ملزمة رياضيات الإدارة

جامعة الدمام – كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع – إدارة أعمال

(المستوى الثاني)

إعداد : Lotus , ملاك

❖ الضرب الديكارتي :

إذا كان لدينا المجموعة الغير خالية A وكذلك المجموعة B فإن حاصل الضرب A×B يسمى الضرب الديكارتي وتتكون من أزواج مرتبة (a,b)

❖ مثال :

إذا كانت $B=\{5,6\}$ $A=\{1,2,3\}$ فأوجد A×B

$A\times B=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5)(3,6)\}$

إذا كانت $Y=\{*,\$\}$ $X=\{\Delta,\blacksquare\}$ فأوجد :

$X\times Y=\{(\Delta,*),(\Delta,\$),(\blacksquare,*),(\blacksquare,\$)\}$

$Y\times X=\{(*,\Delta),(*,\blacksquare),(\$,\Delta),(\$,\blacksquare)\}$

عدد عناصر الضرب الديكارتي : 4=2×2

ملاحظة : $X\times Y \neq Y\times X$

❖ تمرين :

اوجد حاصل الضرب الديكارتي X×Y إذا كان : $Y=\{5,7\}$ $X=\{0,1,2\}$

$X\times Y=\{(0,5),(0,7),(1,5),(1,7),(2,5)(2,7)\}$

❖ الدالة :

❖ تمرين :

إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ $B=\{4,5,6\}$ فان : $f_1 = \{(1,4)(2,5)(3,6)\}$

دالة من A الى B وذلك : لان $f_{1\subset A\times B}$ حدد ما اذا كانت العلاقات التالية تمثل دوال مستخدما المجموعتين السابقتين :

تمثل دالة $f_2 = \{(1,6)(2,4)(3,5)\}$:

تمثل دالة $f_2 = \{(1,4)(2,6)\}$:

لا تمثل دالة $f_3 = \{(1,4)(2,5)(2,6)\}$:

❖ مثال :

إذا كانت : $y = f(x) = x - 2$ فأوجد $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$

$$f(0) = 0 - 2 = -2$$

$$f(1) = -1 - 2 = -3$$

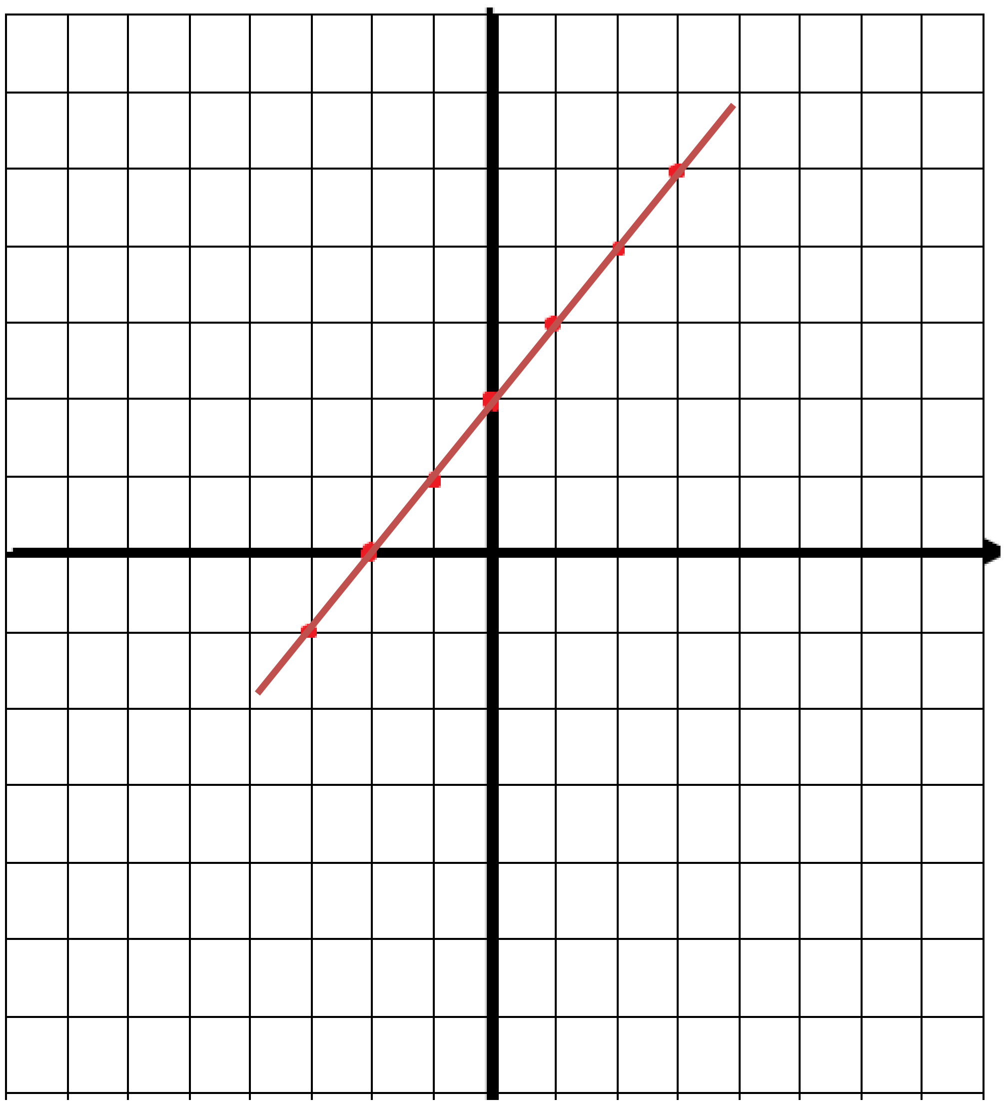
$$f(2) = 2 - 2 = 0$$

❖ التمثيل البياني للدوال :

❖ مثال :

ارسم الدالة $y = x + 2$

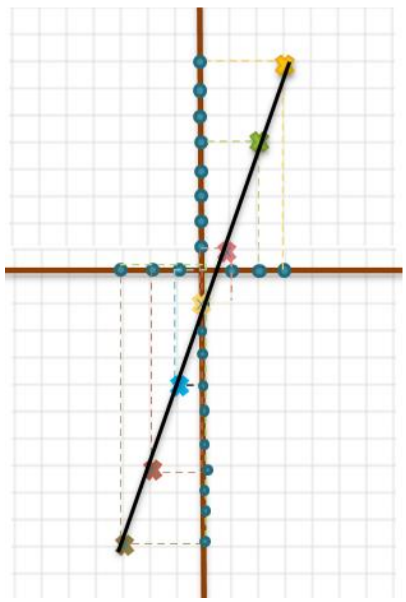
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3	4	5



❖ تمرين :

ارسم منحنى الدالة $f(x) = 3x + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	-7	-4	-1	2	5	8



المحاضرة الثانية

❖ العمليات على الدوال :

لتكن f_1 و f_2 دالتين فان :

الجمع : $(f1+f2)(x)=f1(x)+f2(x)$

الطرح : $(f1-f2)(x)=f1(x)-f2(x)$

الضرب : $(f1\cdot f2)(x)=f1(x)\cdot f2(x)$

القسمة : $\frac{f_1}{f_2}(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}, f_1(x)\neq 0$

التركيب : $(f_1{}^\circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$

❖ مثال :

اذا كانت $f_2(x)=x+2$ $f_1(x)=2x^2+5x+1$ فأوجد :

$$f_1(x)+ f_2(x) = (2x^2+5x+1)+(x+2)=2x^2+6x+3$$

$$f_1(x) . f_2(x) = (2x^2+5x+1).(x+2)$$
$$=2x^3+5x^2+x+4x^2+10x+2$$
$$=2x^3+9x^2+11x+2$$

$$f_1(x) \div f_2(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x+2}$$

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = (2x^2+5x+1)\, f(x)$$
$$=2(x+2)^2+5(x+2)+1$$
$$=2(x^2+4x+4)+5x+10+1$$
$$=2x^2+8x+8+5x+10+1$$
$$=2x^2+13x+19$$

❖ معكوس الدالة :

$y = f_1(x)$ فان معكوس الدالة كما يلي :

أولا : نجعل الدالة تساوي y

ثانيا : نوجد قيمة x

ثالثا : نستبدل x بـ y و y بـ x

رابعا : نستبدل y بـ $f_1^{-1}(x)$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ اوجد معكوس $f^{-1}(x)$

اولا : $y = 2x + 1 \quad f(x) = 2x + 1 \rightarrow$

ثانيا : نوجد x : $x = \frac{y-1}{2} \quad y = 2x + 1 \rightarrow$

ثالثا : نستبدل : $y = \frac{x-1}{2}$

رابعا : $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

إذا كانت $f(x) = 3x - 5$ اوجد معكوس $f^{-1}(x)$

اولا : $y = 3x - 5 \quad f(x) = 3x - 5 \rightarrow$

ثانيا : نوجد x : $x = \frac{y+5}{3} \quad y = 3x - 5 \rightarrow$

ثالثا : نستبدل : $y = \frac{x+5}{3}$

رابعا : $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

إذا كانت $f(x) = 2x + 3$ اوجد معكوس $f^{-1}(x)$ ومثلها بيانيا :

أولا : $y = 2x + 3 \quad \rightarrow \quad f(x) = 2x + 3$

ثانيا : نوجد x : $x = \frac{y-3}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2x + 3$

ثالثا : نستبدل : $y = \frac{x-3}{2}$

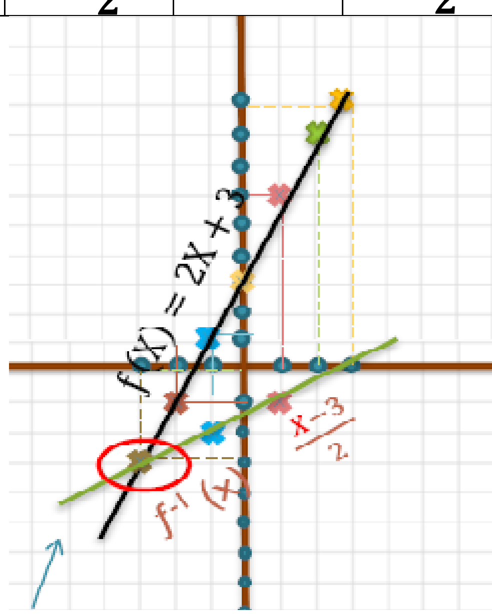
رابعا : $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$$f(x) = 2x + 3$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5	7

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$



❖ تمارين :

إذا كانت : $y = f(x) = 2x^3 + x - 1$ فأوجد $f(0)$ و $f(-1)$ و $f(2)$

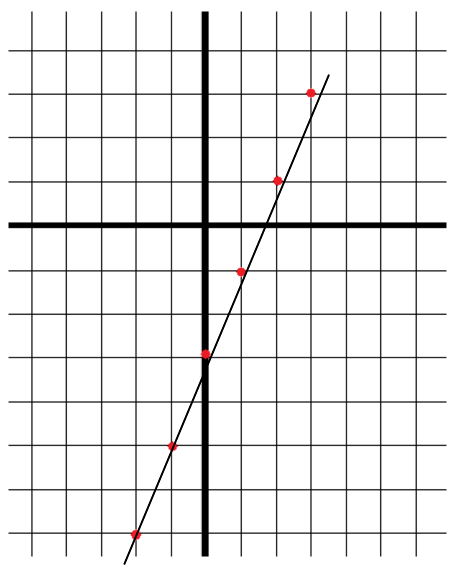
$$f(0) = 2(0)^3 + 0 - 1 = -1$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1) - 1 = -4$$

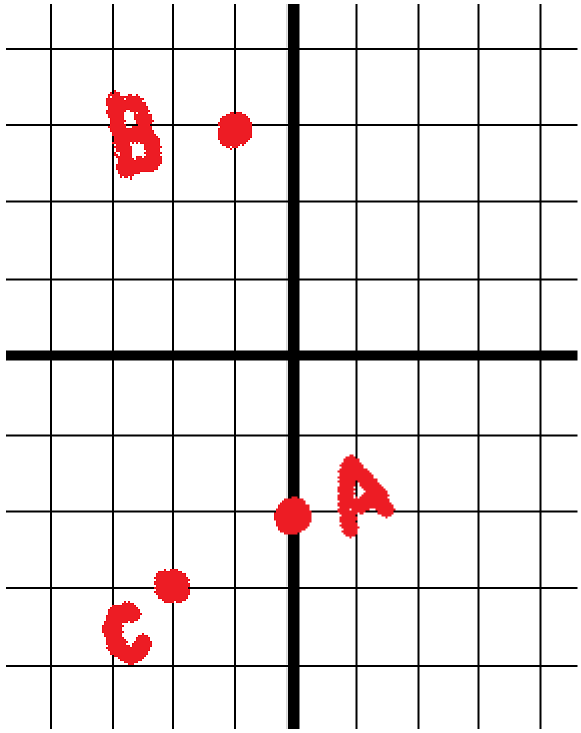
$$f(2) = 2(2)^3 + 2 - 1 = 17$$

مثل الدالة $y = 2x - 3$ في المستوى البياني :

