الفصل الثالث – المحاضره الحادية عشر .

❖ مشتقات الدوال الجبرية :

1. متوسط التغير

إذا كانت y = f (x) دالة وكانت x_1 ، x_2 نقطتين في مجال الدالة فإن المقدار $x_2 - x_1$ يسمى التغير في x ويرمز له بالرمز

$\Delta x = x_2 - x_1$ ويقرأ [دلتا x]

كما يسمى المقدار $f(x_2) - f(x_1)$ التغير في الدالة ويرمز له بالرمز $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$

كما يسمى الكسر :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

متوسط التغير في الدالة عندما تتغير x من x_1 إلى x_2

❖ مثال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 3$ فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من 1 إلى 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{7 - 4}{2 - 1} = 3$$

❖ مثال :

1) إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$ فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من 1 إلى 3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{17-3}{3-1} = \frac{14}{2} = 7$$

❖ تمرين

1) إذا كانت $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من 1- إلى 0

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1-6}{0-(-1)} = \frac{-5}{1} = -5$$

2) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x} + 2$ فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من 2 إلى 3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(\sqrt{3}+2) - (\sqrt{2}+2)}{3-2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

2. مفهوم المشتقه :

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x$ أوجد $f'(x)$

الحل : $f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x^2 + 3$ أوجد $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(x)}{x - 1}$$

$$= \frac{(x^2 + 3) - (1 + 3)}{x - 1} = \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}$$

$$\lim_{x\to 1} = (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x^2$ أوجد $f'(1)$

$$f'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$$

$$\lim_{x\to 1} = \frac{(x - 1) - (x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} = (x + 1) = 2$$

❖ تمرين

إذا كانت $f(x) = x^3 - 2x$ أوجد $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= \frac{(x^3+2x) - \left(1^3 - 2(3)\right)}{x-1} == \frac{(x^3+2x) - (-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^3 - 2x + 1}{x-1}$$

3. جبر الاشتقاق

يمكن حساب المشتقات بالإعتماد على بعض نظريات الاشتقاق التي نلخصها كما يلي :

ملاحظة : [رمز المشتقة للدالة (y = f (x]

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = d_x f(x) = d_x y$$

A.

إذا كانت $f(x) = mx + b$ فإن : $f'(x) = m$

❖ مثال

1) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = 3x + 2$

$f'(x) = 3$

2) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = -5x - 1$

$f'(x) = -5$

❖ تمرين

أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{-2}{5}x - 2$

$$\frac{-2}{5}$$

B. إذا كانت $f(x) = c$ فإن : $f'(x) = 0$

❖ مثال:

1) أوجد مشتقة $f(x) = 5$ ، $f(x) = -3$

$f'(x) = 0$

2) إذا كانت $f(x) = \sqrt{3}$ أوجد $f'(x)$

$f'(x) = 0$

❖ تمرين:

أوجد مشتقة مايلي :

$$f(x) = \sqrt{7}$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{-3}{4}x + 6$$

$$f'(x) = \frac{-3}{4}$$

.c

إذا كانت $n \in Q$ عدد نسبي ، $f(x) = x^n$ فإن : $f'(x) = nx^{n-1}$

وحتى تكون المشتقة معرفة يجب أن تكون $x \neq 0$ عندما $n \leq 0$

❖ مثال :

$$f(x) = 3x^5 - 2x^2$$

$$f'(x) = 3 * 5x^4 - 2 * 2x$$

$$= 15x^4 - 4x$$

❖ مثال:

أوجد مشتقة مايلي :

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^{n-1} \quad = 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = x^{-2} \quad = -2x^{-2-1} \quad = -2x^{-3}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5} \quad = x^{\frac{5}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}$$

$$= \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-\frac{3}{3}} \quad = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3$$

$$= 15x^2 + 4x - 0$$

$$= 15x^2 + 4x$$

❖ مثال :

$f'(x)$ أوجد $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow f'(x)$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} \quad = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-\frac{4}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \quad = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} \quad = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

❖ تمرين :

أوجد مشتقة مايلي :

$$f(x) = x^5 = \quad 3x^4$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^4} = 3x^{-4} \quad = -12x^{-5} \qquad = \frac{-2}{x^5}$$

.D

المشتقة لمجموع عدة دوال بالنسبة للمتغير المستقل يساوي مجموع المشتقات لهذه الدوال بالنسبة لنفس المتغير المستقل أي ان : إذا كانت الدوال التالية $f(x)$ ، $g(x)$ فإن :

$$\frac{d}{dx} = (f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

وكذلك في عملية الطرح

❖ مثال

أوجد مشتقة مايلي : $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} = (5x^4) + \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 20x^3 - 6x + 2$$

❖ مثال

أوجد مشتقة مايلي : $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$

$$6x^2 - 8x + 5$$

E. المشتقة لحاصل ضرب دالتين = مشتقة الدالة الأولى x الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية x الدالة الأولى

[الضرب عملية إبدالية]

❖ مثال

أوجد مشتقه الدالة $f(x) = (x^2 - 3)(5x + 1)$

$$f'(x) = (x^2 - 3)'(5x + 1)'(x^2 - 3)$$

$$= (2x)(5)(x^2 - 3)$$

$$= 10x^2 + 2x + 5x^2 - 15$$

$$= 15x^2 + 2x - 15$$

F. المشتقة لخارج قسمة دالتين = (مشتقة البسط x المقام – مشتقة المقام x البسط)

❖ مثال :

$$1.\ f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{x^2+2}$$

$$f'(x) = \frac{(6x-5)(x^2+2)-(2x)(3x^2-5x+2)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{(6x^3+12x-5x^2-10)-(6x^3-10x^2+4x)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^3+8x+5x^2-10}{(x^2+2)^2}$$

❖ تمرين :

أوجد مشتقة الدوال التالية :

$$1.\ f(x) = (x^2-2x)(x-1)$$

$$f'(x) = (2\mathrm{x}-2)(x-1)+(x^2-2x)(1)$$
$$= (2\mathrm{x}^2-2x-2x+2)+(x^2-2x)$$

$$= 3\mathrm{x}^2-6x+2$$

$$2.\ f(x) = (x^3+x)(-2x)$$

$$f'(x) = (3\mathrm{x}^2+1)(-2x)+(x^3-x)(-2)$$
$$= (-6\mathrm{x}^3-2x)+(-2x^3-2x)$$

$$= -8\mathrm{x}^3-4x$$

3. $f(x) = \frac{x^3-5x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2-5)(x+1)-(x^3-5x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(3x^3-5x+3x^2-5)-(x^3-5x)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3-3x^2+x+5}{(x+1)^2}$$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2-4)-(x)(2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{(x^2-4)-(2x^2)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

المحاضرة الثانية عشر

.G

مشتقة مقلوب الدالة $\frac{d}{dx} = (\frac{1}{f(x)}) = -\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{f(x)^2}$

❖ مثال

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ أوجد $f'(x)$

بتطبيق القاعدة $-\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{f(x)^2}$

أو طريقة ثانية $f'(x) = x^{-1}$

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

❖ تمرين

اوجد مشتقة الدالة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x + 5}$$

$$\grave{f}(x) = -\frac{3x^2 - 4x}{(x^3 - 2x + 5)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\grave{f}(x) = -\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

H.

قاعدة السلسلة :

إذا كانت $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ فإن : $= f'(u)g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$

$f'(\,g(x)\,)\,g'(x)$

❖ مثال

أوجد المشتقة للدالة $y = (3x^2 + 2x - 4)^3$

نفرض أن $u = 3x^2 + 2x - 4$

$$\frac{du}{dx} = 2.3x + 2$$

$$y' = 3u^2.du \quad = 3(3x^2 + 2x - 4)^2\,(6x + 2)$$

❖ مثال

إذا كانت $y = (2x^4 - 3x^2 + 1)^5$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

نفرض أن $u = (2x^4 - 3x^2 + 1)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 6x$$

$$y = u^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5u^4.du$$

$$y' = 5(2x^2 - 3x^2 + 1).(8x^3 - 6x^2)$$

❖ مثال

أوجد مشتقة $y = (3x^2 + 5x - 2)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(3x^2 + 5x - 2)^2 . (6x + 5)$$

❖ مثال

أوجد مشتقة $y = (2x^5 + 3x^3 - 2x + 1)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x^5 + 3x^3 - 2x + 1)^2 (10x^4 + 9x^2 - 2)$$

❖ تمرين

إذا كانت $y = (3x^2 - 5x + 3)^4$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 4(3x^2 - 5x + 3)^3 (6x - 5)$$

ا.

