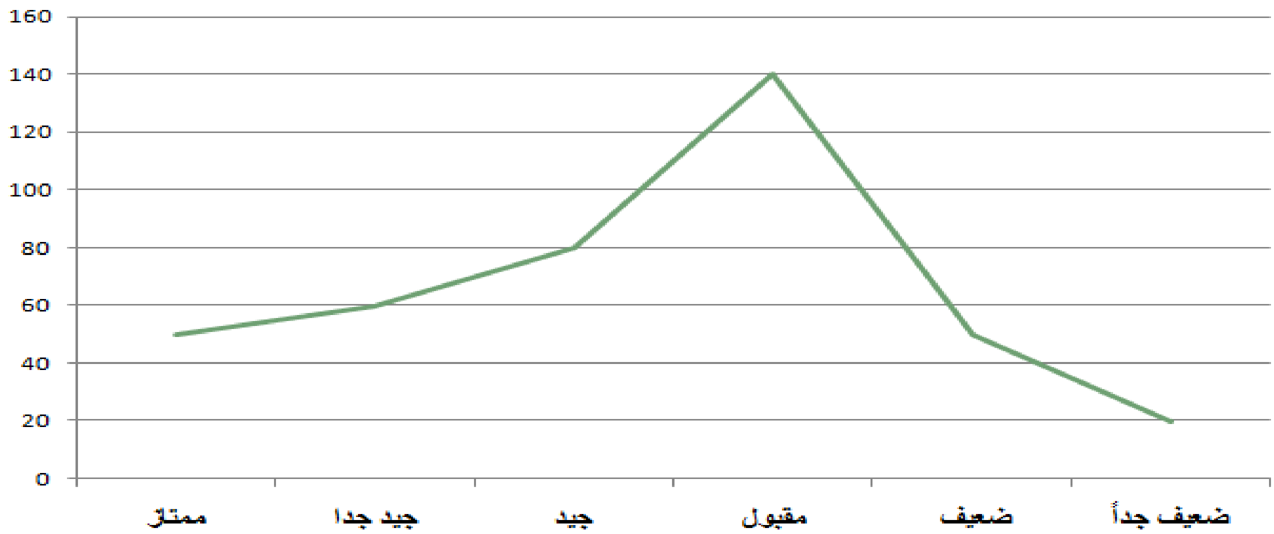
مثال : عدد الطلاب الحاصلين على تقدير معين في مقرر الاحصاء في الادارة :-

التقدير	عدد الطلاب
ممتاز	50
جيد جدا	60
جيد	80
مقبول	140
ضعيف	50
ضعيف جداً	20
المجموع	400

