

المبحث الثالث

نموذج البرمجة الخطية وطرائق حله

في ظل ما تقدم من توضيحات حول مفهوم البرمجة الخطية واهميتها وكذلك الافتراضات والعناصر الواجب توافرها ، بالامكان توضيح الصيغة العامة للنموذج وطرائق حله وكالاتي :

أولاً : الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

بالامكان توضيح النموذج العام لاسلوب البرمجة الخطية بالقانون الرياضي الآتي [سلمان - كنعان ، ٢٠٠٠ ، ص ٩٦] :

١- دالة الهدف :

$$\text{Min or Max } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

Subject to : ٢- القيود الهيكلية :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \leq, =, \geq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \leq, =, \geq b_2$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \leq, =, \geq b_m$$

٣- قيد عدم السالبية :

$$X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_n \geq 0$$

أي ان النموذج يشمل ثلاث عناصر اساسية هي دالة الهدف والقيود الهيكلية وقيد عدم السالبية .

اذ ان :

Z : تمثل قيمة دالة الهدف (تعظيم او تدنية) .

C : معاملات دالة الهدف (ربح او كلفة الوحدة الواحدة الخ) .

X : متغيرات القرار .

a : احتياجات كل وحدة واحدة من الموارد سواء كانت مواد اولية ، الزمن ، عدد

العاملين ، الخ .

n : عدد المتغيرات .

m : عدد القيود .

b : الموارد المتاحة .

ويمكن اعادة كتابته بالصيغة الرياضية الاتية [Chiang , 1974 , P:63] :

١- دالة الهدف :

$$\text{Min or Max } Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

(j = 1 , 2 , , n)

٢- القيود الهيكلية :

$$\text{Subject to : } \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j (\leq , = , \geq) b_i$$

(i = 1 , 2 , , m)

٣- قيد عدم السالبية :

$$X_j \geq 0$$

اما بطريقة المصفوفات فيمكن كتابة النموذج بالشكل الآتي [Chiang , 1974 , P:638] :

١- دالة الهدف :

$$\text{Max or Min } C^t \bar{X} = [C_1 C_2 \dots C_n] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ M \\ M \\ X_n \end{bmatrix}$$

٢- القيود الهيكلية :

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ M & M \\ M & M \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ M \\ M \\ X_n \end{bmatrix} (\leq, =, \geq) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ M \\ M \\ b_m \end{bmatrix}$$

٣- قيد عدم السالبية : $(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 0$

او يمكن كتابته بالصيغة الرياضية الاتية :

١- دالة الهدف : $\text{Min or Max } Z = C^t \bar{X}$

٢- القيود الهيكلية: $\text{Subject to : } A X (\leq, =, \geq) b$

٣- قيد عدم السالبية: $\text{and : } X \geq 0$

حيث ان :

- A : تمثل مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود .
- X : متجه عمودي يمثل متغيرات القرار .
- b : متجه عمودي يمثل المواد المتاحة .
- C^t : متجه افقي يمثل معاملات دالة الهدف .

ثانياً : طرائق حل نموذج البرمجة الخطية

بعد ان يتم بناء النموذج الرياضي للبرمجة الخطية واكتمال جميع مكونات النموذج من القيود ودالة الهدف ، يجب استخدام بعض الطرائق للتوصل الى حل المشكلة التي تواجه أية منشأة ، ومن ابرز تلك الطرائق ما يأتي :

- ١- الطريقة البيانية Graphical Method .
- ٢- الطريقة المبسطة Simplex Method .
- ٣- طريقة النموذج المقابل The Dual Method .

١- الطريقة البيانية^(١) (Graphical Method)

تعد هذه الطريقة من اسهل الطرائق المستخدمة لحل اسلوب البرمجة الخطية ، وتمتاز هذه الطريقة بكونها تعالج المشكلات البسيطة ، اي في حالة وجود متغيرين اثنين فقط [Rayburn , 1996 , P:442] ، وفائدتها هي لتوضيح الحلول الممكنة وكيفية الحصول على الحل الامثل .

وتعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لمتغيرات المشكلة في اطار الاحداثيات الافقية والعمودية لتحديد منطقة الحل المقبول Feasible Solution (وهي منطقة مغلقة بكافة القيود الواردة في المسألة) ، ومن بعدها يتم تحديد النقاط

(١) للمزيد من التفاصيل انظر مثلاً :

١- سوانسون ، ١٩٩١ ، ص ٢٠ - ٣٦ .

٢- الوتار - الجومرد ، ١٩٩٣ ، ص ١١٩ - ١٢٨ .