إذا كانت : $y = 3u^2 + 5u + 2$ وكانت $x = 7u - 2$

فأوجد $\frac{dx}{du}$ ، $\frac{dy}{du}$

$$\frac{dy}{du} = 6u = 7 \quad \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{7}$$

ثم أوجد $\frac{dy}{dx}$

نطبق قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (6u + 5)(\frac{1}{7}) = \frac{6u + 5}{7}$$

❖ مثال

إذا كانت $y = 3u^2 - 5u + 3$ ، $x = 5u + 2$ أوجد $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{dx}{du}$ ثم أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = 6u - 5$$

$$\frac{dx}{du} = 5$$

$$= \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (6u - 5)\left(\frac{1}{5}\right) \quad = \frac{6u - 5}{5}$$

❖ تمرين 1

إذا كانت $f(x) = (-2x^5 + 3x)^3$ فأوجد $f'(x)$

$$f'(x) = 3(-2x^5 + 3x)^2(-10x + 3)$$

❖ تمرين 2

إذا كانت $y = 2u^3 - 3u + 1$ وكانت $x = 5u^2 - 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{du} = 10u$$

$$\frac{dy}{du} = 6u^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (6u^2 - 3)\left(\frac{1}{10u}\right) \quad = \frac{6u^2 - 3}{10u}$$

❖ تمرين 3

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $u = x + 2$ ، $y = \sqrt{u}$

$$\frac{dy}{du} = u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(1) \quad = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

A. الاشتقاق الضمني

❖ مثال

$$\color{red}{\boldsymbol{x^2 + y^2 = 10}}$$

الحل :

نجري عملية الاشتقاق بالنسبة لـِ $\boldsymbol{x}$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

بطريقة أخرى نستطيع إيجاد المشتقة أولا بإيجاد قيمة Y ثم نشتق بالنسبة لـِ X

$$x^2 + y^2 = 10$$

الحل :

$$y^2 = 10 - x^2$$

$$y = \sqrt{10 - x^2}$$

$$y = (10 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(10 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2(10 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{10 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

❖ مثال

$$4x^2 + xy - 3y^2 = 0$$

$$8x + y + \frac{dy}{dx}x - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}x - 6y\frac{dy}{dx} = -8x + y$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 6y) = -8x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x + y}{x - 6y}$$

❖ تمرين

$$2x^3 + xy^2 - y = 0$$

$$6x + 2y + \frac{dy}{dx} \cdot 2x - 1\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot 2x - 1\frac{dy}{dx} = -6x^2 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 1) = -6x^2 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{= -6x^2 - 2y}{(2x - 1)}$$

❖ مثال

اوجد المشتقة الثانية للدالة

$$f(x) = x^3 - 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f''(x) = 6x$$

❖ تمارين

1) اوجد المشتقه للدوال التاليه :

$$a)\ y = \frac{x+3}{x-1} \qquad ,x \neq 1$$

$$y` = \frac{(1)(x-1)-(x+3)(1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$b)\ y = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 5)$$

$$y` = (2x-3)(x^2+5) + (x^2-3x+1)(2x)$$

$$= 2x^3 + 10x - 3x^2 - 15 + 2x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$= 4x^3 - 9x^2 + 12x - 15$$

2) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

$y = u^3 - 2u$

$u = x^2 - 5x + 6$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (3u^2 - 2)(2x - 5) \qquad = \frac{3u^2 - 2}{2x - 5}$$

إذا كانت $y = f(x) = 3x^2 + 4x$ فأوجد :

$a)\ y'$ عندما $x = 0$

$$y` = 6x + 4$$

$$f(0) = 6(0) + 4 = 4$$

b) $f'(1)$

$$y` = 6x + 4$$

$$f(1) = 6(1) + 4 = 10$$

$c)\ \frac{dy}{dx}$ عندما $x = -1$

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 4 = 6(-1) + 4 = -2$$

4) أوجد مشتقة الدوال التاليه :

$$a)y=\frac{1}{2x+3}$$

$$=-\frac{2}{(2x+3)^2}$$

$$b)\ y=\sqrt[3]{x^2+2}$$

$$y=(x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\grave{y}=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{2}{3}}$$

c) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

$$1)\ x+y=5$$

$$1+\frac{dy}{dx}=5$$

$$\frac{dy}{dx}=5-1$$

$$2)\ x^2+3xy+y^2=4$$

$$2x+3y+3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=4$$

$$3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=-2x-3y+4$$

$$\frac{dy}{dx}(3x+2y)=-2x-3y+4$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3y+4}{3x+2y}$$

5) أوجد المشتقه الثانيه للداله :

$$f(x) = \frac{3x+7}{2x-9}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{(3)(2x-9)-(2)(3x+7)}{(2x-9)^2}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{(6x-27)-(6x+14)}{(2x-9)^2}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(0)(2x-9)^2-2(2x-9)(13)}{((2x-9)^2)^2}$$

$$= \frac{(4x-18)(13)}{(2x-9)^4}$$

$$= \frac{52x-234}{(2x-9)^4}$$

المحاضرة الثالثة عشر

❖ تطبيقات التفاضل على سلوك المنحنيات

المشتقة الأولى هندسياً : تفسر المشتقة الأولى هندسياً على أنها ميل المماس

لمنحنى الدلة $y = f(x)$ عند النقطه $(a,f(a))$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x^2+2$

فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطه $x=2$

نوجد المشتقة الأولى $F'(X) = 2X$

نعوّض ب النقطة (2) $F'(2) = 2(2) =4$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x^2+3X$

فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطه $x=2$

نوجد المشتقة الأولى $F'(X) = 2X+3$

نعوّض ب النقطة (2) $F'(2) = 2(2)+3 =7$

❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = x^2-2X$

فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطه $x=1$

نوجد المشتقة الأولى $F'(X) = 2X-2$

نعوّض ب النقطة (1) $F'(2) = 2(1)-2= 0$

المماس موازي لمحور x

❖ القيم العظمى و القيم الصغرى المحلية ومجالات التزايد والتناقص :

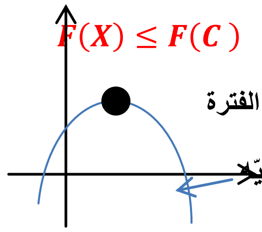
إذا كانت C نقطه في مجال الدالة F فإن

F(C) قيمة عظمى محليه للدالة F

إذا وجدت فتره مفتوحة (a,b) تحتوي على C بحيث أن

$$\boldsymbol{F(X) \leq F(C)}$$

لجميع قيّم X ف الفترة



ملاحظه : إذا كان التغيّير في سلوك الدالة عند النقطة ((C,f(c من **التزايد** قبلها إلى **التناقص** بعدها فإننا نقول أن النقطة ((C,f(c ,

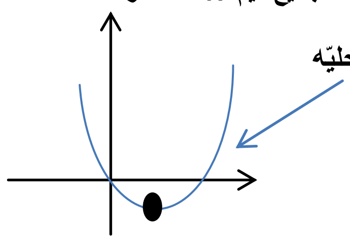
قيمة عظمى محليّه .

F(C) قيمة صغرى محليه للدالة F

إذا وجدت فتره مفتوحة (a,b) تحتوي على C بحيث أن

$$\boldsymbol{F(X) \geq F(C)}$$

لجميع قيّم X ف الفترة



ملاحظه : إذا كان التغيّير في سلوك الدالة عند النقطة ((C,f(c من **التناقص** قبلها إلى **التزايد** بعدها فإن نقول أن النقطة ((C,f(c ,

قيمة صغرى محليّه .

❖ مثال :

مثال : إذا كان $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$

فما هي نقاط القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت ؟

الحل :

$$1)\ F'(x) = 8x - 2$$

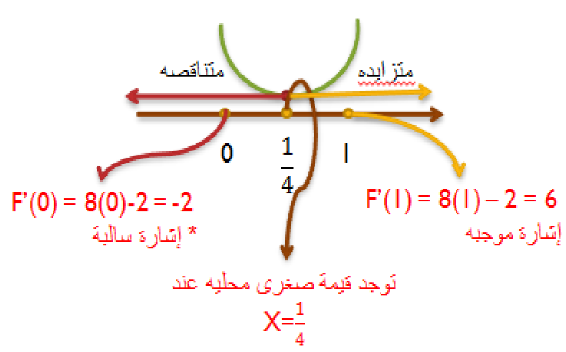
2) نوجد أصفار المشتقة الأولى :

$$F'(x) = 0 \qquad 8x - 2 = 0$$

$$8x = 2 \qquad x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

3) لتحديد النقاط عند $x = \frac{1}{4}$

نبحث إشارة $f'(x)$ قبل وبعد $x = \frac{1}{4}$



❖ مثال :

إذا كانت $f(x) = -2^2+3x-2$

فأوجد القيمة العظمى والصغرى المحلية إن وجدت ومجالات التزايد والتناقص .

1) $F'(x) = -4x + 3$

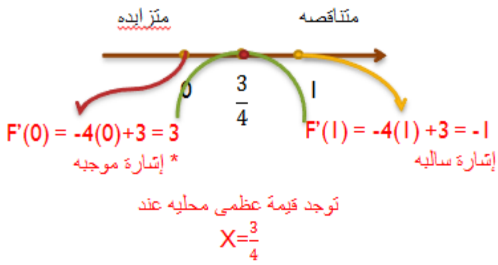
2) نوجد أصفار المشتقة الأولى :

$F'(x) = 0 \qquad -4x + 3 = 0$

$-4x = -3 \qquad x = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

3) لتحديد النقاط عند $x = \frac{3}{4}$

نبحث إشارة $f'(x)$ قبل وبعد $x = \frac{3}{4}$



مجالات التزايد والتناقص :

متزايده$(-\infty, \frac{3}{4}]$

***متناقصه*$[\frac{3}{4}, \infty)$**

❖ تمرين :

1) إذا كانت $f(X)=3X^{2}-5X+1$

فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند X=2

$$f'(X)=6X-5$$

$$f'(2)=6(2)-5=7$$

ميل المماس يساوي7

2) إذا كانت $f(X)=5X^{2}+20X-5$

فأوجد القيم العظمى أو الصغرى

و مجلات التزايد و التناقص إذا وجدت

$$f'(X)=10X+20$$

$$f'(X)=0$$

$$10X+20=0$$

$$10X=-20$$

$$X=\frac{-20}{10}=-2$$

بعد X=-2

$$f'(0)=10(0)+20=20$$

قبل X=-2

$$f'(-3)=10(-3)+20=-10$$

∴توجد قيمة صغرى محلية عند X=-2

حساب القيم العظمى والصغرى المحلية (أسلوب المشتقة الأولى) ومجالات التزايد والتناقص

❖ نظرية :

١) إذا كانت $f'(x)>0$ لجميع قيم x في (a,b) فإن f تتزايد على الفترة [a,b]

٢) إذا كانت $f'(x)<0$ لجميع قيم x في (a,b) فإن f تتناقص على الفترة [a,b]

إذا كانت الدالة f لها قيمة قصوى محلية (عظمى أو صغرى) في فترة عند x=c فإن $f'(x)=0$

١

ملاحظه :

إذا غيرت $f'(x)$ إشارتها من موجب إلى سالب عند النقطة

فإن هذه النقطة هي **" نقطه عظمى محليّه "**.