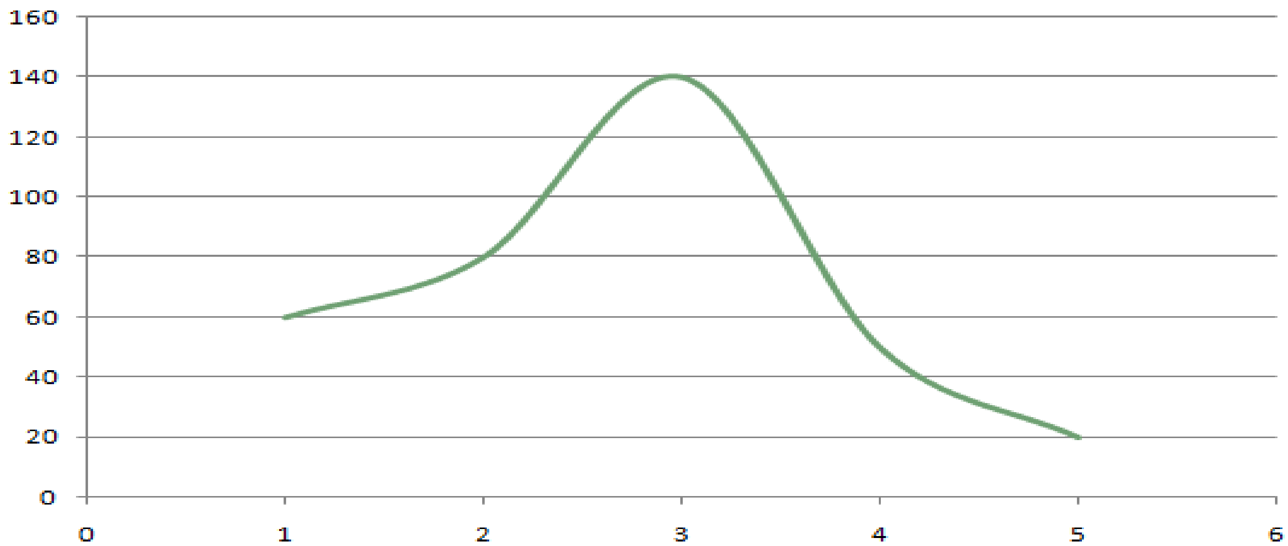
2. طريقة الأعمدة أو المستطيلات :-



3- طريقة الخطوط المستقيمة :-



4-طريقة الخط المنحني :-



المقاييس الإحصائية الوصفية

- مقاييس النزعة المركزية.
- مقاييس التشتت.
- معاملات الالتواء.
- و غيرها.....

2- مقاييس النزعة المركزية:-

القيم التي تقترب منها أو تتركز حولها أو تتوزع بالقرب منها معظم البيانات

1- الوسط الحسابي .

2- الوسيط .

3- المنوال .

أولاً : الوسط الحسابي (المتوسط) :-

أ- البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $x_1, x_2, \dots . x_N$ تمثل بيانات عينة من المجتمع
الوسط الحسابي يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots . x_N}{N}$$

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

مثال :-

البيانات التالية تمثل درجات أحد الطلاب في الفصل الدراسي الاول:-

8 , 5 , 7 , 6 , 10 , 5 , 7 , 11

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطالب ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots . x_N}{N}$$

$$= \frac{8+5+7+6+10+5+7+11}{8} = 6.25$$ **درجة**

ب – البيانات المبوبة :-

تأخذ البيانات المبوبة في العادة الشكل التالي :-

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	fx
0 – 10	8	5	40
10 – 20	10	15	150
المجموع	$\sum f$		$\sum xf$

المتوسط =
$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئات الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 – 30	30 - 40	40 – 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب .

- نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى ـ الحد الأدنى للفئة الأولى

طول الفئة = 10 - 0 = 10

- نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{10+0}{2} = 5$$

مراكز الفئات الأخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الاولى

الحل :-

فئات الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 – 30	30 - 40	40 – 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
المجموع	$\sum f=$		$\sum x_i f_i=$

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
0 – 10	20	5	100
10 - 20	50	15	750
20 – 30	90	25	2250
30 – 40	60	35	2100
40 - 50	30	45	1350
المجموع	$\sum f$=250		$\sum x_i f_i$= 6550

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6550}{250} = 26.2$$ درجة

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالريال في مائتين محل بمنطقة الرياض:-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب متوسط الاجر الأسبوعي للعامل .

- نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى – الحد الأدنى للفئة الأولى

طول الفئة =15 - 5= 10

- نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{15+5}{2} = 10$$

مراكز الفئات الأخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الاولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
5 -	30	10	300
15 -	20	20	400
25 -	60	30	1800
35 -	50	40	2000
45 - 55	40	50	2000
المجموع	$\sum f$=200		$\sum x_i f_i$= 6500

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6500}{200} = 32.5 \text{ ريال}$$

2- الوسيط

هو القيمة العددية التي تقل عنها نصف البيانات (50%) ويزيد عنها النصف الآخر. ويعرف كذلك بأنه مقياس الموقع لأن قيمته تعتمد على موقعه في البيانات.