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3



عين النقاط التالية على السطح البياني : $C = (-2,-3)$ $B = (-1,3)$ $A = (0,-2)$



اذا كانت $f_2(x) = x^2$ $f_1(x) = x+1$ فأوجد :

$(f_1 + f_2)(x) = (x+1) + (x^2) = x^2 + x + 1$

$(f_1 . f_2)(x) = (x+1)(x^2) = x^3 + x^2$

$(f_1 \div f_2)(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

$(f_1 \circ f_2)(x) = x^2 + 1$

$(f_1 - f_2)(x) = (x+1) - (x^2) = -x^2 + x + 1$

معكوس الدالة : $f^{-1}(x) = x - 1$

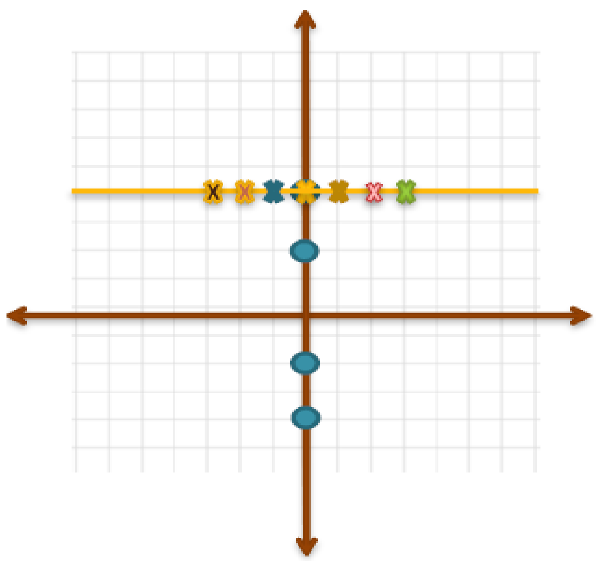
❖ أنواع الدوال :

1/ الدالة الثابتة : من خصائص الدالة الثابتة المستقيم الذي يمثلها يكون عموديا على محور y وموازيا لمحور x

❖ مثال :

مثل الدالة التالية واوجد المجال والمدى : f(x)=2

x	-2	-1	0	1	2
y	2	2	2	2	2



❖ تمرين :

مثل الدالة التالية: f(x)=-3

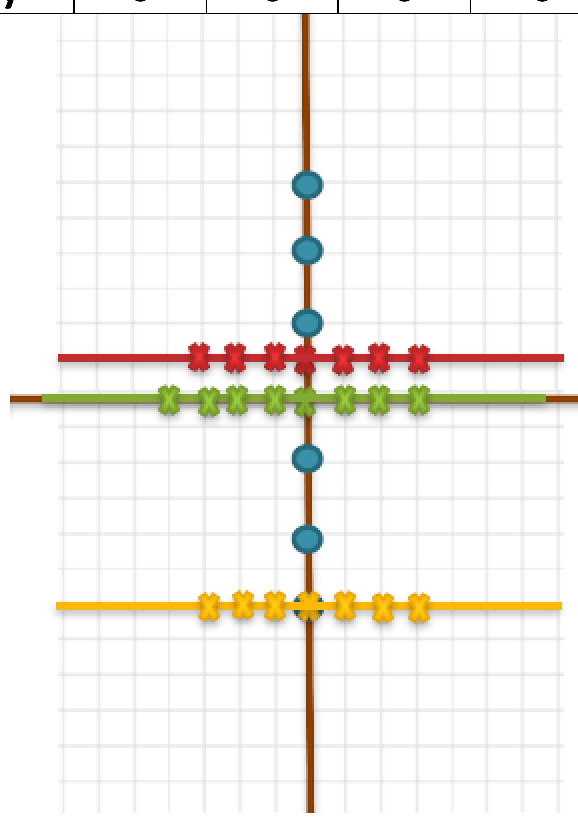
x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-3	-3	-3	-3

$$f(X) = \frac{1}{2}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$f(X) = 0$$

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	0	0	0



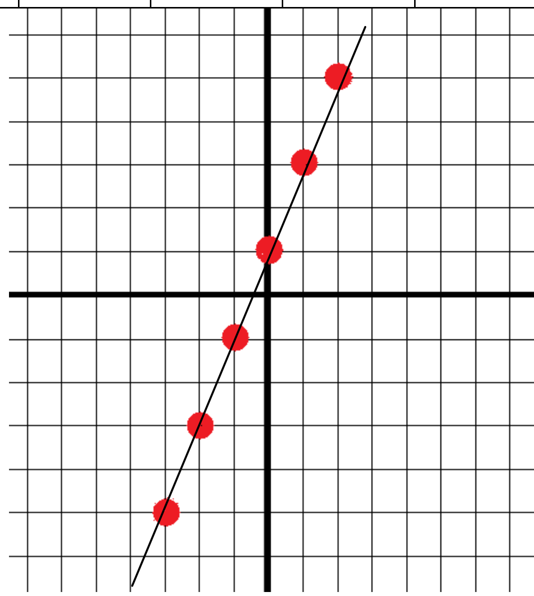
2/ الدالة الخطية :

$f(X) = mx + c$ الميل $\leftarrow m$ الجزء الذي يقطع محور $y \leftarrow c$

❖ مثال :

مثل الدالة التالية بيانيا $f(X) = 2x + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	1	3	5



❖ قانون إيجاد الميل بين نقطتين :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2$$

❖ مثال :

لدينا مستقيم يمر بالنقطتين (3,2)(-1,4) اوجد الميل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{-1-3} = \frac{2}{-4}$$

لدينا مستقيم يمر بالنقطتين $(-2,1)(-5,-3)$ اوجد الميل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-3)-1}{(-5)-(-2)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

ملاحظة : إذا كان الميل موجب فان المستقيم صاعد وإذا كان سالب فان المستقيم نازل

❖ تمرين :

احسب عدد الطاولات المصنعة عام 2012 م إذا كان المصنع قد أنتج 8000 طاولة عام 2003م ثم أنتج 12000 طاولة في عام 2004م وحافظ على نفس المعدل من الإنتاج حتى هذا العام

$$m = 12000 - 8000 = 4000$$

$$m = 4000 = \frac{y_2 - 8000}{2012 - 2003} = \frac{y_2 - 8000}{9}$$

$$4000 \times 9 = y_2 - 8000$$

$$36000 = y_2 - 8000$$

$$y_2 = 44000$$

المحاضرة الثالثة

❖ معادلة الخط المستقيم : $\boldsymbol{y = mx + c}$

❖ مثال :

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميلة 3- ويقطع محور y عند النقطة (2- , 0)

$$\boldsymbol{y = -3x - 2}$$

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميلة 2- ويمر بالنقطة (3 , 5-)

الطريقة الاولى :

$$y = mx + c$$

$$3 = -2(3) + c$$

$$c = -7$$

$$\therefore y = -2x - 7$$

الطريقة الثانية :

$$\mathrm{y} - \mathrm{y}_1 = m(x - x_1)$$

$$\mathrm{y} - 3 = -2(x + 5)$$

$$\mathrm{y} - 3 = -2x - 10$$

$$\therefore y = -2x - 7$$

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (2 , 3)(5- , 1)

اولا نوجد الميل :

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-2}{1-3} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}}$$

ثانيا نعوض في : $y = mx + c$

نستخدم احد النقطتين ولتكن (3,2)

$$2 = \frac{7}{2}(3) + c$$

$$2 = \frac{21}{2} + c$$

$$c = \frac{17}{2}$$

$$\therefore y = \frac{7}{2}x + \frac{17}{2}$$

❖ **تمرين :**

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميلة 3- ويقطع محور y عند النقطة (2 , 0)

$$\boldsymbol{y = -3x + 2}$$

❖ مثال :

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0 , 1-)(2, 5)

اولا نوجد الميل :

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 0}{2 - (-1)} = \frac{5}{3}}$$

ثانيا نعوض في : $y = mx + c$

نستخدم احد النقطتين ولتكن (-1,0)

$$0 = \frac{5}{3}(-1) + c$$

$$2 = -\frac{5}{3} + c$$

$$c = \frac{5}{3}$$

$$\therefore y = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$$

❖ تمرين :

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميلة 2- ويمر بالنقطة (1 , 3)

$$y = mx + c$$

$$3 = -2(1) + c$$

$$c = 5$$

$$\therefore y = -2x + 5$$

❖ تمرين :

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (5 , 2)(1 ,3-)

اولا نوجد الميل :

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{-3-2} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}}$$

ثانيا نعوض في : $y = mx + c$

نستخدم احد النقطتين ولتكن (2,5)

$$5 = \frac{4}{5}(2) + c$$

$$2 = \frac{8}{5} + c$$

$$c = \frac{17}{5}$$

$$\therefore y = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$$

❖ المستقيمان المتوازيان : يتوازى المستقيمان إذا كان لهم نفس الميل

❖ مثال :

اذا كان $\boldsymbol{y = 3x + 2}$ اكتب عده مستقيمات موازية لها

$\boldsymbol{y = 3x + 1}$, $\boldsymbol{y = 3x - 7}$, $\boldsymbol{y = 3x - 2}$

❖ تمرين :

اكتب معادلة مستقيم يوازي المستقيم الذي معادلته $y = -2x + 4$

$$y = -2x + 2$$

❖ **المستقيمان المتعامدان : يتعامد المستقيمان إذا كان حاصل ضرب ميلهما = -1**

❖ **مثال :**

اوجد معادلة المستقيم العمودي الذي معادلته $y = 2x + 1$

$$m_1 = 2$$

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$2 \times m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 1$$

❖ **ملاحظة :**

طريقة سهلة لإيجاد ميل المستقيم الثاني بدون عملية حسابية وهي مقلوب الميل الأول وعكس إشارته

❖ مثال :

اوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم $y = -2x + 1$ ويمر في النقطة (2,3)

$$m_1 = 2 \qquad \therefore m_2 = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + c$$

$$3 = -\frac{1}{2}(2) + c$$

$$c = 4$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$$

❖ تمرين :

اوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم $y = -2x + 1$ ويمر في النقطة (-1,3)

$$m_1 = -2 \qquad \therefore m_2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + c$$

$$3 = \frac{1}{2}(-1) + c$$

$$c = \frac{7}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

❖ حل نظام من المعادلات من الدرجة الأولى في مجهولين :

1/ طريقة التعويض :

❖ تمرين :

حل النظام التالي بطريقة التعويض $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

من المعادلة الاولى : $x = 1 + 2y$

بالتعويض بالمعادلة الثانية : $2(1 + 2y) - y = 5$

$$2 + 4y - y = 5$$

$$3y = 3$$

Y=1

بالتعويض في احد المعادلتين :

$$x - 2(1) = 1$$

$$x = 3$$

مجموعة الحل = $(3, 1)$

حل نظام المعادلة بالحاسبة :

أولا نضغط على زر MODE بعدين رقم 5 بعدين رقم 1

بيطلع لكم نظام معادلة بدون أرقام بس انتم دخلوا أرقام المعادلة المعطاة وضغط زر = للانتقال من خلية لأخرى

بالأخير نضغط زر = بيطلع لكم قيمة X

ونضغط = مره ثانية بتطلع لكم قيمة Y

2/ طريقة الحذف :

حل النظام التالي بطريقة الحذف $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

بالتعويض بالمعادلة الأولى : $3x - y = 2$

$$3(1) - y = 2$$

$$3 - y = 2$$

$$-y = -1$$

$$y = 1$$

مجموعه الحل =$(1,1)$

3 / طريقة الرسم البياني :

❖ **مثال :**

حل النظام التالي بطريقة الرسم البياني $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = -1 \end{cases}$

$$2x + 3y = 8$$

$$3y = -2x + 8$$

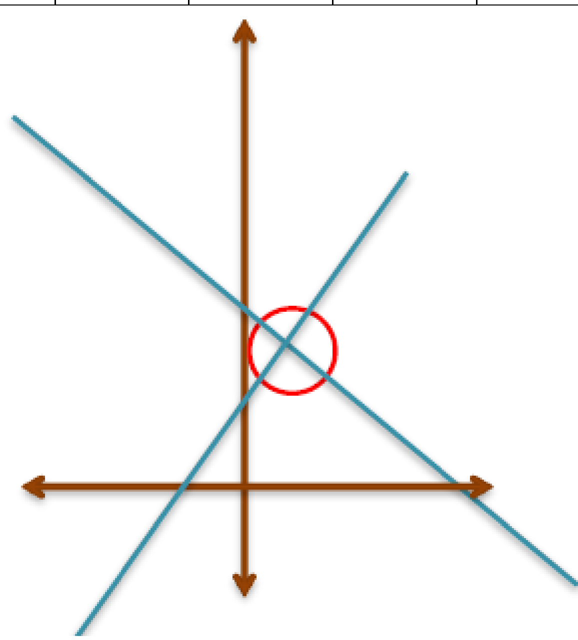
$$y = -\frac{2}{3}x + 8$$

x	-3	0	3
y	10	8	6

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = -1$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + 1$$

x	-3	-1	0	1
y	-2	0	1	2



❖ قانون المسافة بين نقطتين :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