أما إذا غيرت $f'(x)$ إشارتها من سالب إلى موجب فإن النقطة

فإن هذه النقطة هي **" نقطه صغرى محليّه "**.

خطوات إيجاد النقاط القصوى ومجالات التزايد والتناقص باستخدام المشتقة الأولى

أولا : نوجد المشتقة الأولى $f'(x)$

ثانيا : نوجد أصفار المشتقة الأولى أي أن $f'(x)=0$ ولتكن c

ثالثا : نختبر إشارة $f'(x)$ على يمين ويسار النقطة x=c

رابعا : نحقق النظرية السابقة

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ **فما نقاط القيم القصوى إن وجدت وما مجالات التزايد والتناقص ؟**

الحل :

1) نوجد المشتقه الأولى :

$f'(X) = 6x + 5$

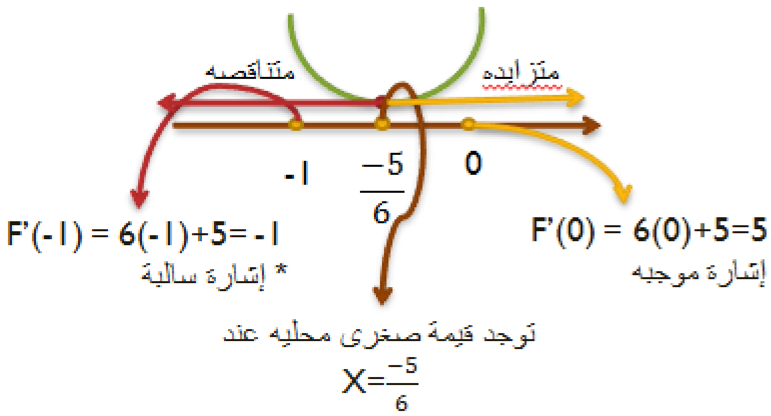
2) نوجد أصفار المشتقة

$6x + 5 = 0$

$6x = -5$

$X = \frac{-5}{6} = c$

3) نختبر إشارة المشتقه قبل وبعد C



إذا $\left(\frac{-5}{6}, f\left(\frac{-5}{6}\right)\right)$ **هي قيمة صغرى محليّة**

متناقصة $]-\infty, \frac{-5}{6})$

متزايدة $[\frac{-5}{6}, \infty)$

❖ حساب القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية من **المشتقة الثانية**

نظرية : إذا كانت $f'(c)=0$ وكانت :

١) $f''(c)<0$ فإن f لها قيمة عظمى محلية عند x=c

٢) $f''(c)>0$ فإن f لها قيمة صغرى محلية عند x=c

مثال : أوجد نقاط القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة $f(x)=5x^2-3x+2$

1) نوجد المشتقة الأولى :

F'(x) = 10x – 3

- نوجد أصفار المشتقة

10 x – 3 = 0

10x = 3

X = $\frac{3}{10}=c$

2) نوجد إشارة المشتقة الثانية

F'' (x) = 10> 0

إذا من النظرية السابقة , توجد قيمة صغرى محليّه

1) باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجدالنقط القصوى للدالة

$f(X)=-2X^2+X-1$

$f'(X)=-4X+1$

$f'(X)=0,-4X+1=0$

$-4X=-1$

$X=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}=C$ ____ $f''(X)=-4<0$

∴ **توجد قيمة عظمى محلية عند** $\left(\frac{1}{4},f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ $\frac{1}{4}$ **X=** **,**

مثال : أوجد نقاط القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة

$F(x) = -4x^2 + 4x - 1$

1) أختبار المشتقه الأولى :

$F'(x) = -8x + 4$

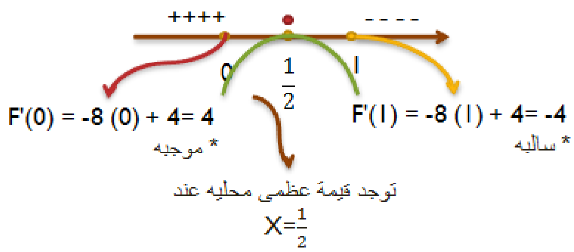
- نوجد أصفار المشتقة

$-8x + 4 = \mathbf{0}$

$-8x = -4$

$$X = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}c$$

2) نوجد الإختبار



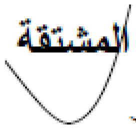
- **بإختبار المشتقة الثانيه**

$F''(x) = -8 < 0$

من النظريه السابقه , توجد قيمة <u>عظمى</u> محليّه

x = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \tilde{N}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

❖ تقعر المنحنيّات ونقاط الانقلاب .



١) مقعرا لأعلى إذا كانت المشتقة
الثانية أكبر من الصفر

٢) مقعرا لأسفل إذا كانت المشتقة
الثانية أصغر من الصفر
على الفترة المعطاة

تعريف نقاط الانقلاب :

هي النقاط التي عنها يحدث عملية تغيير في اتجاه المنحنى بشكل انقلابي
وبطريقة أخرى :
إذا كانت $f''(x)$ سالبة قبل نقطة محددة وموجبة بعدها أو العكس تسمى
هذه النقطة نقطة الانقلاب

خطوات إيجاد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر

أولا : نوجد المشتقة الأولى والثانية

ثانيا : نوجد أصفار المشتقة الثانية ولتكن $x=e$

ثالثا نختبر إشارة $f''(x)$ على يسار ويمين $x=e$

مثال : أوجد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر للدالة $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 27$

الحل :

أولاً : نوجد المشتقة الأولى والثانيه :

F'(x) = 6x2 + 6x – 36

F''(x) = 12x + 6

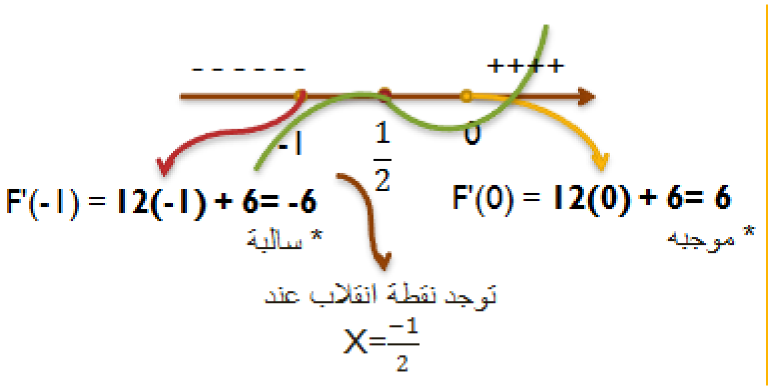
ثانيّاً : نوجد أصفار المشتقة الثانيه

12x + 6 = 0

12x = - 6

X=$\frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$

ثالثاً : نختبر إشارة المشتقة الثانية



رابعاً :

نلاحظ أن F''(x) موجبه عندما تكون x أكبر من $\frac{-1}{2}$

نلاحظ أن F''(x) سالبه عندما تكون x أصغر من $\frac{-1}{2}$

خامساً : <u>فترات التقعر</u> :

التقعر لأعلى في الفترة ($\frac{-1}{2}$∞ , [

التقعر لأسفل في الفترة (-∞ , $\frac{-1}{2}$]

المحاضرة الرابعة عشر

❖ رسم المنحنيات :

يمكننا استخدام خواص المشتقات من حيث المقدار والإشارة عند نقطة معينة لرسم منحنى الدالة

خطوات الرسم :

١) تحديد النقاط القصوى ونع كل منها
٢) تحديد فترات التزايد وفترات التناقص
٣) تحديد نقاط الانقلاب وفترات التقعر للأعلى وللأسفل
٤) تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحورين

أرسم منحنى الدالة $F(x) = X^2 +3x + 2$

أولاً : نوجد المشتقة الأولى:

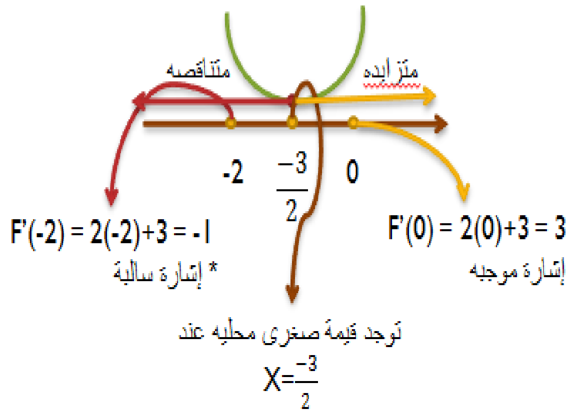
$F'(x) = 2x + 3$

ثانياً : نوجد أصفار المشتقة الثانية

$F'(x) = 2x + 3 = 0$

$2x = -3$ $\qquad$ $x = \frac{-3}{2}$

ثالثاً : نختبر إشارة المشتقة الثانية



فترة التناقص $(-\infty , \frac{-3}{2}]$

فترة التزايد $[\frac{-3}{2} , \infty)$

3) $F'' = 2 > 0$,

التقعر لأعلى

$Y = F(\frac{-3}{2}) = (\frac{-3}{2})^2 + 3(\frac{-3}{2}) + 2$

$= \frac{9}{4} + \frac{-9}{2} + 2$ بتوحيد المقامات

$= \frac{-1}{4}$

$(\frac{-3}{2} , \frac{-1}{4})$

4) تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحورين :

F(x) = X2 +3x + 2

تقاطع مع محور y نضع x=0

F(0) = 02 +3(0) + 2

يقطع محوّر y (0,2)

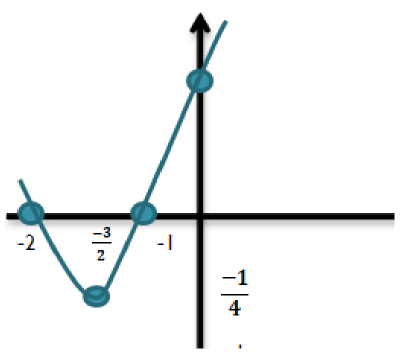
تقاطع مع محور x نضع y=0

0 = X2 +3x + 2

0 = (x +2) (x + 1)

يقطع محوّر y (0,2)

X = -2 , x = -1



❖ تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق

دليل الطلب :

تسمى سرعة تغير السعر P بالنسبة إلى كمية الطلب q_d بدليل الطلب أي أن

دليل الطلب = $\frac{dp}{dq_d}$

مثال : يرتبط طلب وحدات من سلعة معينة ما q_d بسعر البيع P بالمعادلة

$p^2 + 20q_d - 100 = 0$ حيث تقدر P بالريال و q_d بآلاف الوحدات

أوجد دليل الطلب :

الحل :

دليل الطلب هو المشتقة الأولى للسعر يعني نوجد مشتقة p ,

$P^2 = - 20\ qd + 100$ نأخذ الجذر التربيعي

$$P = \mp\sqrt{20\ qd + 100}$$

$$P = \sqrt{20\ qd + 100}$$

الآن نشتق السعر بالنسبة ل qd

$$\frac{dp}{d\ qd} = \sqrt{20\ qd + 100} = (\ 20\ qd + 100\ )\hat{}\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(20\ qd + 100)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{dp}{d\ qd} = \frac{-1 \quad (20)}{2(-20qd + 100)} = \frac{-10}{\sqrt{20\ qd + 100}}$$

تفسير القيمة السالبة :

زيادة في الطلب يرافقها نقص مماثل في السعر

إذا كانت معادلة الطلب هي :

$$P^2+5q_d-200=0$$

أوجد دليل الطلب:

$$P=\sqrt{-5q_d+200}$$

$$P=\left(-5q_d+200\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dp}{dq_d}=\frac{1}{2}\left(-5q_d+200\right)^{\frac{-1}{2}}(-5)$$

$$\frac{dp}{dq_d}=\frac{-5}{2\left(-5q_d+200\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-5}{2\sqrt{-5q_d+200}}$$

دالة الإنتاج

تجد بعض الشركات أن الكلفة c لإنتاج q وحدات من إحدى السلع هي :

$$c=f(q)=a+bq+\frac{e}{q}+mq^2$$

حيث:

a كلفة ثابتة إضافية لا تعتمد على عدد الوحدات المنتجة

b تكاليف إنتاج وحدة واحده بالريال

b_q يمثل تكاليف q من الوحدات e عدد موجب فإن $\frac{e}{q}$ يتناقض مع تزايد q فيصبح أفضل اقتصاديا ولكن إذا زادت q كثيرا فإن الحد mq^2 المسمى بالكابح يزيد من قيمة التكاليف .

وبصورة عامة إذا كانت c(q) هي كلفة إنتاج q من الوحدات تسمى c دالة التكلفة لهذه السلعة . وإذا كانت f قابلة للاشتقاق كان $\frac{dc}{dq}$ هو سرعة تغير الكلفة بالنسبة للإنتاج وهذا يسمى بدليل الإنتاج .

دليل الانتاج = $\frac{dc}{dq}$ وتكون الكلفة أقل ما يمكن عندما يكون هذا الدليل يساوي صفر.

مثال : قدرت إحدى الشركات أن التكلفة $c(q)$ لصنع q وحدات هي بالتقريب :

$$c(q) = 100 + \frac{10}{q} + \frac{q^2}{200}$$

فكم وحدة تصنع حتى تكون الكلفة أقل ما يمكن ؟

الحل :

$$\frac{dc}{dq} = 0$$

$$\frac{dc}{dq} = \frac{-10}{q^2} + \frac{2}{200}q$$

$$\frac{dc}{dq} = \frac{-10}{q^2} + \frac{q}{100} = 0$$

$$\frac{q}{100} = \frac{10}{q^2}$$

$$q^3 = 1000$$

$$q = \sqrt[3]{1000} = 10$$

إذا كانت $C(q)=50+\frac{5}{q}+\frac{q^2}{125}$ أوجد عدد الوحدات المصنعة حتى تكون الكلفة أقل ما يمكن :

$$\frac{dc}{dq}=0$$
$$\frac{dc}{dq}=\frac{-5}{q^2}+\frac{2}{125}q$$
$$\frac{dc}{dq}=\frac{-5}{q^2}+\frac{2q}{125}=0$$
$$\frac{2q}{125}=\frac{5}{q^2}$$
$$2q^3=625$$
$$q^3=\frac{625}{2}$$
$$q=\sqrt[3]{\frac{625}{2}}$$

الربح (الفائده) :

إذا كانت شركة تنتج q وحدة من السلع فإن الربح والإيراد والتكاليف تعتمد على الكمية المنتجة من هذه السلعة حسب العلاقة التالية :

الربح = الإيراد - التكاليف

$$D(q)=R(q)-C(q)$$

ولجعل الربح أكبر ما يمكن نضع $D'(q)=\frac{dD}{dq}=0$

أي أن $R'(q)-C'(q)=0$

ومنها $R'(q)=C'(q)$

أي يكون الربح أكبر ما يمكن عندما تكون عدد الوحدات q عندما التكلفة الحدية تساوي الإيراد الحدي

الإيراد = $40q - q^2$ **مثال : جد القيمة العظمى للربح إذا كان**

التكلفة = $10 + 5q + \frac{q^2}{4}$

الحل : $D(q) = R(q) - C(q)$

$$\mathbf{D_{(q)} = (40q - q^2) - (1- + 5q + \frac{q^2}{4})}$$

$$\mathbf{35 - 2q - \frac{1}{2}q = 0}$$

$$\mathbf{35 - \frac{5}{2}q = 0}$$

$$\mathbf{35 = \frac{5}{2}q}$$

$$\mathbf{Q = 35 - \frac{70}{5} = 14}$$

أي أن الربح يكون أكبر ما يمكن عندما تكون

عدد الوحدات المنتجة = 14

$$D_{(14)} = (40(14) - (14)^2) - (1- + 5(14) + \frac{q^2}{4})$$

$$= 235 \text{ R.s}$$

❖ تمرين :

جد القيمة العظمى للربح إذا كان

الإيراد = $20q - q^2$ **التكاليف =** $10 + 3q + \frac{q^2}{8}$

الحل : الربح = الإيراد – التكلفة

$$D_{(q)} = R_{(q)} - C_{(q)}$$

$$D_{(q)} = \left(20q - q^2\right) - \left(10 + 3q + \frac{q^2}{8}\right)$$

$$= 20q - q^2 - 10 - 3q - \frac{q^2}{8}$$

$$D'_{(q)} = 20 - 2q - 3 - \frac{2}{8}q$$

$$= 17 - 2q - \frac{1}{4}q$$

$$= 17 - \frac{9}{4}q$$

$$\rightarrow 17 - \frac{9}{4}q = 0$$

$$17 = \frac{9}{4}q$$

$$q = \frac{68}{9}$$

مرونة الطلب :

إذا كانت $y = f(x)$ **فإن مرونة هذه الدالة بالنسبة إلى x تساوي** $E = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$

وبشكل خاص إذا كانت $q_d = f(p)$ **دالة الطلب في السعر فإن :**

مرونة الطلب هي : $E_d = \frac{p}{q_d} \cdot \frac{dq_d}{dp}$

ثال : إذا كان منحنى دالة الطلب على سلعة معينة هو $P = 15 - 3q_d$ **فأوجد رونة الطلب عندما** $q_d = \frac{1}{3}$

الحل :

$$3q_d = 5 - p$$

$$q_d = 5 - \frac{1}{3}p$$

$$\frac{dq_d}{dp} = \frac{-1}{3}$$

$$E_d = \frac{P}{q_d} * \frac{dq_d}{dp}$$

$$E_d = \frac{15 - 3q_d}{\frac{1}{3}} * \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$= \frac{15 - 3\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} * \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$= -15 + 1$$

$$= -14$$

:

إذا كان منحنى دالة الطلب على سلعة معينة هو:

$$P = 8 - 4q_d$$

فأوجد مرونة الطلب عندما $q_d = \frac{1}{2}$

$$4q_d = 8 - p$$

$$q_d = 2 - \frac{1}{4}p$$

$$\frac{dq_d}{dp} = \frac{-1}{4}$$

$$E_d = \frac{P}{q_d} * \frac{dq_d}{dp}$$

$$E_d = \frac{8 - 4q_d}{\frac{1}{2}} * \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{8 - 4\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} * \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{8 - 2}{\frac{1}{2}} * \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{6}{\frac{1}{2}} * \left(\frac{-1}{4}\right) = -3$$

الدخل الحدي :