طريقة حسابه (في حالة البيانات غير المبوبة)

أ- الوسيط من البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $x_1, x_2, \dots . x_n$ تمثل بيانات عينة من المجتمع

فإن الوسيط يحسب كالتالي:

1. **نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.**
2. **نوجد موقع الوسيط $\frac{n+1}{2}$.**
3. **إذا كان n عدد فردي فإن الناتج يكون عدد صحيح و بالتالي الوسيط هو $x_{\frac{n+1}{2}}$.**
4. **إذا كان n عدد زوجي فإن الناتج يكون عدد غير صحيح و بالتالي الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين يقع بينهما العنصر $x_{\frac{n+1}{2}}$.**

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

20 , 40 , 10 , 60 , 50

الحل :

١- ترتيب البيانات تصاعدياً :

10 , 20 , 40 , 50 , 60

٢- ترتيب الوسيط = $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} =$ ٣

٣- الوسيط هو القيمة الثالثة :- الوسيط = ٤٠

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

20 , 40 , 10 , 60 , 50 , 80

الحل :

١- ترتيب البيانات تصاعدياً :

10 , 20 , 40 , 50 , 60 , 80

٢- ترتيب الوسيط = $\frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$

٣- ترتيب الوسيط هو رقم كسري إذاً الوسيط هو متوسط القيمتين التي موقعهما ٣ و ٤

الوسيط = $\frac{40+50}{2} = 45$

ب- الوسيط من البيانات المبوبة :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

٢- ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum f}{2}$

٣- الوسيط = الحد الادنى للفئة الوسيطية + $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{الترتيب السابق}}{\text{الترتيب اللاحق} - \text{الترتيب السابق}}$ × طول الفئة الوسيطية

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالجنية في مائتين معرض تجاري بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

1- الجدول التمرين :-

f	فئات الدرجات
30	5 -
20	15 -
60	25 -
50	35 -
40	45 - 55
200	المجموع

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

ترتيب الوسيط

٢- ترتيب الوسيط :-

$$100 = \frac{200}{2} = = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$$

البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع

٣- الوسيط =

$$= 25 + \frac{100 - 50}{110 - 50} \times 10 =$$

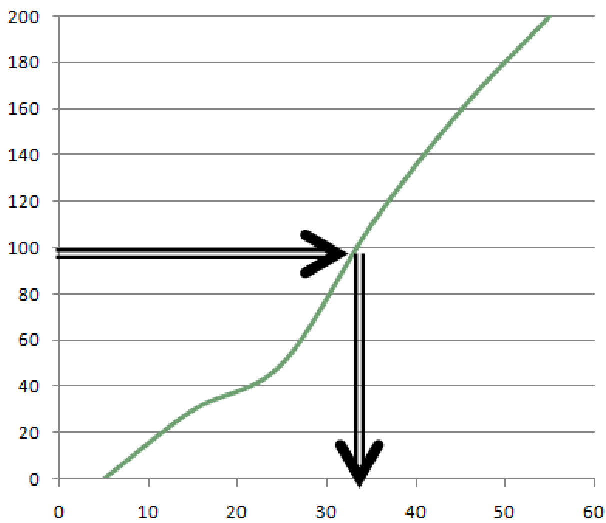
33.33 ريال

الوسيط من الرسم :-

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

2- المنحنى التكراري المتجمع الصاعد



مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

المجموع	40 – 50	30 – 40	20 – 30	10 – 20	0 – 10	فئات الدرجات
250	30	60	90	50	20	عدد الطلاب

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

1- الجدول التمرين :-

f	فئات الدرجات
20	0 – 10
50	10 – 20
90	20 – 30
60	30 – 40
30	40 – 50
250	المجموع

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 0
20	أقل 10
70	أقل 20
160	أقل 30
220	أقل 40
250	أقل 50

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 0
20	أقل 10
70	أقل 20
160	أقل 30
220	أقل 40
250	أقل 50