❖ مثال :

احسب المسافة بين نقطتين $(-1,5)(3,2)$

$$d = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2} = 5$$

احسب المسافة بين نقطتين $(3,-1)(-2,0)$

$$d = \sqrt{\left(3-(-2)\right)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{26}$$

❖ تمرين :

احسب المسافة بين نقطتين $(-1,5)(2,3)$

$$d = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$$

المحاضرة الرابعة

- تطبيقات اقتصادية على الدوال الخطية :   1/ داله الطلب :
- مثال :

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة هي $q_{\mathrm{d}} = 40 - 8\mathrm{p}$

1/ الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما p=2 ريال

$$q_{\mathrm{d}} = 40 - 8\mathrm{p}$$

$$q_{\mathrm{d}} = 40 - 8 \times 2$$

$$q_{\mathrm{d}} = 24$$

2/ سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $q_{\mathrm{d}} = 15$ وحدة

$$q_{\mathrm{d}} = 40 - 8\mathrm{p}$$

$$15 = 40 - 8\mathrm{p}$$

$$8\mathrm{p} = 40 - 15$$

$$\mathrm{p} = \frac{25}{8}$$

3/ الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل

$$q_{\mathrm{d}} = 40 - 8\mathrm{p}$$

$$q_{\mathrm{d}} = 40 - 8 \times 0$$

$$q_{\mathrm{d}} = 40$$

4/ أعلى سعر يمكن أن يدفعه شخص لهذه السلعة

$$0 = 40 - 8\mathrm{p} \qquad = \quad 5$$

2/ داله العرض :

❖ مثال :

إذا كانت دالة العرض على سلعة معينة هي $q_s = 5\text{p} - 3$

1/ كمية العرض اذا كان السعر p=6 ريال

$$q_s = 5\text{p} - 3$$

$$q_s = 5 \times 6 - 3$$

$$q_{\text{d}} = 27$$

2/ اوجد سعر السلعة إذا كانت الكمية المعروضة $q_s = 15$

$$q_s = 5\text{p} - 3$$

$$15 = 5\text{p} - 3$$

$$5\text{p} = 15 + 3$$

$$\text{p} = \frac{18}{5}$$

3/ أقل سعر يمكن أن تباع به السلعة

$$0 = 5\text{p} - 3 \quad = \frac{3}{5}$$

❖ الدالة الزوجية والدالة الفردية :

1/ الدالة الزوجية : تسمى الدالة $y = f(x)$ دالة زوجية إذا تحقق الشرط التالي

$$f(x) = f(-x)$$

❖ مثال :

هل الدالة $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5$ زوجية أم لا ؟

$$f(-x) = x^4 + 2x^2 + 5$$

$$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 + 5$$

$$= x^4 + 2x^2 + 5$$

$$\therefore f(x) = f(-x)$$

الدالة زوجية

هل الدالة $f(x) = x^2 + x$ زوجية أم لا ؟

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)$$

$$= x^2 - x$$

$$\therefore f(x) \neq f(-x)$$

الدالة ليست زوجية

❖ تمرين :

هل الدالة $f(x) = x^2 + 2$ زوجية أم لا ؟

$$f(-x) = (-x)^2 + 2$$

$$= x^2 + 2$$

$$\therefore f(x) = f(-x)$$

الدالة زوجية

❖ الدالة الفردية : تسمى الدالة $y = f(x)$ دالة فردية إذا تحقق الشرط التالي

$$f(-x) = -f(x)$$

❖ مثال :

هل الدالة $f(x) = x^5 + 3x$ فردية أم لا ؟

$$f(-x) = (-x)^5 + 3(-x)$$

$$= -x^5 - 3x$$

$$\therefore f(-x) = -f(x)$$

الدالة فردية

هل الدالة $f(x) = x^3 - 1$ فردية أم لا ؟

$$f(-x) = (-x)^3 - 1$$

$$= -x^3 - 1$$

$$\therefore f(-x) = -f(x)$$

الدالة ليست فردية

هل الدالة $f(x) = x^4 + x^3 + 2$ زوجية ام فردية أو لا زوجية ولا فردية ؟

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 + 2$$

$$x^4 - x^3 + 2$$

الدالة لا زوجية ولا فردية

❖ تمرين :

هل الدالة $f(x) = x^3 + 2x + 1$ زوجية ام فردية أو لا زوجية ولا فردية ؟

$$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) + 1$$

$$-x^3 - 2x + 1$$

الدالة لا زوجية ولا فردية

هل الدالة $f(x) = x^4 + x^2 + 2$ زوجية ام فردية أو لا زوجية ولا فردية ؟

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 2$$

$$x^4 + x^2 + 2$$

الدالة زوجية

❖ الدالة التزايدية والتناقصية :

1/ الدالة التزايدية : تكون الدالة تزايدية إذا تحقق الشرط التالي $f(a) < f(b)$

2/ الدالة التناقصية : تكون الدالة تناقصية إذا تحقق الشرط التالي $f(a) > f(b)$

❖ مثال :

هل الدالة متزايدة $f(x) = x^2$ على الفترة $[2, 5]$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(5) = 5^2 = 25$$

$$f(2) < f(5)$$

الدالة تزايدية

❖ تمرين :

هل الدالة متزايدة أم تناقصية $f(x) = x^2 + 2x + 1$ على الفترة $[0, 1]$

$$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 5$$

$$f(0) < f(1)$$

الدالة تزايدية

هل الدالة متزايدة أم تناقصية $f(x) = -x + 2$ على الفترة $[-2, -1]$

$$f(-2) = -(-2) + 2 = 4$$

$$f(-1) = -(-1) + 2 = 3$$

$$f(-2) > f(-1)$$

الدالة تناقصية

المحاضرة الخامسة

❖ **الدوال المثلثية :**

معادلة دائرة الوحدة : $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$ **ومنها نستنتج :** $\boxed{cos^2 + sin^2 = 1}$

1/ داله الجيب : $\boxed{y = sin(x)}$

2/ داله جيب التمام : $\boxed{y = cos(x)}$

3/ داله الظل : $y = tan(x)$ حيث : $tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$

4/ داله ظل التمام : $y = cot(x)$ حيث : $cot(x) = \dfrac{cos(x)}{sin(x)}$

5/ داله القاطع : $y = sec(x)$ حيث : $sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$

6/ داله قاطع التمام : $y = cse(x)$ حيث : $cse(x) = \dfrac{1}{sin(x)}$

أما التفسير الهندسي لهذي الدوال كما يلي :

$$cse(x) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} \longleftrightarrow sin(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$sec(x) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \longleftrightarrow cos(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$cot(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \longleftrightarrow tan(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

❖ مثال :

اذا كانت $sin\theta = \frac{3}{4}$ $0 < \theta < 90$ تقع في الربع الأول اوجد

$cos\theta , tan\theta , sec\theta , cse\theta , cot\theta$

$$cos\theta =$$

$$cos^2 + sin^2 = 1$$

$$cos^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$$

$$cos^2 + \frac{9}{16} = 1$$

$$cos^2 = 1 - \frac{9}{16}$$

$$cos^2 = \frac{7}{16}$$

$$cos = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\boldsymbol{tan\theta =}$$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

$$tan(x) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$\boldsymbol{cot\theta = tan}$ مقلوب

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$\boldsymbol{sec\theta = cos}$ مقلوب

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$\boldsymbol{,cse\theta = sin}$ مقلوب

$$cse(x) = \frac{1}{sin(x)} = \frac{4}{3}$$

❖ مثال :

اذا كانت $\boldsymbol{cos\theta = \frac{3}{5}}$ تقع في الربع الأول اوجد بقية النسب المثلثية :

$$\boldsymbol{sin\theta =}$$

$$cos^2 + sin^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + sin^2 = 1$$

$$sin^2 = 1 - \frac{9}{25}$$

$$sin^2 = \frac{16}{25}$$

$$sin = \frac{4}{5}$$

$$\boldsymbol{tan\theta =} \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$\boldsymbol{cot\theta = tan}$ مقلوب

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} = \frac{3}{4}$$

$\boldsymbol{sec\theta = cos}$ مقلوب

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} = \frac{5}{3}$$

$\boldsymbol{cse\theta = sin}$ مقلوب

$$cse(x) = \frac{1}{sin(x)} = \frac{5}{4}$$

❖ تمرين :

اذا كانت $\boldsymbol{sin\theta = \frac{2}{5}}$ تقع في الربع الأول اوجد بقية النسب المثلثية :

$$\boldsymbol{cos\theta =} cos^2 + sin^2 = 1$$

$$cos^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1$$

$$cos^2 = 1 - \frac{4}{25}$$

$$cos^2 = \frac{21}{25}$$

$$cos^2 = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\boldsymbol{tan\theta =} \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$\boldsymbol{cot\theta = tan}$ مقلوب

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$\boldsymbol{sec\theta = cos}$ مقلوب

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} = \frac{5}{\sqrt{21}}$$

$\boldsymbol{cse\theta = sin}$ مقلوب

$$cse(x) = \frac{1}{sin(x)} = \frac{5}{2}$$

❖ مثال :

اذا كان ΔABC مثلث قائم الزاوية في $\widehat{B}$ بحيث أن $|AC| = 6$ $\quad |AB| = 4$

$sinC , cosC , tanC , secC , cseC , cotC$

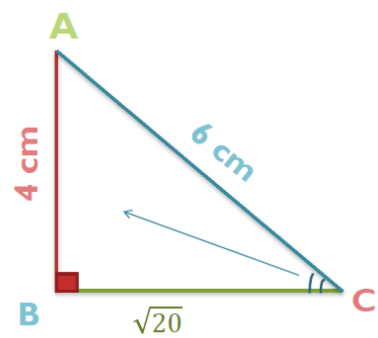
من نظرية فيتاغورس :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$(6)^2 = (4)^2 + |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 36 - 16 = 20$$

$$|BC| = \sqrt{20}$$



$$sinC = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad cotC = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\sqrt{20}}{4}$$

$$cosC = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{20}}{6} \qquad secC = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{6}{\sqrt{20}}$$

$$tanC = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{\sqrt{20}} \qquad cseC = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{3}{2}$$

❖ مثال :

اذا كان ΔABC مثلث قائم الزاوية في $\widehat{A}$ بحيث أن $|AB| = 3$ $|\mathbf{AC}| = 4$

اوجد النسب المثلثية للزاوية C:

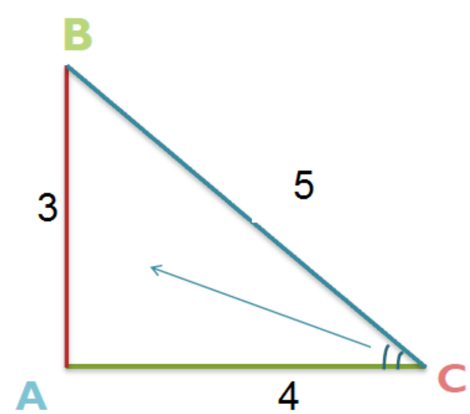
من نظرية فيتاغورس :

$$|CB|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AC}|^2$$

$$|CB|^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$|\mathbf{CB}|^2 = 16 - 9 = 25$$

$$|\mathbf{CB}| = 5$$



$$sinC = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5} \qquad cotC = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{4}{3}$$

$$cosC = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5} \qquad secC = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{4}$$

$$tanC = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4} \qquad cseC = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{5}{3}$$

❖ تمرين :

اذا كان ΔABC مثلث قائم الزاوية في $\widehat{C}$ بحيث أن $|AC| = 5$ $|BC| = 3$

اوجد النسب المثلثية للزاوية B :

من نظرية فيتاغورس :

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB|^2 = (5)^2 + (3)^2$$

$$|AB|^2 = 34$$

$$|AB| = \sqrt{34}$$

$$\sin B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \cot B = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \sec B = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

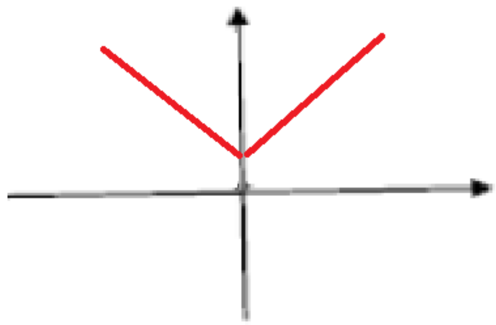
$$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{3} \qquad cse B = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