إذا كانت $P = g(x)$ تمثل السعر الذي تباع به كل وحدة من بضاعة ما .
تسمى p دالة الطلب إذا كانت x تمثل عدد الوحدات المباعة ويكون الدخل (الإيراد) الكلي T الناتج عن هذه المبيعات هو :

$$T = Px = xg(x)$$

الدخل الحدي أو الإيراد الحدي عند بيع الوحدة رقم n هو :

$\frac{dT}{dx}$ عند $x = n$

مثال : إذا كان الدخل T الناتج عن بيع x من علب الزيتون معطى بالمعادلة :

$T = \frac{x^2}{10} + 10x$ **فأوجد الدخل الكلي الناتج عن بيع 200 علبة وأوجد الدخل الحدي الناتج عن بيع العلبة العاشرة**

الحل :

الدخل الكلي الناتج عن بيع 200 علبه =

$$T = \frac{x^2}{10} + 10x$$

$$T = \frac{200^2}{10} + 10(200)$$

$$= 6000 \text{ ريال}$$

الدخل الحدي الناتج عن بيع العلبة العاشره =

$$T = \frac{x^2}{10} + 10x$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2x}{10} + 10$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{5} + 10$$

$$\frac{dT}{dx}(10) = \frac{10}{5} + 10$$

$$= 12 \text{ ريال}$$

إذاكان الدخل T عن بيع x علب الحليب معطى بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{x^2}{5} + 5x$$

أوجد **الدخل الكلي عند بيع 100 علبة =**

$$T = \frac{x^2}{10} + 10x$$

$$T = \frac{200^2}{10} + 10(200)$$

$$= 6000 \text{ ريال}$$

أوجد الدخل الحدي عند بيع العلبة رقم 30 =

$$T = \frac{x^2}{5} + 5x$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2x}{5} + 5$$

$$\frac{dT}{dx}(30) = \frac{2(30)}{5} + 5$$

$$= 17 \text{ ريال}$$

مشتقات الدوال الأسيّه واللوغاريتمية والمثلثيّه

1) مشتقة الدالة اللوغاريتمية :

إذا كانت $f(x)=\log_e x$

فإن : $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln e}=\dfrac{1}{x}$

أي أن : $f(x)=\ln x$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}dx$

أمثلة :

$f(x)=\log(1+x^2)$ فأوجد $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\times 2x\log_e$$

مثال1

$$f(x)=linx$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}lin=\frac{1}{x}$$

مثال2

$$f(x)=lin2x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2x}\times 2=\frac{1}{x}$$

مثال3

$$f(x)=\log_a e$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

مثال4

$$f(x)=\log(x^2+3x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+3x}\bullet(2x+3)\bullet\log_{10}e$$

$$=\frac{2x+3}{x^2+3x}\bullet\log_{10}e$$

أوجد مشتقة الدوال التالية :

$\bullet \tilde{N}(X) = \log\left(x^3 + 5x\right)$

$$\tilde{N}(X) = \frac{1}{x^3 + 5x} * \left(3x^2 + 5\right)\log_{10} l$$

$$= \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x}\log_{10} l$$

$\bullet \tilde{N}(X) = l^{\left(5x^2 + 2x\right)}$

$$\tilde{N}(X) = l^{\left(5x^2 + 2x\right)} * \left(10x + 2\right)$$

$$= \left(10x + 2\right) l^{\left(5x^2 + 2x\right)}$$

$\bullet \tilde{N}(X) = l^x * \log x$

$$\tilde{N}(X) = \left(l^x * (1)\log x\right) + \left(\frac{1}{x}\log_{10} l * l^x\right)$$

$$= \left(l^x \log x\right) + \left(\frac{1}{x}\log_{10} l * l^x\right)$$

$$= l^x\left[1 * \log x + \frac{1}{x}\log_{10} l\right]$$

$$y = (x^2 + 5)^4 e^{3x}$$

$$y' = 4(x^2 + 5)^3 e^{3x} + e^{3x}(3)(x^2 + 5)^4$$

$$= 8x(x^2 + 5)^3 e^{3x} + e^{3x}(3)(x^2 + 5)^4$$

$$= e^{3x}(x^2 + 5)^3\left[8x + 3(x^2 + 5)^1\right]$$

$$= e^{3x}(x^2 + 5)^3\left[3x^2 + 8x + 15\right]$$

$\bullet \tilde{N}(X) = \dfrac{l^{2x}}{\log x^2}$

$$\tilde{N}(X) = \frac{\left(\left(l^{2x} * 2\right)\left(\log x^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{x^2}(2x)\log_{10} l\right)\left(l^{2x}\right)\right)}{\left(\log x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2l^{2x}\log x^2\right) - \left(\frac{2x}{x^2} * \log_{10} l * l^{2x}\right)}{\left(\log x^2\right)\left(\log x^2\right)}$$

$$= \frac{l^{2x}\left[(2) - \left(\frac{2x}{x^2}\log_{10} l\right)\right]}{\log x^2}$$

2) مشتقة الدوال الأسيّه

إذا كانت $f(x)=e^{x}$

فإن : $f'(x)=e^{x}dx$

امثله :

مـ ثا ل1

$$f(x)=e^{x^2+5x}$$
$$f'(x)=e^{x^2+5x}(2x+5)$$
$$=(2x+5)e^{x^2+5x}$$

مـ ثا ل2

$$f(x)=x^3e^{x^2}$$
$$f'(x)=(3x^2)(e^{x^2})+(2xe^{x^2})(x^3)$$
$$=e^{x^2}\left[3x^2+2x^4\right]$$
$$=e^{x^2}x^2\left[3+2x^2\right]$$

ملاحظه :

إذا كانت $f(x)=e^{g(x)}$

فإن : $f'(x)=e^{g(x)}g'(x)$

مـ ثا ل

$$f(x)=e^{3x^2}\log(x^2+2x+1)$$
$$f'(x)=\left[e^{3x^2}(6x)\right]\log(x^2+2x+1)$$
$$=e^{3x^2}(6x)\log(x^2+2x+1)+\frac{2x+2}{x^2+2x+1}\log_{10}e\, e^{3x^2}$$
$$e^{3x^2}\left[(6x)\log(x^2+2x+1)+\frac{2x+2}{x^2+2x+1}\log_{10}e\right]$$

مـ ثا ل2

$$f(x)=\frac{linx}{e^{x3}}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}e^{x^3}-e^{x^3}(3x^2)linx}{\left(e^{x^3}\right)^2}$$
$$f'(x)=\frac{e^{x^3}\left[\frac{1}{x}-(3x^2)linx\right]}{e^{x^3}e^{x^3}}$$
$$=\frac{\frac{1}{x}-(3x^2)linx}{e^{x^3}}$$

أوجد مشتقات الدوال التالية :

$\bullet \tilde{N}(X) = X^3 + 5X\, l^X$

$\tilde{N}(X) = 3X^2 + \left(\left(5 * l^X\right) + \left(l^x(1)\right)(5x)\right)$

$= 3X^2 + 5l^x + 5X\, l^x$

$X\, l^x\left[3X + 10\right]$

$\bullet \tilde{N}(X) = X^2 + \ln x$

$\tilde{N}(X) = 2X + \frac{1}{X}\ln = 2X + \frac{1}{X}$

$\bullet \tilde{N}(X) = X^2 \ln x - 5l^x$

$\tilde{N}(X) = 2X\ \ln x + \frac{1}{X}X^2 - 0 * l^X + l^X * 5$

$= 2X\ \ln x + x - 5l^x$

$\bullet \tilde{N}(X) = X^3 l^{-3x}$

$\tilde{N}(X) = \left(3X^2\right)\left(l^{-3X}\right) + \left(-3l^{-3X}\right)\left(X^3\right)$

$= X^2 l^{-3X}\left[3 - 3X\right]$

$\bullet \tilde{N}(X) = \left(X^2 + 5\right)^4 l^{3x}$

$\tilde{N}(X) = 4\left(X^2 + 5\right)^3 (2X)\, l^{3X} + \left(l^{3X} * 3\right)\left(\left(X^2 + 5\right)^4\right)$

$= 4\left(X^2 + 5\right)^3 (2X)\, l^{3X} + 3l^{3X}\left(X^2 + 5\right)^4$

$= \left(X^2 + 5\right)^3 l^{3X}\left[8X + 3\left(X^2 + 5\right)\right]$

$= \left(X^2 + 5\right)^3 l^{3X}\left[3x^2 + 8x + 15\right]$

مشتقات الدوال المثلثيّه

$$f(x) = Sinx$$
$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$
$$f'(x) = -\sin x$$

مـ ثا ل1

$$f(x) = Sin5x$$
$$f'(x) = \cos 5x(5) = 5\cos 5x$$

مـ ثا ل2

$$f(x) = \cos x^2$$
$$f'(X) = -Sinx^2(2x)$$
$$= -2xSinx^2$$

مـ ثا ل3

$$\sin^2 x$$
$$f'(X) = 2\sin x(\cos x) = 2\sin xCosx$$

مثـــــال 4

$$f(x) = Sinx \bullet Cosx$$
$$f'(x) = Cosx \bullet Cosx + (-Sinx)(\sin x)$$
$$= Cos^2x - Sin^2x$$