3 - Dowling , 1980 , P: 273 - 286 .

المتطرفة Extrime Points (وهي النقاط التي تكون على حدود مساحة الحل المقبول) التي تعظم او تقلل دالة الهدف ، ويمكن توضيح الخطوات الرئيسة للحل بموجب هذه الطريقة بالآتي [Vonderembse & White , 1991 , P:418] ، [جابر - حسن ، ١٩٨٨ ، ص ٣١] :

- أ - صياغة المشكلة بشكل رياضي بالنسبة لدالة الهدف والقيود .
 - ب - اعتبار المتباينات في حالة مساواة ، ومن ثم يتم تمثيل القيود بشكل بياني .
 - ج- المضلع الناتج عن تقاطع انصاف المستويات يمثل منطقة الحل المقبول Feasible Solution Space والذي يتمثل بالمساحة المحاطة بالقيود التي تحقق الحل الملائم لكل القيود وتحقق دالة الهدف .
 - د - تحديد النقاط المتطرفة Extrime Points في منطقة الحل المقبول والتي تحقق القيمة العظمى او الصغرى لدالة الهدف .
- ويؤخذ على هذه الطريقة بعض الانتقادات ، اذ في حالة احتواء المشكلة المراد حلها على ثلاث متغيرات او اكثر فيصعب تمثيلها بيانياً لانها تستلزم الاستعانة بنظريات هندسية خاصة ، كما وتستلزم الدقة في الرسم للحصول على نتائج دقيقة ، مما يؤدي الى اعتبار ان هذه الطريقة محدودة الفائدة ، لذلك نلجأ الى الطريقة المبسطة Simplex Method لحل المشكلات المتعلقة بأكثر من متغيرين في المسألة [البشبيشي - آخرون ، ١٩٩٣ ، ص ٥٣] .

٢- الطريقة المبسطة^(١) (Simplex Method)

تعد الطريقة المبسطة من اهم الطرائق المعتمدة لحل مشكلات البرمجة الخطية ، لكونها تعالج المشاكل الاكثر تعقيداً والتي يتعذر حلها باستخدام الطريقة البيانية ، اي تلك المشكلات التي تتضمن عدد كبير من المتغيرات ، وتتسم هذه الطريقة بالخصائص الآتية [البشبيشي - آخرون ، ١٩٩٣ ، ص ٥٩-٦٠] :

(١) لمزيد من التفاصيل انظر مثلاً :

١- الفضل ، ٢٠٠٤ ، ص ١١١ - ١٧٤ .

2- Chiang , 1974 , P: 651 - 669 .

أ - تستخدم هذه الطريقة لحل أي نوع من مشكلات البرمجة الخطية .
ب - تقوم هذه الطريقة على اتباع خطوات متسلسلة ومتتابعة تحدد مسبقاً ، ويتم تنفيذها في كل مرحلة من مراحل الحل لحين التوصل الى الحل الامثل .
ج - توفر هذه الطريقة حلول تقع في نطاق وحدود امكانية المنشأة حتى تصل الى الحل الامثل .

د - ان هذه الطريقة تفصح عن الحل الامثل بمجرد التوصل اليه .
وللتوصل الى الحل الامثل باستخدام طريقة السمبلكس يجب اتباع الخطوات الآتية [الطائي ، ٢٠٠١ ، ص ٤١] :

الخطوة الاولى : تحويل المشكلة من الصيغة القانونية الى الصيغة القياسية وذلك عن طريق اضافة متغيرات راكدة^(١) مع مشكلات التعظيم وباشارات موجبة ، ومع مشكلات التدنية يتم طرح المتغيرات الفائضة^(٢) مع اضافة متغيرات اصطناعية^(٣) موجبة لمعادلة الاشارة السالبة وذلك لتحقيق شرط عدم السالبة .

الخطوة الثانية : تحويل المشكلة من الصيغة القياسية الى الجدولية في شكل جدول يدعى بالجدول المبسط مقسم الى عدة صفوف واعمدة ، اذ تكون الصفوف عبارة عن معاملات المتغيرات في دالة الهدف والقيود ، اما الاعمدة فتكون متمثلة بالمتغيرات الاساسية للمشكلة والمتغيرات الفائضة والاصطناعية .

(١) تمثل المتغيرات الراكدة الفرق بين الاحتياج الفعلي وال متاح من الموارد المتاحة ، اذ يتم اضافة هذه المتغيرات الى قيد اصغر او يساوي (\leq) لاجل تحويل قيود النموذج التي تكون على هيئة متباينات الى معادلات بشرط اعتبارها متغيرات اساسية ذات قيم موجبة تجعل الجانب الايسر (LHS) مساوي للجانب الايمن (RHS) من القيد .