❖ داله القيمة المطلقة :

❖ تمرين :

ارسم منحنى الدالة $f(x) = |x| + 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	3	2	1	2	3



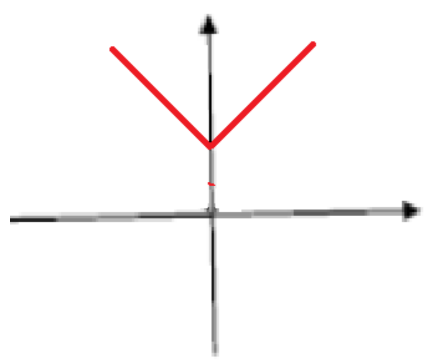
المجال = R

المدى = $(1, \infty)$

❖ تمرين :

ارسم منحنى الدالة $f(x) = |x| + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	3	2	3	4



المجال = R

المدى = $(2, \infty)$

المحاضرة السادسة

❖ **الدالة الاسية : تكتب ع الصورة** $f(x) = a^x$

من خصائص هذه الدالة أن :

- ✓ **المنحنى دائما يقطع محور y عند النقطة (0,1)**
- ✓ **هي داله تزايدية إذا كانت a > 1**
- ✓ **وهي تناقصية إذا كانت 0 < a < 1**

❖ **مثال :**

ارسم الدالة التي معادلتها $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **ثم اذكر بعض خصائصها**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

1/ الدالة تناقصية

2/ يقطع محور y في النقطة (0,1)

❖ تمرين :

ارسم الدالة التي معادلتها $f(x) = 3^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

1/ الدالة تزايدية

2/ يقطع محور y في النقطة (0,1)

❖ حل المعادلات الاسية :

❖ مثال :

حل المعادلة التالية $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+3}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{2x+3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4x+6}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x-6}$$

بما أن الأساسات متساوية فالأسس متساوية

$$x + 15 = -4x - 6$$

$$x + 4x = -6 - 1$$

$$5x = -7$$

$$x = \frac{-7}{5}$$

❖ مثال :

حل المعادلة التالية $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} = \left(\frac{16}{25}\right)^{3x+3}$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} = \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\right)^{3x+3}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6x+6}$$

بما أن الأساسات متساوية فالأسس متساوية

$$2x - 1 = 6x + 6$$

$$-4x = 7$$

$$x = -\frac{7}{4}$$

❖ تمرين :

حل المعادلة التالية $(3)^{2x+5} = (27)^{x-1}$

$$(3)^{2x+5} = ((3)^{3})^{x-1}$$

$$(3)^{2x+5} = (3)^{3x-3}$$

بما أن الأساسات متساوية فالأسس متساوية

$$2x + 5 = 3x - 3$$

$$-x = -8$$

$$x = 8$$

❖ تمرين :

حل المعادلة التالية $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{x+2}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-2} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{x+2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x-4}$$

بما أن الأساسات متساوية فالأسس متساوية

$$5x - 2 = -2x - 4$$

$$5x + 2x = -4 + 2$$

$$7x = -2$$

$$x = -\frac{2}{7}$$

❖ تطبيقات اقتصادية :

❖ قانون :

$$T = m\left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$$

❖ مثال :

وضع شخص مبلغ 75000 ريال في شركة بربح قدره 15% فما جملة هذا المبلغ بعد 5 سنوات ؟

$$T = m\left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$$

$$T = 75000\left(1 + \frac{15}{100}\right)^5$$

$$= 150851.78$$

❖ الدالة اللوغارتمية :

❖ مثال :

$$\log_2(8 \times 16)$$

$$\log_2 8 + \log_2 16$$

$$\log_2 2^3 + \log_2 2^4$$

$$= 3\log_2 2 + 4\log_2 2$$

$$3 \times 1 + 4 \times 1 = 7$$

❖ مثال :

$$\log_3\left(\frac{9}{81}\right)$$

$$\log_3 9 + \log_3 81$$

$$\log_3 3^2 + \log_3 3^4$$

$$= 2\log_3 3 + 4\log_3 3$$

$$2 \times 1 + 4 \times 1 = -2$$

❖ مثال :

$$\log_2 (32)^3$$

$$\log_2 \left(2^5\right)^3$$

$$= \log_2 12^{15}$$

$$= 15\log_2 2$$

$$15 \times 1 = 15$$

الفصل الثاني – المحاضرة السابعة

❖ **النهايات و الإتصال :**

مفهوم النهاية :

❖ **مثال :**

لنأخذ الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$ وابحث عن قيمة سلوكها بالقرب من العدد x=1

إذا عوضنا عن x=1 في هذه الدالة نجد أن ? $f(x) = \frac{1-1}{1-1}$ وهذه ليس لها معنى

وإذا كانت $x \neq 1$ فإن $f(x) = 1$ غير معرفة

وسندرس في هذا الجدول سلوك الدالة عند القرب من العدد x=1 علماً أن x=1 لا ينتمي إلى مجال الدالة f

F (x)	x>1	F (x)	x<1
1	1.05	1	0.5
1	1.01	1	0.9
1	1.001	1	0.99
1	1.0001	1	0.999

ومن المعلوم انه إذا كانت $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ فإننا نقول أن : $\lim_{x\to a} f(x)$ غير

❖ **تعريف النهاية اليسرى :**

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = m}$$

❖ تمرين :

أوجد نهاية الدالة (ابحث سلوك الدالة عند x=3 من اليمين واليسار) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

$f(x)$	X>3	$f(x)$	X<3
6,5	3,5	5,5	2,5
6,3	3,3	5,7	2,7
6,1	3,1	5,9	2,9

❖ نظرية:

تكون النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة وتساوي L ونكتب $\lim_{a^-} f(x) = L = \lim_{a^+} f(x)$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x > -1 \\ -1 & x < -1 \end{Bmatrix}$ فهل $\lim_{x\to x} f(x)$ موجودة ؟

نوجد النهايات : اليمنى : f(x) = 1 .. اليسرى : f(x) = -1

بما أن $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$ فإن الدالة ليست لها نهاية

الحل بالتفصيل : تكون النهاية موجودة إذا تحققت النظرية وهي : إذا كانت النهاية اليسرى تساوي النهاية اليمنى

نكون الجدول التالي الذي يمثل سلوك الدالة عندما $x \to -1$ و $x \to -1$

F(x)	x>-1	F(x)	x< -1
1	-0.99	-1	-1.01
1	-0.999	-1	-1.001
1	-0.9999	-1	-1.0001

نلاحظ من الجدول أن :

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$ وأيضاً $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

وبما أن النهاية اليسرى لا تساوي النهاية اليمنى فإن نهاية الدالة عند 1- غير موجودة

❖ جبر النهايات :

❖ قاعدة :

1) $\lim_{x\to a} c = c$ حيث ان c عدد ثابت ، $a \in R$

2) $\lim_{x\to a} x = a$

❖ مثال :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 1} 5 = 5$$

$$\lim_{x\to 0} -3 = -3$$

$$\lim_{x\to -2} x = -2$$

$$\lim_{x\to 3} x = 3$$

❖ نظرية :

بفرض أن $\lim_{x\to a} f(x)$ ، $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتان فإن :

- $\lim_{x\to a} [\, c.f(x)\,] = c.\lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} [\, f(x) \pm g(x)\,] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} [\, f(x) \cdot g(x)\,] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ حيث أن $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

❖ مثال :

أوجد نهاية للدالة التالية : $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3 - 5x + 4)$

$$= \lim_{x\to 2} 3x^2 - \lim_{x\to 2} 5x + \lim_{x\to 2} 4$$

$$= 3\lim_{x\to 2} x^2 - 5\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 4$$

$$= 3(2^2) - 5(2) + 4$$

$$= 12 - 10 + 4 = 6$$

طريقه أخرى للحل [بالتعويض المباشر قيمه x بـ 2]

$$\lim_{x\to 2}(3(2)^3 - 5(2) + 4)$$

$$= 3(2^2) - 5(2) + 4$$

$$= 12 - 10 + 4 = 6$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 2} :$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3 + 2x + 1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 2)} = \frac{3^3 + 2(3) + 1}{3^2 - 2} = \frac{27 + 6 + 1}{9 - 2} = \frac{34}{7}$$

❖ نظرية :

لأي كثيرة حدود ولكل a ϵ R فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

❖ نظرية :

إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ، n عدد صحيح موجب

فإن : $\sqrt[n]{L} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}$ .. L>0

❖ مثال :

احسب نهاية الدالة: $\lim_{x\to 2}\sqrt[5]{3x^2-2x}$

$$\sqrt[5]{\lim_{x\to 2}(3x^2-2x)} = \sqrt[5]{3(2^2)-2(2)} = \sqrt[5]{12-4} = \sqrt[5]{8}$$

❖ مثال :

احسب $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x\to 1} = (x+1) \quad = 1+1 = 2$$

❖ مثال :

احسب $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{-(-1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} -(x+1) \quad = -2$$

❖ تمرين :

احسب $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^2-2x+1}{x+4}$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)}=\frac{5(2)^2-2(2)+1}{2+4}=\frac{17}{6}$$

❖ تمرين :

احسب نهاية الدالة: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x^3+2x^2-x+1}$

$$\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-x+1)}=\sqrt[3]{(1)^3+2(1)^2-(1)+1}=\sqrt[3]{3}$$

❖ تمرين :

احسب

$$\lim_{x\to -1} x^3 = -1^3 = -1$$

$$\lim_{x\to 2} (3x + 1)^4 = 3(2) + 1^2 = 6+1 = 7^4 = 2401$$

$$\lim_{x\to -3} (x^3 + 2x + 1)^3 = [\,(-3)^3 + 2(-3) + 1]^3 = -8000$$

$$\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt[3]{2(2)^2 + 3(2) + 1} = \sqrt[3]{15}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

❖ نظرية :

إذا كان b عدداً ثابتاً وكانت $L = \lim_{x\to a} f(x)$ موجودة فإن :

$$\lim b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)} = b^{L}$$

❖ مثال :

احسب $\lim_{x\to 2} e^{x}$ ؟

$$= e^{\lim_{x\to 2} x} = e^2$$

❖ نظرية :

إذا كانت $L = \lim_{x\to a} f(x)$ موجودة وموجبة فإن :

$$\lim_{x\to a} \log_c f(x) = \log_c(\lim_{x\to c} f(x)) = \log_c L$$

❖ مثال :

$$\lim_{x\to 2}\log(3x^2+5) = \log\left(\lim_{x\to 2}(3x^2+5)\right) = \log(3(2)^2+5)$$

$$= \log(12+5) = \log 17$$

❖ تمرين :

$$\lim_{x\to 3}\left(e^{2x} - e^{x^2} + \log(x^2+5)\right) = \text{اوجد}$$

$$e^{2\times 3} - e^{3^2} + \log(3^2+5) = e^6 - e^9 + \log 14$$

❖ تمرين :

$$\lim_{x\to 2}\left(e^{\sqrt{x}}\log(2x^3-1)\right) = \text{اوجد}$$

$$e^{\sqrt{2}}\log(2(2)^3-1) = e^{\sqrt{2}}\log 15$$

❖ ملاحظة مهمة :

إذا كانت الدالة f(x) معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+5 \,, x \le 1 \\ 7x-2 \,, x > 1 \end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات هي :

1. a تقع ضمن مجال القاعدة الاولى
2. a تقع ضمن مجال القاعدة الثانية
3. a تقع على الحد الفاصل بين المجالي

من خلال الدالة السابقة أوجد :

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(7x-2) = 3(7)-2 = 21-2 = 19$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}}(3x^2+5) = 3(\frac{1}{2})^2+5 = 3(\frac{1}{4})+5 = \frac{3}{4}+5 = \frac{3}{4}+\frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(3x^2+5) = 3(1)^2+5 = 8$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 7x-2 = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(3x^2+5) = 8$$

المحاضرة الثامنة

- **نظرية (ساندوتش) :**

إذا كانت $\boldsymbol{f(x) \le h(x) \le g(x)}$ وكان $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)} =$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} g(x) = L}$$

فإن $\boldsymbol{\lim_{x\to a} h(x) = L}$

❖ مثال :

أوجد نهاية $\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$

بما أن $-1 \le \sin \le 1$

فإن $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$

بضرب المتباينه بـ x $-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$

$$g(x) = x$$

$$f(x) = -x$$

$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

أيضاً $\lim_{x\to 0}(-x) = 0$

حسب نظرية ساندوتش فإن :

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

❖ نظرية :

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ حيث e العدد النايبري

❖ مثال :