أستنتج مشتقة الدالة:

$$f(X)=\tan x$$

الحل:

$$f(X)=\tan x=\frac{Sinx}{Cosx}, Cosx\neq 0$$

$$f(X)=\frac{Sinx}{Cosx}$$

$$f'(x)=\frac{Cosx\bullet Cosx-(-Sinx)(\sin x)}{Cos^2x}$$

$$=\frac{Cos^2x+Sin^2x}{Cos^2x}=\frac{1}{Cos^2x}=\sec^2 x$$

$$\boxed{f(X)=\tan x, f'(x)=\sec^2 x}$$

أستنتج مشتقة الدالة:

$$f(X)=\cot x$$

الحل:

$$f(X)=\tan x=\frac{Cosx}{Sinx}, Sinx\neq 0$$

$$f(X)=\frac{Cosx}{Sinx}$$

$$f'(x)=\frac{(-Sinx)(\sin x)-(Cosx\bullet Cosx)}{Sin^2x}$$

$$=\frac{-Sin^2x-Cos^2x}{Sin^2x}$$

$$=\frac{-(Sin^2x+Cos^2x)}{Sin^2x}=\frac{-1}{Sin^2x}=-\csc^2 x$$

$$\boxed{f(x)=\cot x, f'(x)=-\csc^2 x}$$

أستنتج مشتقة الدالة:

$$f(X)=\sec x$$

الحل:

$$f(X)=Secx=\frac{1}{Cosx}, Cosx\neq 0$$

$$f(X)=\frac{1}{Cosx}$$

$$f'(x)=\frac{(0)(\cos x)-(-Sinx\bullet(1))}{Cos^2x}$$

$$=\frac{0+Sin^2x}{Cos^2x}=\frac{Sin^2x}{Cos^2x}$$

$$=\frac{Sinx}{CosxCosx}$$

$$=\frac{Sin\ x}{Cosx}\bullet\frac{1}{Cosx}$$

$$=\tan x\bullet Secx$$

$$\boxed{f(x)=\sec x, f'(x)=\sec x\bullet\tan x}$$

وبطريقة أخرى " **الأسهل**"

$$f(X)=Secx=\frac{1}{Cosx}, Cosx\neq 0$$

$$f(X)=\frac{1}{Cosx}$$

$$f'(x)=\frac{-(-Sinx)}{Cos^2x}$$

$$=\frac{Sin\ x}{Cosx}\bullet\frac{1}{Cosx}$$

$$=\tan x\bullet Secx$$

" $\boxed{f(x)=\sec x, f'(x)=\sec x\bullet\tan x}$

أستنتج مشتقة الدالة:

$f(X) = \sec x$

الحل:

$f(X) = \csc x = \frac{1}{Sinx}, Sinx \neq 0$

$f(X) = \frac{1}{Sinx}$

$f'(x) = \frac{(0)(Sinx) - (\cos x \bullet (1))}{Sin^2 x}$

$= \frac{0 - Cos^2 x}{Sin^2 x} \bullet \frac{1}{Sin^2 x}$

$= \cot x \bullet \csc x$

$\boxed{f(X) = \csc x, f'(x) = -\cot x \bullet \csc x}$

وبطريقة أخرى " **الأسهل**"

$f(X) = \frac{1}{Sinx}$

$= \frac{-Cosx}{Sinx} \bullet \frac{1}{Sinx}$

$= \cot x \bullet \csc x$

" $\boxed{f(X) = \csc x, f'(x) = -\cot x \bullet \csc x}$

مثال :

$f(X) = \cos x \bullet \tan x$

$f'(x) = (-\sin)\tan x + \sec^2 x \bullet \cos x$

$= -\sin x \bullet \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} \bullet \cos x$

$= \sin x \bullet \tan x + \frac{1}{\cos x}$

$= \sin x \bullet \tan x \bullet \sec x$

*****

الحل مو كامل .

لأن التكمله هنا راح تكون صعبه شوي ,

ف نختصرها بالحل الأسهل

وبطريقة أخرى " **الأسهل**"

$f(X) = \cos x \bullet \frac{\sin x}{\cos x}$

" $f(x) = Sinx$

$f'(x) = \cos x$

مشتقات الدوال المثلثية

$$f(x) = Sinx$$
$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$
$$f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x$$
$$f'(x) = Sec^2 x$$

$$f(x) = \cot x$$
$$f'(x) = -\csc^2 x$$

$$f(x) = \sec x$$
$$f'(x) = \sec x \bullet \tan x$$

$$f(x) = \csc x$$
$$f'(x) = -\csc x \bullet \cot x$$

*أي دالة من الدوال المثلثيّة تبدأ بحرف **<u>c</u>**

تكون مشتقتها **<u>ســــــالبــــــه</u>**

أوجد مشتقات الدوال المثلثية التالية :

$$\bullet \tilde{N}(X) = 3X \sin 5x - 2\cos x$$

$$\tilde{N}(X) = \left(3\sin 5x + 5\cos 5x\,(3X)\right) - \left(0 * \cos x\right) + \left(-\sin x * 2\right)$$

$$= \left(3\sin 5x + 5\cos 5x\,(3X)\right) + \left(2\sin x\right)$$

$$\bullet \tilde{N}(X) = \cos\left(x^2 - 3x + 1\right)$$

$$\tilde{N}(X) = -\sin\left(x^2 - 3x + 1\right) - \sin\left(2x - 3\right)$$

$$\bullet \tilde{N}(X) = \cot(x)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tilde{N}(X) = \frac{(-\sin x * \sin x) - (\cos x * \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$\bullet \tilde{N}(X) = \sec(x)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tilde{N}(X) = -\frac{(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} * \frac{1}{\cos x}$$

$$= \tan x * \sec x$$

$$\bullet \tilde{N}(X) = \sin^3(x)$$

$$\tilde{N}(X) = 3\sin^2 x\,(\cos x) = 3\sin^2 x \cos x$$

أمثله :

$$\underline{f(X) = e^{x^2} \sec x}$$

$$f'(x) = e^{x^2}(2x)\sec x + \sec x \bullet \tan x e^{x^2}$$

$$e^{x^2} \sec x\,(2x + \tan)$$

$$\underline{f(X) = (\log \sin x)\cot x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \bullet \cos x \bullet \log_{10} e \bullet \cot + (-\csc^2 x \log \sin x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} \log_{10} e \bullet \cot - \csc^2 x \log \sin x$$

$$= \cot x \log_{10} e \bullet \cot - \csc^2 x \log \sin x$$

$$= \cot^2 x \log_{10} e - \csc^2 x \log \sin x$$

الفصل الرابع – المحاضرة السادسة عشر

❖ **التكامل :**

نرمز للتكامل بـ $\int \frac{dy}{dx}$, $\int \grave{y}$, $\int \grave{f}(x)$

❖ **مثال :**

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int \mathbf{x^5\,dx} = \frac{\mathbf{x^6}}{\mathbf{6}} + \mathbf{c} \quad = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{x^6} + \boldsymbol{c}$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int \mathbf{x^4\,dx} = \frac{\mathbf{x^5}}{\mathbf{5}} + \mathbf{c} \quad = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\mathbf{x^5} + \boldsymbol{c}$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int \mathbf{3\,x^4\,dx} = \mathbf{3}\left(\frac{\mathbf{x^5}}{\mathbf{5}} + \mathbf{c}\right) \quad = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\mathbf{x^5} + \boldsymbol{c}$$

❖ قوانين التكامل :

$$1)\int dx = x + c$$

$$2)\int x^{n} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$3)\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$4)\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$5)\int e^{x} dx = e^{x} + c$$

$$6)\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$7)\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$8)\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

$$9)\int \sec^{2}(x)dx = \tan x + c$$

$$10)\int \csc^{2}(x)dx = -\cot x + c$$

$$11)\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + c$$

$$12)\int \csc(x)\cot(x)dx = -\csc x + c$$

❖ أمثلة :

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int 5\,x^3\,dx = 5\left(\frac{x^4}{4}+c\right) \quad = \frac{5}{4}x^4 + c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int (3x^7+5x^2)\,dx = \int 3x^7 + \int 5x^2 \quad = 3\left(\frac{x^8}{8}+c\right)+5\left(\frac{x^3}{3}+c\right)$$

$$=\frac{3}{8}x^8+\frac{5}{3}x^3+c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \ln\left|x^2+3\right| + c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int \frac{3x+1}{x^3+x+2}\,dx = \ln\left|x^3+x+2\right| + c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int (7x+3)\,dx = \int 7x\,dx + \int 3\,dx \quad = \frac{7}{2}x^2 + 3x + c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int (3x+2)\,dx = \int 3x\,dx + \int 2\,dx \quad = \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int \frac{x^6 + 2x^2 + 1}{x^2} dx = \int \frac{x^6}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} + dx$$

$$= \int x^4 + 2 + \frac{1}{x^2} + dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2x + c + \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2x + \frac{x^{-2-1}}{-2-1} + c$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + 2x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + 2x - \frac{1}{x} + c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int \left(x^{\frac{1}{2}} + 3x^2 + e^x\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3\int 3x^2 dx + \int e^x\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\frac{1}{2}-1} + 3\frac{x^3}{3} + e^x + c$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x^3 + e^x + c$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + x^3 + e^x + c$$

$\int(3\sin(x)+2x)\ \ dx$ اوجد تكامل ما يلي :

$$=\int 3\sin(x)\ \ dx+\int 2x\ \ dx$$

$$=-3\cos(x)+x^2+c$$

$\int(\sin(x)+\cos(x))\ \ dx$ اوجد تكامل ما يلي :

$$=\int\sin(x)\ dx+\int\cos(x)\ \ dx$$

$$=-\cos(x)+\sin x+c$$

$\int(x+3\csc(x))\ \ dx$ اوجد تكامل ما يلي :

$$=\frac{x^2}{2}+3\tan(x)+c$$

$$=\frac{1}{2}x^2+3\tan(x)+c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int 5\,dx=5x+c$$