(٢) تقيس المتغيرات الفائضة مقدار الجانب الايسر (LHS) من القيد الذي يتجاوز مقدار الجانب الايمن (RHS) ، اذ يتم طرح هذا المتغير من قيد اكبر او يساوي (\geq) وذلك ليعكس مقدار الزيادة فوق مستوى الحد الادنى من المورد .

(٣) تضاف المتغيرات الاصطناعية الى القيود التي تكون في حالة اكبر او يساوي (\geq) او في حالة المساواة (=) لاجل تحويل المتباينات الى معادلات ، وقيمتها هي كوسيلة حسابية في اجراءات البرمجة الخطية فهي لا تملك اي معنى من وجهة نظر المشكلة الاساسية لذلك سميت بالاصطناعية .

الخطوة الثالثة : يتم اختيار العمود المحوري والذي يقابل اكبر قيمة مطلقة في دالة الهدف داخل الجدول المبسط .

الخطوة الرابعة : يتم تحديد القيمة المحورية من خلال قسمة كل قيمة في عمود الثابت (b) على القيمة المقابلة لها في العمود المحوري ، وتمثل القيمة المحورية اقل ناتج قسمة موجب .

الخطوة الخامسة : يتم اختيار الصف المحوري الذي يحتوي على القيمة المحورية.

الخطوة السادسة : تحول القيمة المحورية الى العدد واحد ومن ثم يتم تحويل بقية قيم العمود المحوري الى اصفار .

الخطوة السابعة : اختبار امثلية الحل .

٣- طريقة النموذج المقابل (The Dual Method)

ان من اهم تطورات البرمجة الخطية كانت في مجال النظرية الثنائية او

طريقة النموذج المقابل The Dual .

فاذا كانت المسألة الاولية للبرمجة الخطية خاصة بتعظيم الارباح فان المسألة الثانية (المقابلة) تكون خاصة بتخفيض التكاليف ، وكذلك اذا كانت المسألة الاولية للبرمجة الخطية خاصة بتخفيض التكاليف فان هناك مسألة ثانية تكون خاصة بتعظيم الارباح ، اذ ان [الكرخي ، ٢٠٠١ ، ص ٢٨١] :

أ - الحل الامثل لدالة الهدف في المسألة الاولية والمسألة الثانية (المقابلة) متطابقتان دائماً .

ب - امكانية الحصول على قيم الحل الامثل للمسألة الثانية من قيم الحل الامثل للمسألة الاولية او العكس بالعكس .

وإذا ما اريد تحويل المسألة الاولية The Primal الى المسألة المقابلة The

Dual يتطلب الامر اجراء الآتي [الفضل ، ٢٠٠٤ ، ص ٢٢٢] :

أ - قلب مصفوفة المعاملات بحيث يصبح الصف عمود وعمود صف .

ب - تبديل رموز المتغيرات مثلاً من (X) الى (Y) ، او بالعكس .

ج - تبديل موقع القيم الحرة او قيم الجانب الايمن من النموذج مع معاملات دالة الهدف ، اذ يصبح احدهم مكان الآخر .

د - اذا كانت العلامة (\geq) تصبح (\leq) وبالعكس ، واذا كانت علامة مساواة (=) فيجب اعادة ترتيب العلاقة الرياضية وتستبدل بعلامة (\geq ، \leq) .

هـ - يتم استبدال رمز دالة الهدف في النموذج المقابل برمز مختلف عن رمز دالة الهدف في النموذج الاولي .

ولشرح ذلك سيتم كتابة المسألة الاولية والمسألة المقابلة لها حسب الصيغ

الرياضية لكل منهما بالشكل الآتي [الكرخي ، ٢٠٠١ ، ص ٢٨٨] :

المسألة الأولية :

حالة تعظيم دالة الهدف

$$\text{Maximization } \pi = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

$$\text{s.to. } a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \leq b_2$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \leq b_m$$

and : $X_1 , X_2 , \dots , X_n \geq 0$

المسألة المقابلة :

حالة تدنية دالة الهدف

$$\text{Minimization } C = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + \dots + b_m Y_m$$

$$\text{s.to. } a_{11} Y_1 + a_{21} Y_2 + \dots + a_{m1} Y_m \geq C_1$$

$$a_{12} Y_1 + a_{22} Y_2 + \dots + a_{m2} Y_m \geq C_1$$

$$a_{1n} Y_1 + a_{2n} Y_2 + \dots + a_{mn} Y_m \geq C_n$$

$$\text{and : } Y_1, Y_2, \dots, Y_m \geq 0$$

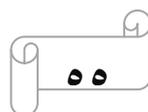
ويمكن إعادة كتابتها بصيغة المصفوفات وكالاتي [, 1974 , Chiang