أوجد $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

نفرض أن : $\frac{3}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 3y$

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y} =$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^3 = e^3$$

❖ تمرين :

احسب $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^{x}$

نفرض أن : $\frac{5}{x}=\frac{1}{y}\Rightarrow x=5y$

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{5y}=$$

$$\lim_{y\to\infty}((1+\frac{1}{y})^{y})^{5}=e^{5}$$

❖ مثال :

أوجد $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x}$:

نفرض أن $\frac{-2}{x}=\frac{1}{y}\Rightarrow x=-2y$

$$\lim_{y\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{3(-2y)}$$

$$=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{-6y}=\lim_{y\to\infty}((1+\frac{1}{y})^{y})^{-6}$$

$$=e^{-6}=\frac{1}{e^{6}}$$

❖ مثال :

أوجد $\lim_{x\to\infty} (2+x)^{\frac{1}{x}}$

نفرض أن $x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{y\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} (1+\frac{1}{y})^{y} = e$$

❖ نظرية :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

❖ مثال :

أوجد نهاية= $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

نفرض ان y=3*x*

$$x = \frac{y}{3} = x = \frac{1}{3}y$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\frac{1}{3}y} = \lim_{y\to 0} \frac{3\sin y}{y}$$

$$3\lim_{x\to 0} \frac{\sin y}{y} = 3(1) = 3$$

❖ مثال :

أوجد نهاية= $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

$$= 5 \times 1 = 5$$

❖ مثال :

أوجد نهاية= $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x}$

$$= 7 \times 1 = 7$$

❖ تمرين :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\sin 7x} =$$ أوجد

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin4x}{1}\times\frac{1}{sin7x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin4x}{x}\times\frac{x}{sin7x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{sin4x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin7x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin4x}{x}\div\lim_{x\to 0}\frac{sin7x}{x}=4(1)\div 7(1)=\frac{4}{7}$$

❖ تمرين :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x} =$$ أوجد

$$=\frac{5}{3}$$

❖ تمرين :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{\sin 5x} =$$ أوجد

$$=\frac{6}{5}$$

❖ مثال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$ أوجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\times\frac{1}{cosx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx}$$

$$=1\times\frac{1}{cosx}=1\times 1=1$$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، فأوجد $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

نكون الجدول التالي الذي يبين سلوك الدالة عندما $x \to 0^-$ و$x \to 0^+$

F(x)	x< 0	F(x)	x> 0
1	-1	1	1
100	-0.1	100	0.1
1000	-0.01	1000	0.01
1000000	-0.001	1000000	0.001

ونلاحظ ان قيم *f(x)* تزداد بدون حد عندما تقترب *x* من الصفر ونقول ان *f(x)* تؤول إلى مالانهاية

ونرمز لها بالرمز ∞ عندما تقترب *x* من الصفر أي ان : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

المحاضرة التاسعة

- ❖ نهاية المقادير غير المحدودة عند :

1) أسلوب التحليل :

- ❖ مثال :

أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

نقوم بعملية التحليل لأن هذا المقدار لو عوضنا عن قيمة x=1 لأصبح لدينا حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

- ❖ تمرين :

أوجد $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

2) أسلوب الضرب في المرافق

- ❖ مثال :

أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cancel{+3}\cancel{-3}}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

❖ تمرين :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$ أوجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cancel{5}-\cancel{5}}{x(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

❖ النهاية عندما $x\to\infty$

❖ مثال :

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{2x^2-4}$ أوجد

الطريقة المتبعة هي قسمة كل من البسط والمقام على x بأعلى قوة فيصبح لدينا القسمه x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{2x^2-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2-\frac{4}{x^2}}$$

$$\frac{3+\frac{5}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}}=\frac{3+0}{2-0}=\frac{3}{2}$$

❖ نظرية :

1/ $\lim_{x\to\infty} c = c$ ، حيث c عدد حقيقي

2/ إذا كان n عدد نسبي موجب وكان c عدد حقيقي فإن $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0$$

❖ مثال :

أوجد :

- $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^{10}} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{7} = \sqrt{7}$
- $\lim_{x\to\infty} -5 = -5$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{-6}{\frac{2}{x^5}} = 0$

❖ ملاحظة مهمة :

إذا كان لدينا كثيرة حدود f(x) , g(x) وكان $\lim_{\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

فأننا ننقسم من البسط والمقام علىXبأكبر قوه مع ملاحظه:

1)إذا كانت قوه البسط اكبر من قوه المقام فالنهاية تساوي ∞

2)إذا كانت قوه المقام اكبر من قوه البسط فإنها تساوي (صفر)

3)أما إذا كانت تساوت قوه البسط مع قوه المقام فان النهاية تساوي قسمه المعاملين للمتغير بأكبر قوه

❖ مثال :

احسب

- $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+4x+3}{3x^2+2x+1} = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+1}{5x^6-2x^2+5} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+2x^3-3}{2x^4-5x^2+3x} = \frac{3}{2}$

❖ **تطبيقات على النهايات :**

1) الدخل :

❖ **مثال :**

إذا كان الدخل بالريال لأحد مزارعي النخيل هوF(x)=10000_10000e

حيث xتمثل عدد العمال الذين يعملون بالمزرعه , المطلوب :

أ) اوجد الدخل عندما تكون x = 30

$$f(30) = 10000 - 10000e^{-0,010(30)} = 10000 - 10000e^{-0,3}$$
$$10000 - 10000(0,7408) \approx 10000 - 7408 \approx 2591,8 \approx 2592$$

ب) اوجد الدخل عندما تكون x=300

$$f(300) = 10000 - 10000e^{-0,010(300)} = 10000 - 10000e^{-3}$$
$$10000 - 10000(0,0497) = 10000 - 497,87 \approx 9502$$

ج)اوجد اكبر دخل يتوقعه المزارع

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (10000 - 10000e^{-0,010x}$$

$$\lim_{x\to\infty} (10000 - 10000e^{-0,010(\infty)}) = 10000 - 10000(0) = 10000$$

❖ **تمرين :**

إذا كان الدخل بالريال لأحد المصانع هو $f(x) = 2000 - 1000e^{-0.1x}$

حيث xتمثل عدد الموظفين المطلوب :

ت) اوجد الدخل عندما تكون x = 50

$$f(50) = 2000 - 1000e^{-0,1(50)} = 1993$$

ث) اوجد الدخل عندما تكون x=200

$$f(300) = 2000 - 1000e^{-0,1(200)} = 1999.9$$

ج)اوجد اكبر دخل متوقع

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(2000 - 1000e^{-0,1(\infty)}\right) = 2000 - 1000(0) = 2000$$

2) الفائدة المستمرة :

❖ قاعدة :

$$m = se^{-nh}$$

$m =$ المبلغ

$h =$ السنوات

❖ مثال :

وضع 10 ريال بربح مستمر 5% فبعد كم سنه تصبح جمله هذا المبلغ 20 ريال ؟

$$m = se^{-nh}$$

$$10 = 20e^{-0,05h}$$

بقسمة الطرفين على 20

$$\frac{1}{2} = e^{-0,05h}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-0,05h}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -0,05h\ \ln e$$

$$\ln\frac{1}{2} = -0,05h(1)$$

$$\ln\frac{1}{2} = -0,05h$$

$$\therefore h = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0,05} = \frac{-0,693}{-0,05} = 13,86 \approx 14$$

❖ تمرين :

وضع 30000 ريال بربح مستمر 15% فبعد كم سنه تصبح جمله هذا المبلغ 50000 ريال ؟

$$m = se^{-nh}$$

$$30000 = 50000e^{-0,15h}$$

بقسمة الطرفين على 50000

$$\frac{3}{5} = e^{-0,15h}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$\ln\frac{3}{5} = \ln e^{-0,15h}$$

$$\ln\frac{3}{5} = -0,15h \ \ln e$$

$$\ln\frac{3}{5} = -0,15h(1)$$

$$\ln\frac{3}{5} = -0,15h$$

$$\therefore h = \frac{\ln\frac{3}{5}}{-0,15} \approx 3.4$$

المحاضرة العاشرة

- **الاتصال :**
- **تعريف :**

نقول أن الدالة f(x) متصلة عند النقطة c إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

1- f(c) معرفه
2- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ موجوده
3- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \;= f(c)$

- **تعريف :**

تكون الدالة f(x) متصلة في الفترة I إذا كانت متصلة عند جميع النقاط الواقعة في هذه الفترة .

- **مثال :**

اثبت ان الداله $f(x) = \begin{cases} x & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$ غير متصله عند x= 1

التأكد من الشروط الثلاثة

F(1)=2معرفة

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$$ النهاية موجودة

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

$$1 \neq 2$$

الشرط الثالث غير متحقق اذن غير متصلة

❖ مثال :

اثبت ان الداله $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ غير متصله عندما x = -1

$$f(c)=f(-1)=\frac{-1^2-1}{-1+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

الدالة غير معرفيه عندما x=-1 ، الشرط الأول لم يتحقق وبالتالي فإن الدالة غير متصلة عندما x=-1

❖ مثال :

اثبت ان الداله التاليه $f(x)=\begin{Bmatrix} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{Bmatrix}$ متصله عند x=0

نتأكد من تحقق الشروط الثلاثة

F(c)=f(0)=0

$$\lim_{x\to 0^+} x=0 \qquad , \lim_{x\to 0^-} \quad x=0$$

0=0

الدالة متصلة عندما x=0

❖ مثال :

اثبت ان الداله $f(x)=x$ متصله عند x=2

F(c)=f(2)=2

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2 \qquad , \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(c)$$

2=2

الدالة متصلة

❖ تمرين :

ابحث الاتصال الدالة التاليه :

$f(x) = \begin{Bmatrix} 2x-3 & x \neq 3 \\ 2 & ,x = 3 \end{Bmatrix}$ عند x = 3

$$1- \quad f(c) = f(3) = 2$$

$$2- \quad \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x-3) = \ (2(3)-3) = 3$$

$$3- \quad f(c) \neq \lim_{x\to 3} f(x)$$

$$2 \neq 3$$

الدالة غير متصلة

❖ تمرين :

ابحث الاتصال الدالة التاليه :

$f(x)\frac{x^2+1}{2x}$ عند x=2

$$1- \quad f(c) = f(2) = \frac{(2)^2+1}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

$$2- \quad \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(2)^2+1}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

$$3- \quad f(c) = \lim_{x\to 3} f(x)$$

$$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

الدالة متصلة

❖ تمرين :

ابحث الاتصال الدالة التاليه :

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ عند x=1

$1 - \quad f(c) = f(1) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$ غير معرفة

الدالة غير متصلة

الفصل الثالث – المحاضره الحادية عشر .

- **مشتقات الدوال الجبرية :**

1. متوسط التغير

إذا كانت y = f (x) دالة وكانت x_1 ، x_2 نقطتين في مجال الدالة فإن المقدار $x_2 - x_1$ يسمى التغير في x ويرمز له بالرمز

$\Delta x = x_2 - x_1$ ويقرأ [دلتا x]

كما يسمى المقدار $f(x_2) - f(x_1)$ التغير في الدالة ويرمز له بالرمز $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$

كما يسمى الكسر :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

متوسط التغير في الدالة عندما تتغير x من x_1 إلى x_2

- **مثال**

إذا كانت $f(x) = x^2 + 3$ فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من 1 إلى 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{7 - 4}{2 - 1} = 3$$

❖ مثال :

1) إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$ فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من 1 إلى 3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{17 - 3}{3 - 1} = \frac{14}{2} = 7$$

❖ تمرين

1) إذا كانت $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من -1 إلى 0

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 6}{0 - (-1)} = \frac{-5}{1} = -5$$

2) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x} + 2$ فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من 2 إلى 3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(\sqrt{3} + 2) - (\sqrt{2} + 2)}{3 - 2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

2. مفهوم المشتقه :

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x$ أوجد $f'(x)$

الحل : $f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x^2 + 3$ أوجد $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(x)}{x - 1}$$

$$= \frac{(x^2 + 3) - (1 + 3)}{x - 1} = \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}$$

$$\lim_{x\to 1} = (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x^2$ أوجد $f'(1)$

$$f'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$$

$$\lim_{x\to 1} = \frac{(x - 1) - (x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} = (x + 1) = 2$$

❖ تمرين

إذا كانت $f(x) = x^3 - 2x$ أوجد $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= \frac{(x^3+2x) - \left(1^3 - 2(3)\right)}{x-1} == \frac{(x^3+2x)-(-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^3 - 2x + 1}{x-1}$$

3. جبر الاشتقاق

يمكن حساب المشتقات بالإعتماد على بعض نظريات الاشتقاق التي نلخصها كما يلي :

ملاحظة : [رمز المشتقة للدالة y = f (x)]