اوجد تكامل ما يلي :

$$\int(4e^x+x^{-1})\,dx=4\int e^x\,dx+\int\frac{1}{x}\,dx\quad=4e^x+\ln(x)+c$$

اوجد تكامل ما يلي : $\int (x^{-2} + 2\sin(x) + 3\sqrt{x})\ \ dx$

$$= \int x^{-2}\, dx + 2\int (-\cos x) + 3\int \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\frac{1}{2}-1} + c$$

$$= -x^{-1} - 2\cos x + 2x^{\frac{3}{2}}\ + c$$

$$= -\frac{1}{x} - 2\cos x + 2x^{\frac{3}{2}}\ + c$$

❖ المعادلات التفاضلية :

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$5x^4 = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$dy = 5x^4 dx$$

$$\int dy = \int 5x^4\, dx$$

$$y = x^5 + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y^{-2}$$

$$= y^2 dy = x^3 dx$$

$$= \int y^2 dy = \int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3$$

بالقسمة على y^3 والضرب في dx

$$\frac{dy}{y^3} = 4x^3dx$$

$$= \int y^{-3}dy = \int 4x^3dx$$

$$= \frac{y^{-2}}{-2} = 4\frac{x^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{-2y^2} = x^4 + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\grave{y} = x^{-1}y$$

بالقسمة على y والضرب في dx

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\grave{y} = xe^{-y}$$

$$\grave{y} = \frac{x}{e^{y}}$$

$$e^{y} \cdot \grave{y} = x$$

$$e^{y}\frac{dy}{dx} = x$$

$$\int e^{y}\,dy = \int x \quad dx$$

$$e^{y} = \frac{1}{2}x^{2} + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{-y}\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{e^{y}}\sin x$$

$$\int e^{y} dy = \int 3\sin x \quad dx$$

$$e^{y} = -3\cos x + c$$

❖ تمارين :

أوجد تكامل ما يلي:

$$\int (x^2 + 3x)dx$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + c$$

أوجد تكامل ما يلي:

$$\int \frac{1}{x^5}dx$$

$$\int x^{-5}dx = \frac{1}{-4}x^{-4}$$

أوجد تكامل ما يلي:

$$\int e^x x^3 dx$$

$$e^x + \frac{1}{4}x^4 + c$$

أوجد تكامل ما يلي:

$$\int (3\sin x - \csc^2 x)dx$$

$$-3\cos x - \tan x + c$$

أوجد تكامل ما يلي:

$$\int (\sec x \tan x) dx$$

$$\sec x + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} + \sin x$$

$$dy = e^{x} + \sin x \quad dx$$

$$\int dy = \int e^{x} + \sin x \quad dx$$

$$y = e^{x} - \cos x + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\grave{y} = x^{2} e^{-y}$$

$$\grave{y} = \frac{x^{2}}{e^{y}}$$

$$e^{y} \frac{dy}{dx} = x^{2}$$

$$\int e^{y} \frac{dy}{dx} = \int x^{2} \quad dx$$

$$e^{y} = \frac{1}{3} x^{3} + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y^5$$

$$\frac{dy}{y^5} = 3x^2 \ dx$$

$$\int y^{-5}\,dy = \int 3x^2 \ dx$$

$$\frac{1}{-4}y^{-4} = 3\frac{x^3}{3} + c$$

$$\frac{1}{-4}y^{-4} = x^3 + c$$

المحاضرة السابعة عشر

- التكامل بالتعويض :
- أمثلة :

اوجد : $\int (x+1)^5\, dx$

نفرض ان : $u = x+1 \quad \rightarrow \quad du = 1dx$

$$\therefore \int (u)^5\, du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(x+1)^6}{6} + c$$

اوجد : $\int (x^2+1)^3\, x\, dx$

نفرض ان : $u = x^2+1 \quad \rightarrow \quad du = 2x\, dx \quad \rightarrow x\, dx = \frac{1}{2}\, du$

$$\therefore \int (u)^3 \left(\frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{2}\int (u)^3\, du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + c = \frac{u^4}{8} + c$$
$$= \frac{(x^2+1)^4}{8} + c$$

اوجد : $\int x^2 (x^3+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$

نفرض ان : $u = x^3+1 \quad \rightarrow \quad du = 3x^2\, dx \quad \rightarrow x^2\, dx = \frac{1}{3}\, du$

$$\therefore \int (u)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}\right) du = \frac{1}{3}\int (u)^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{9}\,(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

اوجد : $\int \frac{1}{(3x+2)^2}\, dx$

نفرض ان : $u = 3x + 2 \quad \rightarrow \quad du = 3\, dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}\, du$

$$\therefore \int \frac{\frac{1}{3} du}{u^2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3} \int u^{-2} du \quad = \frac{1}{3} \frac{u^{-1}}{-1} + c \quad = -\frac{1}{3u} + c$$

$$= -\frac{1}{3(3x+2)} + c$$

اوجد : $\int (3x - 5)^4\, dx$

نفرض ان : $u = 3x - 5 \quad \rightarrow \quad du = 3dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} du$

$$\therefore \frac{1}{3} \int (u)^4\, du \quad = \frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + c \quad = \frac{u^5}{15} + c = \frac{(3x-5)^4}{15} + c$$

اوجد : $\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x}}\, dx$

نفرض ان : $u = x^3 + 2x \quad \rightarrow \quad du = 3x^2 + 2\, dx$

$$\therefore \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du \quad = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \quad = 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\,(x^3 + 2x)^{\frac{1}{2}} + c$$

$\int \sin(x)\cos(x)\,dx$: اوجد

$u=\sin(x) \quad \rightarrow \quad du=\cos(x)\,dx$: نفرض ان

$$\therefore \int u\cdot du = \frac{u^2}{2}+c = \frac{\sin(x)^2}{2}+c$$

$\int \sin(x)^2\cos(x)\,dx$: اوجد

$u=\sin(x) \quad \rightarrow \quad du=\cos(x)\,dx$: نفرض ان

$$\therefore \int u^2 du = \frac{u^3}{3}+c = \frac{\sin(x)^3}{3}+c$$

$\int xe^{x^2}dx$: اوجد

$u=x^2 \quad \rightarrow \quad du=2x\,dx$: نفرض ان

$$\therefore \int e^2x\,du = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u+c = \frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

$\int e^{-3x}dx$: اوجد

$u=-3x \quad \rightarrow \quad du=-3\,dx \rightarrow dx=-\frac{1}{3}du$: نفرض ان

$$\therefore -\frac{1}{3}\int e^u\,du = -\frac{1}{3}e^u+c = -\frac{1}{3}e^{-3x}+c$$

اوجد : $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

نفرض ان : $u = 1 + x^2 \quad \to \quad du = 2x\,dx$

$$\therefore \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\left|1 + x^2\right| + c$$

اوجد : $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

نفرض ان : $u = 1 + x^4 \quad \to \quad du = 4x^3\,dx \ \to \ x^3 dx = \frac{1}{4}\,du$

$$\therefore \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln\left|1 + x^4\right| + c$$

طريقة أخرى :

نضرب في 4 ونقسم على 4

$$\therefore \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1 + x^4} = \frac{1}{4}\ln\left|1 + x^4\right| + c$$

❖ تمارين :

اوجد : $\int (x^3 - 2)^5\,dx$

نفرض ان : $u = x^3 - 2 \quad \to \quad du = 2x\,dx \ \to \ dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\therefore \frac{1}{2}\int (u)^5\,du \quad = \frac{1}{2}\frac{u^6}{6} + c \quad = \frac{(x^3 - 2)^6}{12} + c$$

اوجد : $\int x^3(x^4+2)\,dx$

نفرض ان : $u = x^4+2 \quad \rightarrow \quad du = 4x^3\,dx \ \rightarrow \ x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$

$$\therefore \frac{1}{4}\int u\,du \ = \frac{1}{4}\frac{u^2}{2} + c \ = \frac{(x^4+2)^6}{8} + c$$

اوجد : $\int \frac{1}{(2x-5)^3}\,dx$

نفرض ان : $u = 2x-5 \quad \rightarrow \quad du = 2\,dx \ \rightarrow \ dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\therefore \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\int u^{-3}du \ = \frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{-2} + c \ = -\frac{1}{4(2x-5)} + c$$

اوجد : $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

نفرض ان : $u = x^3 \quad \rightarrow \quad du = 3x^2\,dx \rightarrow x^2\,dx = \frac{1}{3}du$

$$\therefore \frac{1}{3}\int e^u\,du = \ \frac{1}{3}e^u + c \ = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

اوجد : $\int e^{-5x}dx$

نفرض ان : $u = -5x \quad \rightarrow \quad du = -5\,dx \ \rightarrow dx = -\frac{1}{5}du$

$$\therefore -\frac{1}{5}\int e^u\,du = \ -\frac{1}{5}e^u + c \ = -\frac{1}{3}e^{-5x} + c$$

❖ التكامل بالتجزيء :

❖ قاعدة :

نعلم أن : $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f(x)\cdot \grave{g}(x) + g(x)\cdot \grave{f}(x)$

أي أن : $f(x)\cdot \grave{g}(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - g(x)\cdot \grave{f}(x)$

$$u\cdot v - \int v\,du$$

❖ أمثلة :