: [P:677

المسألة الاولية :

حالة تعظيم دالة الهدف

$$\text{Maximization } \pi = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$



s.to.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots \dots \dots a_{2n} \\ M & M & \vdots \\ M & M & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots \dots \dots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ M \\ M \\ X_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ M \\ M \\ bm \end{bmatrix}$$

and : $X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$

المسألة المقابلة :

حالة تدنية دالة الهدف

Minimization $C = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + \dots + b_m Y_m$

s.to.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots \dots \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots \dots \dots a_{m2} \\ M & M & \vdots \\ M & M & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots \dots \dots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ M \\ M \\ Y_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ M \\ M \\ C_n \end{bmatrix}$$

and : $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \geq 0$

ولما كانت هنالك علاقة بين المسألة الاولية والمسألة المقابلة وعن طريق الحصول على نتائج متشابهة عند حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام المسألتين الاولية والمقابلة ، من هنا تكمن فوائد المسألة المقابلة والتي يمكن توضيحها بالآتي [عبد السادة ، ٢٠٠٥ ، ص ١١٦] :

أ - تساعد المسألة المقابلة في بعض الاحيان على اختزال الحل ، والتوصل الى النتائج بشكل اسرع بالمقارنة مع خطوات حل المسألة الاولية .

ب - في حال وجود قيمة سالبة لاحد متغيرات المسألة الاولية ، فان حل المسألة الاولية غير ممكن ، في حين يمكن ايجاد حل للمشكلة عن طريق المسألة المقابلة عند وجود متغير ذو قيمة سالبة .

ج - امكانية اضافة قيود جديدة للمشكلة ، وايجاد الحل الامثل لها وفقاً للقيود المضافة .

وفقاً للنظرية الاقتصادية تمثل المسألة المقابلة الارتباط بين مسألة التخصيص Allocation وبين تقييم الموارد ، اي تقرير الاسعار الملائمة والتي نعني بها اسعار الظل Shadow Prices المستخدمة لتقييم الموارد النادرة [داسكوبتا ، ٢٠٠٥ ، ص ١٦٧] ، اذ ان المسألة المقابلة توفر اسعاراً ضمنية وحسابية من خلال قيم المتغيرات الواردة في الحل الامثل ، وتستخدم هذه الاسعار (اسعار الظل) لاحتساب كفاءة تخصيص الموارد .

ويعرف سعر الظل بانه " السعر الذي ترغب المنشأة بدفعه لاتاحة وحدة اضافية من المورد المحدود ، او هو قيمة الوحدة الواحدة الاضافية من المورد بشكل وحدة واحدة من ساعات الماكنة او ساعات العمل للعاملين او اي مورد محدود آخر " [Heizer & Render , 1988 , P:97] ، ويعرف ايضاً بانه " مقدار التغير في دالة الهدف نتيجة زيادة هذا المستخدم بوحدة واحدة " [بخيت ، ٢٠٠٠ ، ص ٤٤٥] .

ويمثل سعر الظل Shadow Price القيمة المؤشرة تحت كل متغير مكمل Slack في جدول الحل الامثل ، حيث توضح قيمة سعر الظل ما اذا كان المورد نادراً او يمتاز بكونه غير نادر ، ففي حال ظهور سعر الظل لاحد الموارد في جدول الحل الامثل فإن هذا المورد يعد نادراً Scarce وان زيادة وحدة واحدة منه سوف تضيف الى دالة الهدف بقيمة تلك الزيادة والعكس صحيح ، اما الموارد الوفيرة Abundant فيكون سعرها الظلي صفراً ، اي ان القيمة الحدية لها تساوي صفراً ، وان قيمة دالة الهدف لا تتغير بتغيرها لكونها موارد فائضة اي غير نادرة.

ولما كان سعر الظل يقيس لنا مدى مساهمة الوحدة الواحدة من الموارد النادرة في قيمة دالة الهدف في جدول الحل الامثل ، فان سعر الظل يحدد لنا مقدار

الفصل الثاني البرمجة الخطية وتحليل الحساسية

الفرصة الضائعة للوحدة الواحدة من تلك الموارد ، اي يوضح لنا الضياع الاقتصادي المتأتي من قصور الامكانيات المتاحة وبالتالي عدم تحقيق هدف المنشأة للوصول الى الكفاية الاقتصادية على اسس اقتصادية سليمة .