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = d_x f(x) = d_x y$$

.A

إذا كانت $f(x) = mx + b$ فإن : $f'(x) = m$

❖ مثال

1) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = 3x + 2$

$$f'(x) = 3$$

2) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = -5x - 1$

$$f'(x) = -5$$

❖ تمرين

أوجد مشتقه الدالة $f(x) = \frac{-2}{5}x - 2$

$$\frac{-2}{5}$$

B. إذا كانت $f(x) = c$ فإن : $f'(x) = 0$

❖ مثال:

1) أوجد مشتقة $f(x) = 5$ ، $f(x) = -3$

$$f'(x) = 0$$

2) إذا كانت $f(x) = \sqrt{3}$ أوجد $f'(x)$

$$f'(x) = 0$$

❖ تمرين:

أوجد مشتقة مايلي :

$$f(x) = \sqrt{7}$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{-3}{4}x + 6$$

$$f'(x) = \frac{-3}{4}$$

.c

إذا كانت $n \in Q$ عدد نسبي ، $f(x) = x^n$ فإن : $f'(x) = nx^{n-1}$

وحتى تكون المشتقة معرفة يجب أن تكون $x \neq 0$ عندما $n \leq 0$

❖ مثال :

$$f(x) = 3x^5 - 2x^2$$

$$f'(x) = 3 * 5x^4 - 2 * 2x$$

$$= 15x^4 - 4x$$

❖ مثال:

أوجد مشتقة مايلي :

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^{n-1} \quad = 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = x^{-2} \quad = -2x^{-2-1} \qquad = -2x^{-3}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5} \quad = x^{\frac{5}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}$$

$$= \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-\frac{3}{3}} \qquad = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3$$

$$= 15x^2 + 4x - 0$$

$$= 15x^2 + 4x$$

❖ مثال :

$f'(x)$ أوجد $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} \qquad \Rightarrow f'(x)$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} \quad = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-\frac{4}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \quad = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} \qquad = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

❖ تمرين :

أوجد مشتقة مايلي :

$$f(x) = x^5 = \quad 3x^4$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^4} = 3x^{-4} \quad = -12x^{-5} \qquad = \frac{-2}{x^5}$$

.D

المشتقة لمجموع عدة دوال بالنسبة للمتغير المستقل يساوي مجموع المشتقات لهذه الدوال بالنسبة لنفس المتغير المستقل أي ان : إذا كانت الدوال التالية $f(x)$ ، $g(x)$ فإن :

$$\frac{d}{dx} = (f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

وكذلك في عملية الطرح

❖ مثال

أوجد مشتقة مايلي : $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} = (5x^4) + \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 20x^3 - 6x + 2$$

❖ مثال

أوجد مشتقة مايلي : $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$

$$6x^2 - 8x + 5$$

.E المشتقة لحاصل ضرب دالتين = مشتقة الدالة الأولى x الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية x الدالة الأولى

[الضرب عملية إبدالية]

❖ مثال

أوجد مشتقه الدالة $f(x) = (x^2 - 3)(5x + 1)$

$$f'(x) = (x^2 - 3)'(5x + 1)'(x^2 - 3)$$

$$= (2x)(5)(x^2 - 3)$$

$$= 10x^2 + 2x + 5x^2 - 15$$

$$= 15x^2 + 2x - 15$$

.F المشتقة لخارج قسمة دالتين = (مشتقة البسط x المقام – مشتقة المقام x البسط)

❖ مثال :

$$1.\ \ f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{x^2+2}$$

$$f'(x) = \frac{(6x-5)(x^2+2)-(2x)(3x^2-5x+2)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{(6x^3+12x-5x^2-10)-(6x^3-10x^2+4x)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^3+8x+5x^2-10}{(x^2+2)^2}$$

❖ تمرين :

أوجد مشتقة الدوال التالية :

$$1.\ \ f(x) = (x^2-2x)(x-1)$$

$$f'(x) = (2\mathrm{x}-2)(x-1)+(x^2-2x)(1)$$

$$= (2\mathrm{x}^2-2x-2x+2)+(x^2-2x)$$

$$= 3\mathrm{x}^2-6x+2$$

$$2.\ \ f(x) = (x^3+x)(-2x)$$

$$f'(x) = (3\mathrm{x}^2+1)(-2x)+(x^3-x)(-2)$$

$$= (-6\mathrm{x}^3-2x)+(-2x^3-2x)$$

$$= -8\mathrm{x}^3-4x$$

3. $f(x) = \frac{x^3 - 5x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 5)(x+1) - (x^3 - 5x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(3x^3 - 5x + 3x^2 - 5) - (x^3 - 5x)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{(x+1)^2}$$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2 - 4) - (x)(2x)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 4) - (2x^2)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$$

المحاضرة الثانية عشر

.G

مشتقة مقلوب الدالة $\frac{d}{dx} = (\frac{1}{f(x)}) = -\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{f(x)^2}$

❖ مثال

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ أوجد $f'(x)$

بتطبيق القاعدة $-\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{f(x)^2}$

أو طريقة ثانية $f'(x) = x^{-1}$

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

❖ تمرين

اوجد مشتقة الدالة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x + 5}$$

$$\grave{f}(x) = -\frac{3x^2 - 4x}{(x^3 - 2x + 5)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\grave{f}(x) = -\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

.H

قاعدة السلسلة :

إذا كانت $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ فإن : $= f'(u)g'(x)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} =$
$f'(\, g(x)\,)\, g'(x)$

❖ **مثال**

أوجد المشتقة للدالة $y = (3x^2 + 2x - 4)^3$

نفرض أن $u = 3x^2 + 2x - 4$

$$\frac{du}{dx} = 2.3x + 2$$

$$y' = 3u^2.du \quad = 3(3x^2 + 2x - 4)^2\,(6x + 2)$$

❖ **مثال**

إذا كانت $y = (2x^4 - 3x^2 + 1)^5$ **أوجد** $\frac{dy}{dx}$

نفرض أن $u = (2x^4 - 3x^2 + 1)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 6x$$

$$y = u^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5u^4.du$$

$$y' = 5(2x^2 - 3x^2 + 1).(8x^3 - 6x^2)$$

❖ مثال

أوجد مشتقة $y = (3x^2 + 5x - 2)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(3x^2 + 5x - 2)^2 . (6x + 5)$$

❖ مثال

أوجد مشتقة $y = (2x^5 + 3x^3 - 2x + 1)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x^5 + 3x^3 - 2x + 1)^2\,(10x^4 + 9x^2 - 2)$$

❖ تمرين

إذا كانت $y = (3x^2 - 5x + 3)^4$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 4(3x^2 - 5x + 3)^3\,(6x - 5)$$

.ا

إذا كانت : $y = 3u^2 + 5u + 2$ وكانت $x = 7u - 2$

فأوجد $\frac{dx}{du}$ ، $\frac{dy}{du}$

$$\frac{dy}{du} = 6u = 7 \quad \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{7}$$

ثم أوجد $\frac{dy}{dx}$

نطبق قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (6u + 5)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{6u+5}{7}$$

❖ مثال

إذا كانت $y = 3u^2 - 5u + 3$ ، $x = 5u + 2$ أوجد $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{dx}{du}$ ثم أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = 6u - 5$$

$$\frac{dx}{du} = 5$$

$$= \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (6u - 5)\left(\frac{1}{5}\right) \quad = \frac{6u - 5}{5}$$

❖ تمرين 1

إذا كانت $f(x) = (-2x^5 + 3x)^3$ فأوجد $f'(x)$

$$f'(x) = 3(-2x^5 + 3x)^2(-10x + 3)$$

❖ تمرين 2

إذا كانت $y = 2u^3 - 3u + 1$ وكانت $x = 5u^2 - 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{du} = 10u$$

$$\frac{dy}{du} = 6u^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (6u^2 - 3)\left(\frac{1}{10u}\right) \quad = \frac{6u^2 - 3}{10u}$$

❖ تمرين 3

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $u = x + 2$ ، $y = \sqrt{u}$

$$\frac{dy}{du} = u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(1) \quad = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

A. الاشتقاق الضمني

❖ مثال

$$x^2 + y^2 = 10$$

الحل :

نجري عملية الاشتقاق بالنسبة لـِx

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

بطريقة أخرى نستطيع إيجاد المشتقة أولا بإيجاد قيمة Y ثم نشتق بالنسبة لـِ X

$$x^2 + y^2 = 10$$

الحل :

$$y^2 = 10 - x^2$$

$$y = \sqrt{10 - x^2}$$

$$y = (10 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(10 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2(10 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{10 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

❖ مثال

$$4x^2 + xy - 3y^2 = 0$$

$$8x + y + \frac{dy}{dx}x - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}x - 6y\frac{dy}{dx} = -8x + y$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 6y) = -8x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x + y}{x - 6y}$$

❖ تمرين

$$2x^3 + xy^2 - y = 0$$

$$6x + 2y + \frac{dy}{dx} \cdot 2x - 1\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot 2x - 1\frac{dy}{dx} = -6x^2 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 1) = -6x^2 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{= -6x^2 - 2y}{(2x - 1)}$$

❖ مثال

اوجد المشتقة الثانية للدالة

$$f(x) = x^3 - 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f''(x) = 6x$$

❖ تمارين

1) اوجد المشتقه للدوال التاليه :

$$a)\ y = \frac{x+3}{x-1} \qquad ,x \neq 1$$

$$y` = \frac{(1)(x-1) - (x+3)(1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - (x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$b)\ y = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 5)$$

$$y` = (2x - 3)(x^2 + 5) + (x^2 - 3x + 1)(2x)$$

$$= 2x^3 + 10x - 3x^2 - 15 + 2x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$= 4x^3 - 9x^2 + 12x - 15$$

2) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

$$y = u^3 - 2u$$
$$u = x^2 - 5x + 6$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (3u^2 - 2)(2x - 5) \quad = \frac{3u^2 - 2}{2x - 5}$$

إذا كانت $y = f(x) = 3x^2 + 4x$ فأوجد :

$a)\ y'$ عندما $x = 0$

$$y` = 6x + 4$$

$$f(0) = 6(0) + 4 = 4$$

b) $f'(1)$

$$y` = 6x + 4$$

$$f(1) = 6(1) + 4 = 10$$

$c)\ \frac{dy}{dx}$ عندما $x = -1$

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 4 = 6(-1) + 4 = -2$$

4) أوجد مشتقة الدوال التاليه :

$$a) y = \frac{1}{2x+3}$$

$$= -\frac{2}{(2x+3)^2}$$

$$b)\ y = \sqrt[3]{x^2+2}$$

$$y = (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\grave{y} = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{2}{3}}$$

c) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

$$1)\ x + y = 5$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 - 1$$

$$2)\ x^2 + 3xy + y^2 = 4$$

$$2x + 3y + 3x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 4$$

$$3x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - 3y + 4$$

$$\frac{dy}{dx}(3x+2y) = -2x - 3y + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 3y + 4}{3x + 2y}$$

5) أوجد المشتقه الثانيه للداله :

$$f(x) = \frac{3x+7}{2x-9}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{(3)(2x-9)-(2)(3x+7)}{(2x-9)^2}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{(6x-27)-(6x+14)}{(2x-9)^2}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(0)(2x-9)^2-2(2x-9)(13)}{((2x-9)^2)^2}$$

$$= \frac{(4x-18)(13)}{(2x-9)^4}$$

$$= \frac{52x-234}{(2x-9)^4}$$

المحاضرة الثالثة عشر

❖ **تطبيقات التفاضل على سلوك المنحنيات**

المشتقة الأولى هندسياً : تفسر المشتقة الأولى هندسياً على أنها ميل المماس

لمنحنى الدلة $y = f(x)$ عند النقطه $(a,f(a))$

❖ **مثال :**

إذا كانت $f(x) = x^2+2$
فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطه $x=2$
نوجد المشتقة الأولى $F'(X) = 2X$
نعوّض ب النقطة (2) $F'(2) = 2(2) = 4$

❖ **مثال :**

إذا كانت $f(x) = x^2+3X$
فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطه $x=2$
نوجد المشتقة الأولى $F'(X) = 2X+3$
نعوّض ب النقطه (2) $F'(2) = 2(2)+3 = 7$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x^2-2X$

فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطه x=1

نوجد المشتقة الأولى $F'(X) = 2X-2$

نعوّض ب النقطة 1 ($F'(2) = 2(1)-2= 0$)

المماس موازي لمحور x

❖ القيم العظمى و القيم الصغرى المحلية ومجالات التزايد والتناقص :

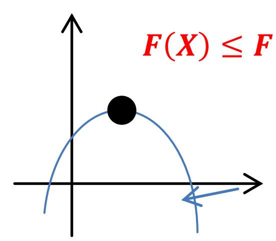
إذا كانت C نقطه في مجال الدالة F فإن

F قيمة عظمى محليه للدالة F(C)

إذا وجدت فتره مفتوحة (a,b) تحتوي على C بحيث أن

$F(X) \le F(C)$

لجميع قيّم X ف الفترة



ملاحظه : إذا كان التغيّر في سلوك الدالة عند النقطة (C,f(c)) من <u>التزايد</u> قبلها إلى <u>التناقص</u> بعدها فإننا نقول أن النقطة (C,f(c)) ,

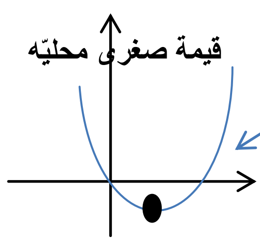
<u>قيمة عظمى محليّه</u> .