اوجد : $\int x(\mathrm{x}+1)^9\,dx$

نفرض ان : $g(x) = x \quad \rightarrow \quad \grave{f}(x) = (\mathrm{x}+1)^9$

$$= g(x)\cdot f(x) - \int f(x)\cdot \grave{g}(x)$$

$$= x\cdot \frac{(\mathrm{x}+1)^{10}}{10} - \int \frac{(\mathrm{x}+1)^{10}}{10}\cdot(1)\,dx$$

$$= \frac{\mathrm{x}(\mathrm{x}+1)^{10}}{10} - \frac{1}{10}\int (\mathrm{x}+1)^{10}\,dx$$

$$= \frac{\mathrm{x}(\mathrm{x}+1)^{10}}{10} - \frac{(\mathrm{x}+1)^{11}}{10(11)} + c$$

$$= \frac{\mathrm{x}(\mathrm{x}+1)^{10}}{10} - \frac{(\mathrm{x}+1)^{11}}{110} + c$$

$\int\left(5x\sqrt{x+3}\right)dx$: اوجد

نفرض ان : $g(x) = 5x \quad \rightarrow \quad \grave{f}(x) = \sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{1}{2}}$

$$= g(x) \cdot f(x) - \int f(x) \cdot \grave{g}(x)$$

$$= 5x \cdot \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\int (x+3)^{\frac{3}{2}} \cdot (5)\, dx$$

$$= 5x \cdot \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{10}{3} \cdot \frac{(x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{10x}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{20}{15}(x+3)^{\frac{5}{2}} + c$$

$\int x \sin x\, dx$: اوجد

نفرض ان : $\grave{g}(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad f(x) = x$

$$= f(x) \cdot g(x) - \int \grave{f}(x) \cdot g(x)$$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int \cos x \; dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

اوجد : $\int xe^{x}\, dx$

نفرض ان : $u = x \quad \rightarrow \quad du = 1$

$$dv = e^{x} \quad \rightarrow \quad v = e^{x}$$

$$u \cdot v - \int v\, du$$

$$= x\ e^{x} - \int e^{x}\ dx$$

$$= x\ e^{x} - e^{x} + c$$

اوجد : $\int \ln x \quad dx$

نفرض ان : $u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}$

$$dv = 1 \quad \rightarrow \quad v = x$$

$$u \cdot v - \int v\, du$$

$$= \ln x \quad (x) \quad - \int dx$$

$$= x\ \ln x \quad - \ x + c$$

$$= x\,[\ \ln x - 1]\ + c$$

❖ تمرين :

اوجد : $\int \mathrm{x} \cos x\, dx$

نفرض ان : $u = \mathrm{x} \quad \rightarrow \quad du = 1$

$$dv = \cos x \quad \rightarrow \quad v = \sin x$$

$$u \cdot v - \int v\, du$$

$$= \mathrm{x} \quad \sin \mathrm{x} \quad - \int \sin x \quad (1)\, dx$$

$$= \mathrm{x} \quad \sin \mathrm{x} \quad + \cos x + c$$

المحاضرة الثامنة عشر

❖ التكامل المحدود :

❖ أمثلة :

$$\int_{1}^{2} \mathbf{x^2}\ \boldsymbol{dx} =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \left[\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(1)^3\right] = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_{0}^{1} (\mathbf{e^x + 1})\ \boldsymbol{dx} =$$

$$[\mathbf{e^x} + 1]_0^1 = [(\mathbf{e^1} + 1) - (\mathbf{e^0} + \mathbf{1})] = e + 1 - 1 = e$$

$$\int_{1}^{2} (\mathbf{x^2 - 1})\ \boldsymbol{dx} =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left[\left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)\right] = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{2} (\mathbf{x + 1})^{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{dx} =$$

$$\left[\frac{(\mathbf{x + 1})^{\mathbf{4}}}{4} - x\right]_0^2 = \left[\frac{(2+1)^4}{4} - \frac{(0+1)^4}{4}\right] = \left(\frac{3^4}{4}\right) - \left(\frac{1^4}{3}\right) = 20$$

❖ خواص التكامل المحدود :

$$1)\int_{a}^{b} f(x)dx = 0$$

$$2)\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

$$3)\int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{c} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx$$

$$4)\int_{a}^{b} f_1(x)dx \leq \int_{a}^{b} f_2(x)d$$

مثال (1) إذا كانت : $f(x)=\begin{Bmatrix} 3x+4, if\ 0\le x\le 2 \\ 5, if\ 2\le x\le 3 \end{Bmatrix}$ أوجد $\int_0^3 f(x)dx$

الحل :

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 (3x+4)\,dx + \int_2^3 5\ \ dx$$

$$= \left[\left[3\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^2 + [5x]_2^3\right] == \left[\left(\frac{12}{2}+8\right) - 0 + (15-10)\right] = 19$$

❖ مثال :

$$\int_2^2 x\ \ dx = \quad 0$$

$$\int_3^3 (e^x+5x^2+6)\ \ dx = \quad 0$$

❖ تمارين :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3} =$$

$$\int_1^2 x^{-3}\,dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \left(\frac{2^{-2}}{-2}\right) - \left(\frac{1^{-2}}{-2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\int_0^2 x\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \left(\frac{1}{2}(2^2)\right) - \left(\frac{1}{2}(0^2)\right) = 2$$

$$\int_1^3 (x^2 + x)\,dx =$$

$$= \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 x\ \ dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$

$$= \left(\frac{1}{3}(3^3)\right) - \left(\frac{1}{3}(1^3)\right) + \left(\frac{1}{2}(2^2)\right) - \left(\frac{1}{2}(1^2)\right)$$

$$= \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{26}{3} + \frac{8}{2} = \frac{38}{3}$$

❖ تطبيقات :

1/ تطبيقات على المساحة :

❖ مثال :

اوجد المساحة المحصورة بين منحنى الرسم للدالة $f(x) = x + 1$ ومحور x والمستقيمين

x=2 x=3

$$A = \int_{2}^{3} (x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_2^3 = \left(\left(\frac{9}{2} + 3\right) - (2+2)\right)$$

$$= \frac{15}{2} - 4 = \frac{7}{2} \text{ وحدة مربعة}$$

❖ تمرين :

اوجد المساحة المحصورة بين منحنى الرسم للدالة $f(x) = x^2$ ومحور x والمستقيمين

x=2 x=1

$$A = \int_{1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \left(\left(\frac{1}{3}(8)\right) - \left(\frac{1}{3}(1)\right)\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

المحاضرة التاسعة عشر

❖ تطبيقات اقتصادية :

1/ الدخل الحدي :

❖ قاعدة :

$$\boxed{T = \int_{0}^{t} f(t)dt}$$

❖ مثال :

اذا كان معدل الدخل عن رسوم الطلاب معطى بالعلاقة $f(t) = (t+1)^{\frac{-1}{2}}(90000)$

حيث t هو الزمن بالسنوات فأحسب الدخل الكلي المتوقع من الرسوم خلال 3 سنوات

$$t = 3$$

$$T = \int_{0}^{t} f(t)dt$$

$$T = \int_{0}^{3} 90000(t+1)^{\frac{-1}{2}}dt$$

$$T = \left[\frac{90000(t+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{3} = 180000 \text{ ريال}$$

2/ القيمة الرأسمالية :

❖ قاعدة :

$$\int_{0}^{t_1} e^{-tr} f(t)dt$$

❖ مثال :

اذا اعتبرنا دخلا ثابتا مقدارة 50 ريالا في الشهر فترة 3 سنوات فما هي القيمة الرأسمالية لهذا الدخل اذا كانت الفائدة هي 6%

t=3

القيمه الرأسمالية =

$$\int_{0}^{t_1} e^{-tr} f(t)dt$$

$$f(t) = 50$$

3 سنوات = 6×12=36 شهرا

R=0.06

$$\int_{0}^{3} 600e^{-0.06t}\, dt$$

$$\left[600\,\frac{e^{-0.06t}}{-0.06}\right]_{0}^{3} = 1647 \text{ ريال}$$

3/ التحليل الحدي :

- ❖ قاعدة :

$$\boxed{T = \int \frac{dT}{dx} dx}$$

- ❖ مثال :

اذا كان الخل الحدي بالنسبة لمبيعات سيارات هو معطى بالعلاقة $\frac{dT}{dx} = 60x^2 + 40x + 1$

بما ان $\frac{dT}{dx} = 60x^2 + 40x + 1$

فأن $\int \frac{dT}{dx} = \int 60x^2 + 40x + 1$

$$60\frac{x^4}{3} + \frac{40x^2}{2} + x + c$$

عندما x=0 تكون T=0

عدد السيارات =0 فان المبيعات =0

$$0 = 60\frac{(0)^4}{3} + \frac{40(0)^2}{2} + 0 + c$$

C=0

$$\therefore T = 20x^3 + 20x^2 + X$$

اذا كانت X=5 فان

$$T = 20(5)^3 + 20(5)^2 + 5$$

$= 3005$ ريال

❖ تمرين :

اذا اعتبرنا دخلا ثابتا مقدارة 30 ريالا في الشهر فترة 5 سنوات فما هي القيمة الرأسمالية لهذا الدخل اذا كانت الفائدة هي 5%

$$\int_0^{t_1} e^{-tr} f(t)dt$$

$$f(t) = 30$$

R=0.05

$$\int_0^{5} 360e^{-0.05t}\,dt$$

$$= \left[360\frac{e^{-0.05t}}{-0.05}\right]_0^3$$

$$= \left(360\frac{e^{-0.05(5)}}{-0.05}\right) - \left(360\frac{e^{-0.05(0)}}{-0.05}\right)$$

$$= \left(360\frac{e^{-0.025}}{-0.05}\right) - \left(360\frac{e^{0}}{-0.05}\right)$$

$$= \left(360\frac{0.7788}{-0.05}\right) - \left(360\frac{1}{-0.05}\right)$$

$$= \left(\frac{280.368}{-0.05}\right) - (-7200)$$

$$= -5607 + 7200 = 1593$$