ترتيب الوسط

٢- ترتيب الوسيط :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = = \frac{250}{2} = ١٢٥$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الوسيط =

$$= 20 + \frac{125 - 70}{160 - 70} \times 10 =$$

26.11 درجة

تمرين الواجب

مثال :-

الجدول التالي يبين درجات تحديد مستوى 30 طالب في مقرر الفقه الاسلامي :-

فئات الدرجات	4 – 20	20 – 36	36 – 52	52 – 68	68 – 84	84 - 100	المجموع
عدد الطلاب	3	2	6	10	7	2	30

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

المحاضرة (11)

1 - تابع مقاييس النزعة المركزية
2- مقاييس التشتت

تمرين واجب

مثال :-

الجدول التالي يبين درجات تحديد مستوى 30 طالب في مقرر الفقه الاسلامي :-

فئات الدرجات	4 – 20	20 – 36	36 – 52	52 – 68	68 – 84	84 - 100	المجموع
عدد الطلاب	3	2	6	10	7	2	30

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

1- الجدول التمرين :-

فئات الدرجات	f
4 – 20	3
20 -36	2
36 – 52	6
52 – 68	10
68 - 84	7
84 - 100	2
المجموع	30

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 4	0
أقل 20	3
أقل 36	5
أقل 52	11
أقل 68	21
أقل 84	28
أقل 100	30

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 4	0
أقل 20	3
أقل 36	5
أقل 52	11
أقل 68	21
أقل 84	28
أقل 100	30

ترتيب الوسط

2- ترتيب الوسيط :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

3- الوسيط = $52 + \frac{15 - 11}{21 - 11} \times 18 = 59.2$ **درجة**

3- الربيع الأدنى و الربيع الأعلى :-

الربيع الأدنى و الربيع الأعلى من البيانات المبوبة :-

1- الربيع الادنى : هو القيمة العددية التي تقل عنها ربع البيانات (25%) ويزيد عنها (75%).

2- الربيع الاعلى : هو القيمة العددية التي تقل عنها ثلاث أربع البيانات (75%) ويزيد عنها (25%).

أولاً : خطوات إيجاد الربيع الادنى :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

٢- ترتيب الربيع الادنى = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{\sum f}{4}$

٣- الربيع الأدنى = الحد الادنى لفئة الربيع الادنى + $\frac{\text{ترتيب الربيع الادنى} - \text{الترتيب السابق}}{\text{الترتيب اللاحق} - \text{الترتيب السابق}}$ **× طول الفئة الربيع الادنى**

ثانياً : خطوات إيجاد الربيع الأعلى :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

٢- ترتيب الربيع الاعلى = $\frac{\text{3مجموع التكرارات}}{4} = \frac{\sum f \times 3}{4}$

٣- الربيع الأعلى = الحد الادنى لفئة الربيع الاعلى + $\frac{\text{ترتيب الربيع الاعلى} - \text{الترتيب السابق}}{\text{الترتيب اللاحق} - \text{الترتيب السابق}}$ **× طول الفئة الربيع الاعلى**

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالجنية في مائتين محل بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب الربيع الادنى و الربيع الاعلى لأجر العامل .

أولا الربيع الأدنى :

1- الجدول التمرين :-

فئات الدرجات	f
5 -	30
15 -	20
25 -	60
35 -	50
45 - 55	40
المجموع	200

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 5	0
أقل 15	30
أقل 25	50
أقل 35	110
أقل 45	160
أقل 55	200

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

ترتيب الربيع الادنى

٢- ترتيب الربيع الادنى :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع

٣- الربيع الادنى = ٢٥ريال

ثانياً الربيع الأعلى :

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

ترتيب الربيع الاعلى

٢- ترتيب الربيع الاعلى :-

$$\frac{3\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{200\times3}{4} = 150$$

البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع

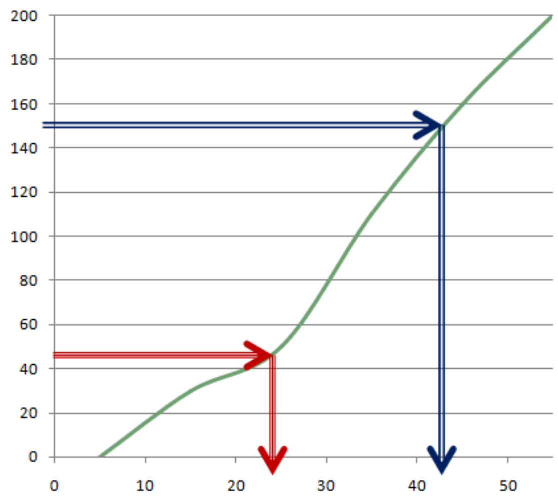
٣- الربيع الاعلى $= 35 + \frac{150-110}{160-110} \times 10 = 43$ ريال

الربيع الادنى و الاعلى من الرسم :-

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

2- المنحنى التكراري المتجمع الصاعد



مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئات الدرجات	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

المطلوب : حساب الوبيع الادنى و الربيع الاعلى لدرجات الطلاب .

1- الجدول التمرين :-

فئات الدرجات	f
0 – 10	20
10 – 20	50
20 – 30	90
30 – 40	60
40 – 50	30
المجموع	250

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 0	0
أقل 10	20
أقل 20	70
أقل 30	160
أقل 40	220
أقل 50	250

أولاً الربيع الأدنى :-

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 0	0
أقل 10	20
أقل 20	70
أقل 30	160
أقل 40	220
أقل 50	250

ترتيب الربيع الادنى

٢- ترتيب الربيع الأدنى :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = = \frac{250}{4} = 62.5$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الادنى =

$$10 + \frac{62.5 - 20}{70 - 20} \times 10 = 18.5 \text{ درجة}$$

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 0	0
أقل 10	20
أقل 20	70
أقل 30	160
أقل 40	220
أقل 50	250

ترتيب الربيع الاعلى

٢- ترتيب الربيع الأعلى :-

$$= \frac{3\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{250\times3}{4} = 187.5$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الأعلى =

$$30 + \frac{187.5 - 160}{220 - 160} \times 10 = 34.58 \text{ درجة}$$

4- المنوال :-

القيمة التي تكررت أكثر من غيرها أي القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً.

أولاً : البيانات غير المبوبة :-

مثال :-

الدرجات التالية تمثل نتائج مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة أوجد المنوال لهذه الدرجات ؟

10 , 12 , 14 , 10 , 12 , 15 , 10

المنوال هو 10 و هو القيمة الأكثر تكراراً

ثانياً المنوال من البيانات المبوبة :-

1- جدول تكراري بسيط (بدون فئات) :-

المنوال هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار

مثال :-

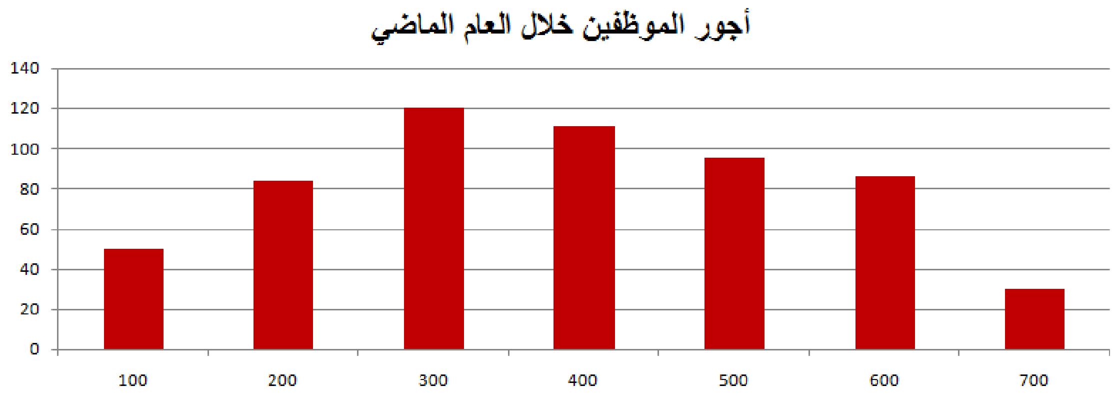
الجدول التالي يوضح أجور مجموعة من الموظفين خلال العام الماضي المطلوب حساب قيمة منوال الاجر ؟