F قيمة صغرى محليه للدالة F(C)

إذا وجدت فتره مفتوحة (a,b) تحتوي على C بحيث أن

$F(X) \ge F(C)$

لجميع قيّم X ف الفترة



ملاحظه : إذا كان التغيّر في سلوك الدالة عند النقطة (C,f(c)) من <u>التناقص</u> قبلها إلى <u>التزايد</u> بعدها فإن نقول أن النقطة (C,f(c)) ,

<u>قيمة صغرى محليّه</u> .

❖ مثال :

مثال : إذا كان $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$

فما هي نقاط القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت ؟

الحل :

1) $F'(x) = 8x - 2$

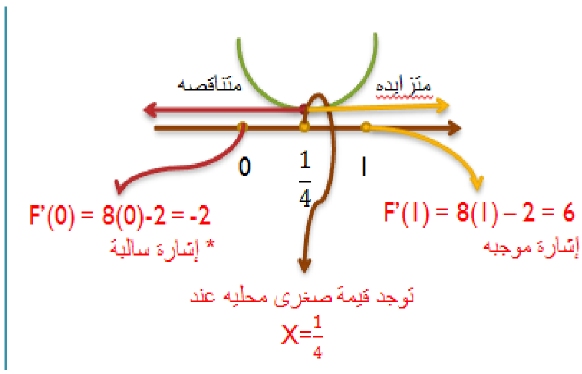
2) نوجد أصفار المشتقة الأولى :

$F'(x) = 0 \qquad 8x - 2 = 0$

$8x = 2 \qquad x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

3) لتحديد النقاط عند $x = \frac{1}{4}$

نبحث إشارة $f'(x)$ قبل وبعد $x = \frac{1}{4}$



❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = -2^2+3x-2$

فأوجد القيمة العظمى والصغرى المحلية إن وجدت ومجالات التزايد والتناقص .

1) $F'(x) = -4x + 3$

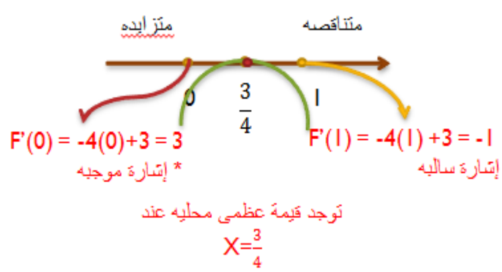
2) نوجد أصفار المشتقه الأولى :

$F'(x) = 0 \qquad -4x + 3 = 0$

$-4x = -3 \qquad x = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

3) لتحديد النقاط عند $x = \frac{3}{4}$

نبحث إشارة $f'(x)$ قبل وبعد $x = \frac{3}{4}$



مجالات التزايد والتناقص :

متزايده $(-\infty, \frac{3}{4}]$

متناقصه $[\frac{3}{4}, \infty)$

❖ تمرين :

1) إذا كانت $f(X)=3X^{2}-5X+1$

فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند X=2

$$f'(X)=6X-5$$

$$f'(2)=6(2)-5=7$$

ميل المماس يساوي 7

2) إذا كانت $f(X)=5X^{2}+20X-5$

فأوجد القيم العظمى أو الصغرى

و مجالات التزايد و التناقص إذا وجدت

$$f'(X)=10X+20$$

$$f'(X)=0$$

$$10X+20=0$$

$$10X=-20$$

$$X=\frac{-20}{10}=-2$$

بعد X=-2

$$f'(0)=10(0)+20=20$$

قبل X=-2

$$f'(-3)=10(-3)+20=-10$$

$\therefore$ **توجد قيمة صغرى محلية عند X=-2**

حساب القيم العظمى والصغرى المحلية (أسلوب المشتقة الأولى) ومجالات التزايد والتناقص

❖ نظرية :

١) إذا كانت $f'(x)>0$ لجميع قيم x في (a,b) فإن f تتزايد على الفترة [a,b]

٢) إذا كانت $f'(x)<0$ لجميع قيم x في (a,b) فإن f تتناقص على الفترة [a,b]

إذا كانت الدالة f لها قيمة قصوى محلية (عظمى أو صغرى) في فترة عند x=c فإن $f'(x)=0$

ملاحظه :

إذا غيرت $f'(x)$ إشارتها من موجب إلى سالب عند النقطة فإن هذه النقطة هي **" نقطه عظمى محليّه ".**

أما إذا غيرت $f'(x)$ إشارتها من سالب إلى موجب فإن النقطة فإن هذه النقطة هي **" نقطه صغرى محليّه ".**

خطوات إيجاد النقاط القصوى ومجالات التزايد والتناقص باستخدام المشتقة الأولى

أولا : نوجد المشتقة الأولى $f'(x)$

ثانيا : نوجد أصفار المشتقة الأولى أي أن $f'(x)=0$ **ولتكن c**

ثالثا : نختبر إشارة $f'(x)$ **على يمين ويسار النقطة x=c**

رابعا : نحقق النظرية السابقة

مثال : إذا كانت $f(x)=3x^2+5x-2$ **فما نقاط القيم القصوى إن وجدت وما مجالات التزايد والتناقص ؟**

الحل :

1) نوجد المشتقه الأولى :

$$f'(X) = 6x + 5$$

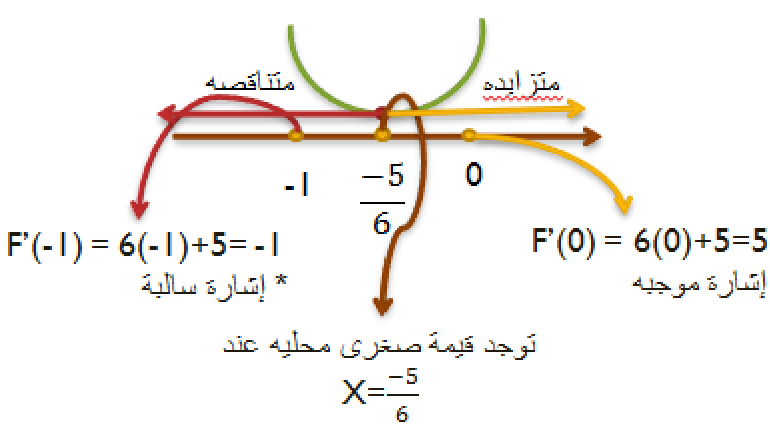
2) نوجد أصفار المشتقة

$$6x + 5 = 0$$

$$6x = -5$$

$$X = \frac{-5}{6} = c$$

3) نختبر إشارة المشتقه قبل وبعد C



إذا $\left(\frac{-5}{6}, f\left(\frac{-5}{6}\right)\right)$ **هي قيمة صغرى محليّة**

-] ∞**متناقصة** $\frac{-5}{6}$) ,

❖ **حساب القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية من المشتقة الثانية**

نظرية : إذا كانت $f'(c)=0$ **وكانت :**

١) $f''(c)<0$ **فإن f لها قيمة عظمى محلية عند x=c**

٢) $f''(c)>0$ **فإن f لها قيمة صغرى محلية عند x=c**

مثال : أوجد نقاط القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة $f(x)=5x^2-3x+2$

1) نوجد المشتقة الأولى :

$F'(x) = 10x - 3$

- نوجد أصفار المشتقة

$10x - 3 = 0$

$10x = 3$

$X = \frac{3}{10} = c$

2) نوجد إشارة المشتقة الثانية

$F''(x) = 10 > 0$

إذا من النظرية السابقة , توجد قيمة صغرى محليّه

---

1) باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجدالنقط القصوى للدالة

$Ñ(X)=-2X^2+X-1$

$Ñ(X)=-4X+1$

$Ñ(X)=0, -4X+1=0$

$-4X=-1$

$X=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}=C$ ____ $Ñ(X)=-4<0$

∴ توجد قيمة عظمى محلية عند $\left(\frac{1}{4}, Ñ\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ **,** $X=\frac{1}{4}$ **,**

مثال : أوجد نقاط القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة

$$F(x) = -4x^2 + 4x - 1$$

1) أختبار المشتقه الأولى :

$$F'(x) = -8x + 4$$

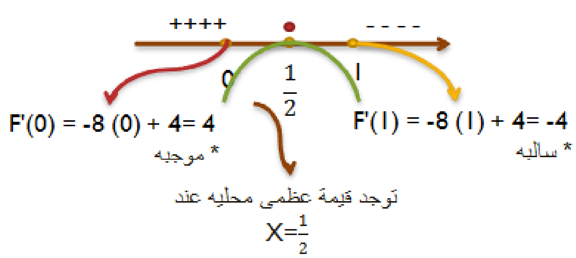
- نوجد أصفار المشتقة

$$-8x + 4 = 0$$

$$-8x = -4$$

$$X = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}c$$

2) نوجد الإختبار



- بإختبار المشتقة الثانيه

$$F''(x) = -8 < 0$$

من النظريه السابقه , توجد قيمة <u>عظمى</u> محليّه

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, Ñ\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

❖ تقعر المنحنيّات ونقاط الانقلاب .

١) مقعرا لأعلى إذا كانت المشتقة
الثانية أكبر من الصفر

٢) مقعرا لأسفل إذا كانت المشتقة
الثانية أصغر من الصفر
على الفترة المعطاة

تعريف نقاط الانقلاب :

هي النقاط التي عنها يحدث عملية تغيير في اتجاه المنحنى بشكل انقلابي
وبطريقة أخرى :
إذا كانت $f''(x)$ سالبة قبل نقطة محددة وموجبة بعدها أو العكس تسمى هذه النقطة نقطة الانقلاب

خطوات إيجاد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر

أولا : نوجد المشتقة الأولى والثانية

ثانيا : نوجد أصفار المشتقة الثانية ولتكن $x=e$

ثالثا نختبر إشارة $f''(x)$ على يسار ويمين $x=e$

مثال : أوجد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر للدالة $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 27$

الحل :

أولاً : نوجد المشتقة الأولى والثانيه :

$$F'(x) = 6x2 + 6x - 36$$

$$F''(x) = 12x + 6$$

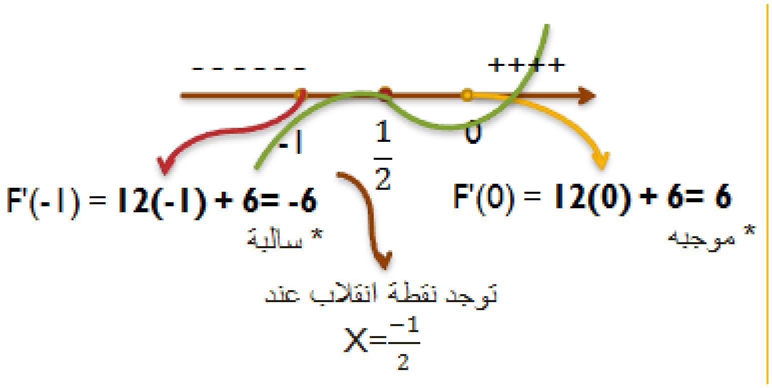
ثانيّاً : نوجد أصفار المشتقة الثانيه

$$12x + 6 = 0$$

$$12x = -6$$

$$X = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$$

ثالثاً : نختبر إشارة المشتقة الثانيه



رابعاً :

نلاحظ أن **F''(x)** موجبه عندما تكون x أكبر من $\frac{-1}{2}$

نلاحظ أن **F''(x)** سالبه عندما تكون x أصغر من $\frac{-1}{2}$

خامساً : <u>فترات التقعر</u> :

التقعر لأعلى في الفترة ($\frac{-1}{2}$∞ ,]

التقعر لأسفل في الفترة $\left[\frac{-1}{2}\right.$, -∞)

المحاضرة الرابعة عشر

❖ رسم المنحنيات :

يمكننا استخدام خواص المشتقات من حيث المقدار والإشارة عند نقطة معينة لرسم منحنى الدالة

خطوات الرسم :

١) تحديد النقاط القصوى ونع كل منها
٢) تحديد فترات التزايد وفترات التناقص
٣) تحديد نقاط الانقلاب وفترات التقعر للأعلى وللأسفل
٤) تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحورين

أرسم منحنى الدالة $F(x) = X^2 + 3x + 2$

أولاً : نوجد المشتقة الأولى:

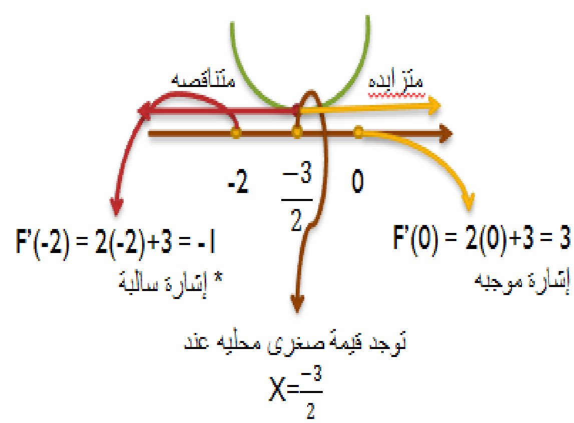
$F'(x) = 2x + 3$

ثانياً : نوجد أصفار المشتقة الثانية

$F'(x) = 2x + 3 = 0$

$2x = -3 \qquad x = \frac{-3}{2}$

ثالثاً : نختبر إشارة المشتقة الثانية



فترة التناقص $(-\infty , \frac{-3}{2}]$

فترة التزايد $[\frac{-3}{2} , \infty)$

3) $F'' = 2 > 0$,

التقعر لأعلى

$Y = F(\frac{-3}{2}) = (\frac{-3}{2})^2 + 3(\frac{-3}{2}) + 2$

$= \frac{9}{4} + \frac{-9}{2} + 2$ **بتوحيد المقامات**

$= \frac{-1}{4}$

$(\frac{-3}{2} , \frac{-1}{4})$

4) تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحورين :

F(x) = X2 +3x + 2

تقاطع مع محور y نضع x=0

F(0) = 02 +3(0) + 2

يقطع محوّر y (0,2)

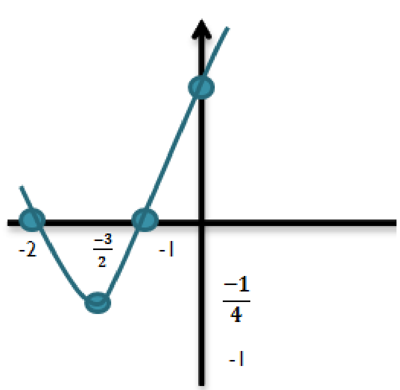
تقاطع مع محور x نضع y=0

0 = X2 +3x + 2

$0 = (x + 2)(x + 1)$

يقطع محوّر y (0,2)

$X = -2 \quad , \quad x = -1$



❖ تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق

دليل الطلب :

تسمى سرعة تغير السعر P بالنسبة إلى كمية الطلب q_d بدليل الطلب أي أن

دليل الطلب = $\frac{dp}{dq_d}$

مثال : يرتبط طلب وحدات من سلعة معينة ما q_d بسعر البيع P بالمعادلة $p^2 + 20q_d - 100 = 0$ حيث تقدر P بالريال و q_d بآلاف الوحدات

أوجد دليل الطلب :

الحل :

دليل الطلب هو المشتقة الأولى للسعر يعني نوجد مشتقة p ,

نأخذ الجذر التربيعي $P^2 = - 20\ qd + 100$

$$P = \mp\sqrt{20\ qd + 100}$$

$$P = \sqrt{20\ qd + 100}$$

الآن نشتق السعر بالنسبة ل qd

$$\frac{dp}{d\ qd} = \sqrt{20\ qd + 100} = (\ 20\ qd + 100\ )\hat{}\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(20\ qd + 100)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{dp}{d\ qd} = \frac{-1 \quad (20)}{2(-20qd + 100)} = \frac{-10}{\sqrt{20\ qd + 100}}$$

تفسير القيمة السالبة :

زيادة في الطلب يرافقها نقص مماثل في السعر

إذا كانت معادلة الطلب هي :

$$P^2 + 5q_d - 200 = 0$$

أوجد دليل الطلب:

$$P = \sqrt{-5q_d + 200}$$
$$P = (-5q_d + 200)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dp}{dq_d} = \frac{1}{2}(-5q_d + 200)^{\frac{-1}{2}}(-5)$$
$$\frac{dp}{dq_d} = \frac{-5}{2(-5q_d + 200)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-5}{2\sqrt{-5q_d + 200}}$$

دالة الإنتاج

تجد بعض الشركات أن الكلفة c لإنتاج q وحدات من إحدى السلع هي :

$$c = f(q) = a + bq + \frac{e}{q} + mq^2$$

حيث:

a كلفة ثابتة إضافية لا تعتمد على عدد الوحدات المنتجة

b تكاليف إنتاج وحدة واحده بالريال

b_q يمثل تكاليف q من الوحدات e عدد موجب فإن $\frac{e}{q}$ يتناقض مع تزايد q

فيصبح أفضل اقتصاديا ولكن إذا زادت q كثيرا فإن الحد mq^2 المسمى بالكابح يزيد من قيمة التكاليف .

وبصورة عامة إذا كانت c(q) هي كلفة إنتاج q من الوحدات تسمى c دالة التكلفة لهذه السلعة . وإذا كانت f قابلة للاشتقاق كان $\frac{dc}{dq}$ هو سرعة تغير الكلفة بالنسبة للإنتاج وهذا يسمى بدليل الإنتاج .

دليل الانتاج = $\frac{dc}{dq}$ وتكون الكلفة أقل ما يمكن عندما يكون هذا الدليل يساوي صفر.

مثال : قدرت إحدى الشركات أن التكلفة c(q) لصنع q وحدات هي بالتقريب :

$$c(q) = 100 + \frac{10}{q} + \frac{q^2}{200}$$

فكم وحدة تصنع حتى تكون الكلفة أقل ما يمكن ؟

الحل :

$$\frac{dc}{dq} = 0$$

$$\frac{dc}{dq} = \frac{-10}{q^2} + \frac{2}{200}q$$

$$\frac{dc}{dq} = \frac{-10}{q^2} + \frac{q}{100} = 0$$

$$\frac{q}{100} = \frac{10}{q^2}$$

$$q^3 = 1000$$

$$q = \sqrt[3]{1000} = 10$$

أوجد عدد الوحدات المصنعة حتى تكون الكلفة أقل ما يمكن : $C(q) = 50 + \frac{5}{q} + \frac{q^2}{125}$ إذا كانت

$$\frac{dc}{dq} = 0$$

$$\frac{dc}{dq} = \frac{-5}{q^2} + \frac{2}{125}q$$

$$\frac{dc}{dq} = \frac{-5}{q^2} + \frac{2q}{125} = 0$$

$$\frac{2q}{125} = \frac{5}{q^2}$$

$$2q^3 = 625$$

$$q^3 = \frac{625}{2}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{625}{2}}$$

الربح (الفائده) :

إذا كانت شركة تنتج q وحدة من السلع فإن الربح والإيراد والتكاليف تعتمد على الكمية المنتجة من هذه السلعة حسب العلاقة التالية :

الربح = الإيراد - التكاليف

$$D(q) = R(q) - C(q)$$

ولجعل الربح أكبر ما يمكن نضع $D'(q) = \frac{dD}{dq} = 0$

أي أن $R'(q) - C'(q) = 0$

ومنها $R'(q) = C'(q)$

أي يكون الربح أكبر ما يمكن عندما تكون عدد الوحدات q عندما التكلفة الحدية تساوي الإيراد الحدي

مثال : جد القيمة العظمى للربح إذا كان الإيراد = $40q - q^2$

التكلفة = $10 + 5q + \frac{q^2}{4}$

الحل : $D(q) = R(q) - C(q)$

$$D_{(q)} = (40q - q^2) - (1- + 5q + \frac{q^2}{4})$$

$$35 - 2q - \frac{1}{2}q = 0$$

$$35 - \frac{5}{2}q = 0$$

$$35 = \frac{5}{2}q$$

$$Q = 35 - \frac{70}{5} = 14$$

أي أن الربح يكون أكبر ما يمكن عندما تكون

عدد الوحدات المنتجة = 14

$$D_{(14)} = (40(14) - (14)^2) - (1- + 5(14) + \frac{q^2}{4})$$

$$= 235 \text{ R.s}$$

❖ تمرين :

جد القيمة العظمى للربح إذا كان

الإيراد = $20q-q^2$ **التكلفة =** $10+3q+\frac{q^2}{8}$

الحل : الربح = الإيراد ـ التكلفة

$$D_{(q)}=R_{(q)}-C_{(q)}$$

$$D_{(q)}=\left(20q-q^2\right)-\left(10+3q+\frac{q^2}{8}\right)$$

$$=20q-q^2-10-3q-\frac{q^2}{8}$$

$$D'_{(q)}=20-2q-3-\frac{2}{8}q$$

$$=17-2q-\frac{1}{4}q$$

$$=17-\frac{9}{4}q$$

$$\rightarrow 17-\frac{9}{4}q=0$$

$$17=\frac{9}{4}q$$

$$q=\frac{68}{9}$$

مرونة الطلب :

إذا كانت $y=f(x)$ فإن مرونة هذه الدالة بالنسبة إلى x تساوي $E=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$

وبشكل خاص إذا كانت $q_d=f(p)$ دالة الطلب في السعر فإن :

مرونة الطلب هي : $E_d=\frac{p}{q_d}\cdot\frac{dq_d}{dp}$

ثال : إذا كان منحنى دالة الطلب على سلعة معينة هو $P = 15 - 3q_d$ فأوجد رونة الطلب عندما $q_d = \frac{1}{3}$

الحل :

$$3q_d = 5 - p$$

$$q_d = 5 - \frac{1}{3}p$$

$$\frac{dq_d}{dp} = \frac{-1}{3}$$

$$E_d = \frac{P}{q_d} * \frac{dq_d}{dp}$$

$$E_d = \frac{15 - 3q_d}{\frac{1}{3}} * \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$= \frac{15 - 3\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} * \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$= -15 + 1$$

$$: = -14$$

إذا كان منحنى دالة الطلب على سلعة معينة هو:

$$P = 8 - 4q_d$$

فأوجد مرونة الطلب عندما $q_d = \frac{1}{2}$

$$4q_d = 8 - p$$

$$q_d = 2 - \frac{1}{4}p$$

$$\frac{dq_d}{dp} = \frac{-1}{4}$$

$$E_d = \frac{P}{q_d} * \frac{dq_d}{dp}$$

$$E_d = \frac{8 - 4q_d}{\frac{1}{2}} * \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{8 - 4\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} * \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{8 - 2}{\frac{1}{2}} * \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{6}{\frac{1}{2}} * \left(\frac{-1}{4}\right) = -3$$

الدخل الحدي :

إذا كانت $P = g(x)$ **تمثل السعر الذي تباع به كل وحدة من بضاعة ما . تسمى p دالة الطلب إذا كانت x تمثل عدد الوحدات المباعة ويكون الدخل (الإيراد) الكلي T الناتج عن هذه المبيعات هو :**

$$T = Px = xg(x)$$

الدخل الحدي أو الإيراد الحدي عند بيع الوحدة رقم n هو :

$\frac{dT}{dx}$ **عند** $x = n$

مثال : إذا كان الدخل T الناتج عن بيع x من علب الزيتون معطى بالمعادلة :

$T = \frac{x^2}{10} + 10x$ **فأوجد الدخل الكلي الناتج عن بيع 200 علبة وأوجد الدخل**

الحدي الناتج عن بيع العلبة العاشرة

الحل : الدخل الكلي الناتج عن بيع 200 علبه =

$$T = \frac{x^2}{10} + 10x$$
$$T = \frac{200^2}{10} + 10(200)$$
$$= 6000 \text{ ريال}$$

الدخل الحدي الناتج عن بيع العلبة العاشره =

$$T = \frac{x^2}{10} + 10x$$
$$\frac{dT}{dx} = \frac{2x}{10} + 10$$
$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{5} + 10$$
$$\frac{dT}{dx}(10) = \frac{10}{5} + 10$$
$$= 12 \text{ ريال}$$

علب الحليب معطى بالعلاقة التالية :x عن بيع Tإذاكان الدخل

$$T = \frac{x^2}{5} + 5x$$

علبة =100أوجد الدخل الكلي عند بيع

$$T = \frac{x^2}{10} + 10x$$
$$T = \frac{200^2}{10} + 10(200)$$
$$= 6000 \text{ ريال}$$

=30أوجد الدخل الحدي عند بيع العلبة رقم

$$T = \frac{x^2}{5} + 5x$$
$$\frac{dT}{dx} = \frac{2x}{5} + 5$$
$$\frac{dT}{dx}(30) = \frac{2(30)}{5} + 5$$
$$= 17 \text{ ريال}$$