الأجر	100	200	300	400	500	600	700
عدد العمال	50	84	120	111	95	86	30

الحل

المنوال = 300 ريال و هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار و هو 120 موظف

الأجر	100	200	300	400	500	600	700
عدد العمال	50	84	120	111	95	86	30



٢- المنوال من الجداول ذات الفئات و التكرارات :-

1- تحديد الفئة التي تقابل أكبر تكرار (الحد الأعلى للفئة والحد الأدنى وطول هذه الفئة).

٢- المنوال = الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{f_1}{f_1+f_2}$ × طول الفئة المنوالية.

f1 = أكبر تكرار – التكرار السابق

f2 = أكبر تكرار – التكرار اللاحق

مثال :-

الجدول التالي يوضح درجات مجموعة من الطلاب في مقرر الاحصاء :-

الدرجة	0 -	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 - 100
عدد الطلاب	15	20	40	90	80	45	35	22	15	12

المطلوب :- حساب قيمة المنوال لدرجات الطلاب

الفئة المنوالية

الحل

الدرجة	0 -	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 - 100
عدد الطلاب	15	20	40	90	80	45	35	22	15	12

التكرار السابق

أكبر تكرار

التكرار اللاحق

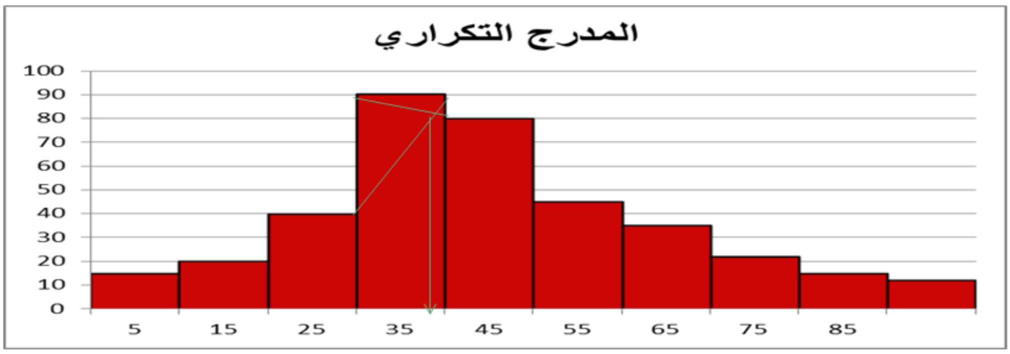
f1 = 90 - 40 = 50

f2 = 90 – 80 = 10

المنوال = 30 + $\frac{50}{50+10}$ × 10 = 38.33 درجة

المنوال من الرسم :-

الدرجة	0 -	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 - 100
عدد الطلاب	15	20	40	90	80	45	35	22	15	12



مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الدخول بالريال لمجموعة من الاسر :-

الدرجة	100-	200-	300-	400-	500-	600-	700-800
عدد الطلاب	55	68	87	95	76	52	3

المطلوب :- **حساب قيمة منوال لدخل بالنسبة لهذه الاسر .**

الحل

الفئة المنوالية

الدرجة	100-	200-	300-	400-	500-	600-	700-800
عدد الطلاب	55	68	87	95	76	52	3

التكرار السابق

أكبر تكرار

التكرار اللاحق

$$f1 = 95 - 87 = 8$$

$$f2 = 95 - 76 = 19$$

$$\text{المنوال} = 400 + \frac{8}{8+19} \times 100 = 429.63 \text{ ريال}$$

ثالثاً :- مقاييس التشتت :-

إن درجة التباعد أو التقارب بين البيانات تسمى تشتتاً , و تستخدم مقاييس التشتت في المقارنة بين مجموعات البيانات من حيث تشتتها.

كلما قل تشتت البيانات و كلما اقتربت من متوسطها كلما كانت أقرب للتجانس .

مقاييس التشتت

- المدى
- الانحراف المتوسط
- التباين
- معامل الاختلاف
- معامل الالتواء المعياري
- معامل الالتواء الربيعي

1 – المدى :-

أولاً : البيانات غير المبوبة :- هو الفرق بين أكبر مفردة و أقل مفردة .

مثال :- البيانات التالية تمثل أسعار مجموعة من تذاكر الطيران من الرياض إلى القاهرة و المطلوب حساب قيمة المدى لأسعار هذه التذاكر :-

1100 , 500 , 675 , 1300 , 968 , 1150

الحل

المدى = 1300 – 500 = 800ريال

مثال :-

البيانات التالية توضح درجات مقياس الذكاء لمجموعتين من الطلاب و المطلوب المقارنة بين المجموعتين :-

المجموعة الاولى { 100,110,50,90,130,200,160 }

المجموعة الثانية { 150,160,120,100,170,165,155 }

الحــل

المدى للمجموعة الاولى = 200 - 50 = 150 درجة

المدى للمجموعة الثانية = 170 – 100 = 70 درجة

إذاً تشتت المجموعة الأولى أكبر من المجموعة الثانية

ثانياً : المدى من البيانات المبوبة :-

المدى = الحد الأعلى للفئة الاخير – الحد الادنى للفئة الاولى

مثال :-

الجداول التالية توضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقررين دراسيين المحاسبة و الاحصاء و المطلوب بيان أي من المقررين أكثر تشتتاً ؟

درجات المحاسبة	10-	20-	30-	40-	50-60
عدد الطلاب	100	120	210	300	150

درجات الاحصاء	50-	55-	60-	65-	70-75
عدد الطلاب	250	310	420	260	100

1- المدى لدرجات المحاسبة = 60 - 10 = 50 درجة .

2- المدى لدرجات الاحصاء =75 - 50 = 25 درجة .

إذا درجات المحاسبة أكثر تشتتاً من درجات الاحصاء

2- التباين و الانحراف المعياري :-

١ – التباين :-

التباين هو متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي و يرمز له بالرمز σ^2.

٢- الانحراف المعياري :-

الجذر التربيعي للتباين و يرمز للانحراف المعياري بالرمز σ.

أولاً التباين و الانحراف المعياري من البيانات غير المبوبة :-

من بيانات المجتمع و n تمثل $X_1, X_2, \dots \dots \dots, X_n$ إذا كانت فإن التباين و الانحراف المعياري μ لها المتوسط الحسابي يحسبان بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال :-

البيانات التالية توضح أجور اليومية مجموعة من العمال بالريال و المطلوب حساب قيمة التباين و الانحراف المعياري لأجور هؤلاء العمال :-

25 , 30 , 60 , 15 ,50 ,35

الحـــل

x	25	30	60	15	50	35	$\sum x$ = 215
x^2	625	900	3600	225	2500	1225	$\sum x^2$ = 9075

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{9075}{6} - \left(\frac{215}{6}\right)^2$ = 228.47 ريال

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{228.47} = 15.1153$ ريال

مثال :-

البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطالب في مقرري الاحصاء و بحوث العمليات و المطلوب تقرير أي من درجات المقررين تعتبر أكثر تشتتاً :-

درجات الاحصاء { 13 , 18, 40 , 20 ,45 }

درجات بحوث العمليات { 35 , 40 , 28 ,30 ,48 }

الحـــل

درجات الاحصاءx	13	18	40	20	45	136
x^2	169	324	1600	400	2025	4518
درجات بحوث العمليات x	35	40	28	30	48	181
x^2	1225	1600	784	900	2304	6813

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{4518}{5} - \left(\frac{136}{5}\right)^2$ = 163.76 ريال

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{163.76} = 12.797$ درجة

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{6813}{5} - \left(\frac{181}{5}\right)^2$ = 52.16 ريال

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{52.16} = 7.222$ درجة

أي أن درجات الطلاب في مقرر الاحصاء أكثر تشتتاً من درجات بحوث العمليات