قوانين الفصل الأول

العمليات على الدوال

- $(f_1 + f_2)\,(x) = f_1(x) + f_2(x)$ [الجمع]
- $(f_1 - f_2)\,(x) = f_1(x) - f_2(x)$ [الطرح]
- $(f_1 \cdot f_2)\,(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ [الضرب]
- $\frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{f1(x)}{f2(x)}$ ، $f_2(x) \neq 0$ [القسمة]
- $(f_1 \circ f_2)\,(x) = f_1\big(f_2(x)\big)$ [التركيب]

معكوس الدالة

اذا كانت $y = f_1(x)$ دالة فأن معكوسها يعني ايجاد x كدالة في y أي ان $x = f_2(y)$

الدالة الخطية

$$F(x) = mx + c$$

ميل المستقيم

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

المستقيمان المتعامدان

يتعامد المستقيمان اذا كان حاصل ضرب ميلهما يساوي 1- أي ان :

المستقيمان متعامدان اذا كان $m1 \times m2 = -1$

- المسافة بين نقطتين

d=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

حيث أن: (x_1, y_1)النقطة الأولى ، (x_2, y_2)النقطة الثانية

- صورة دوال العرض (الإنتاج) الخطية

$$q_s = a + bp$$

حيث : a , b ثابتان

q_s الكمية المعروضة ، P سعر الوحدة

- التوازن في السوق بين دالتي العرض و الطلب الخطيتين

متى يتم التوازن بين دالة العرض و دالة الطلب ؟

يتم التوازن عندما تكون $q_s = q_d$ يعني كمية الطلب = كمية العرض

➢ الدوال المثلثية

دالة الجيب	دالة جيب التمام	دالة الظل	دالة ظل التمام	دالة القاطع	دالة قاطع التمام
y = sin (x) Y = f(x) =sin(x)	y = cos (x)	y = tan (x)	y = cot (x)	y= sec(x)	y= csc(x)
		tan(x)= $\frac{sin\,(x)}{cos\,(x)}$	cot(x)= $\frac{cos\,(x)}{sin\,(x)}$	sec(x)= $\frac{1}{cos(x)}$	Csc(x) = $\frac{1}{sin\,(x)}$
		حيث: $\cos(x) \neq 0$	حيث: $\sin(x) \neq 0$	حيث : $\cos(x) \neq 0$	حيث: $\sin(x) \neq 0$
			كذلك : Cot(x)= $\frac{1}{tan\,(x)}$ $\tan(x) \neq 0$	و دالة القاطع مقلوب دالة جيب التمام	و هذه الدالة مقلوب دالة الجيب

➢ و من أهم العلاقات التي تربط بين هذه الدوال هي :

$$\cos^2(x) + sin^2(x) = 1$$

التفسير الهندسي :

- Sin(c)= $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{|AB|}{|CB|}$
- Cos(c)= $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{|CA|}{|CB|}$
- Tan(c)= $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{|AB|}{|CA|}$
- Cot(c)= $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{|CA|}{|AB|}$
- Sec(c)= $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{|CB|}{|CA|}$
- Csc(c)= $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{|CB|}{|AB|}$

- خصائص الدالة الاسية

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad -$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad -$$
$$(a^x)^y = a^{x\,y} \quad -$$
$$(ab)^X = a^x b^x \quad -$$
$$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x} \quad -$$
$$a^x = a^y \rightarrow x = y \quad -$$

- جملة المبلغ المستثمر m هي :

$$T = m\ (1 + \frac{x}{100})^n$$

- الدالة اللوغاريتمية

$$y = log_a x \rightarrow x = a^y$$

- أهم قوانين اللوغريتمات

$$\log_a(xy) = log_a x + log_a y \quad -$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y \quad -$$
$$\log_a x^n = n\, log_a x \quad -$$

قوانين الفصل الثاني

- **سلوك الدالة**

$$\lim_{\times \to \partial^-} f(\times) \neq \lim_{\times \to \partial^+} f(\times)$$

فإننا نقول أن :

$\lim_{\times \to \partial} f(\times)$ غيرموجوده

- **تعريف النهاية اليسرى**

إذا اقتربت الدالة من M عندما يزداد قرب x من a من الجهة اليمنى ∂ $\neq\times$,∂ $>\times$

فإننا نقول أن نهاية الدالة اليمنى عند a هي M **ونكتب :** $\lim_{x \to a} f(x) = m$

- **نظرية**

إذا اقتربت الدالة من M عندما يزداد قرب x من a من الجهة اليمنى ∂ $\neq\times$,∂ $>\times$

فإننا نقول أن نهاية الدالة اليمنى عند a هي M **ونكتب :** $\lim_{x \to a} f(x) = m$

- **جبر النهايات**

- $\lim_{\times \to \partial} C = C$ **حيث C عدد ثابت , R a€**
- $\lim_{\times \to \partial} X = \partial$

➢ نظرية

بفرض أن $\lim_{\times\to\partial} f(\times)$, $\lim_{\times\to\partial} g(\times)$ موجودتان فإن :

- $\lim_{\times\to\partial}[c.f(\times)] = c.\lim_{\times\to\partial} f(\times)$
- $\lim_{\times\to\partial}[f(\times) \pm g(\times)] = \lim_{\times\to\partial} f(\times) \pm \lim_{\times\to\partial} g(\times)$
- $\lim_{\times\to\partial}[f(\times).g(\times)] = \lim_{\times\to\partial} f(\times) \,.\, \lim_{\times\to\partial} g(\times)$
- $\lim_{\times\to\partial} \frac{f(\times)}{g(\times)} = \frac{\lim_{\times\to\partial} f(\times)}{\lim_{\times\to\partial} g(\times)}$ حيث $\lim_{\times\to\partial} g(\times) \neq 0$

➢ نظرية

لأي كثيرة حدود ولكل $\partial \in R$ فإن :

$$\lim_{\times\to\partial} f(\times) = f(\times)$$

➢ نظرية

إذا كان $\lim_{\times\to\partial} f(\times) = L$, n عدد صحيح موجب فإن :

$$\lim_{\times\to\partial} \sqrt[n]{f(\times)} = \sqrt[n]{\lim_{\times\to\partial} f(\times)} = \sqrt[n]{L} \quad L > 0$$

➢ نظرية

إذا كان b عدد ثابتا وكانت $\lim_{\times\to\partial} f(\times) = L$ موجوده فإن :

$$\lim_{\times\to\partial} b^{f(\times)} = b^{\lim_{\times\to\partial} f(\times)} = b^{L}$$

➢ نظرية

إذا كانت $\lim_{\times\to\partial} f(\times) = L$ موجوده وموجبة فإن :

$$\lim_{\times\to\partial} \log\ f(\times) = \log\left(\lim_{\times\to\partial} f(\times)\right) = \log\ L$$

➢ ملاحظة مهمة

إذا كانت الدالة f(x) معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :

$$f(\times) = \begin{Bmatrix} 3x^2 + 5, x \leq 1 \\ 7x - 2, x > 1 \end{Bmatrix}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{\times\to\partial} f(\times)$ فقد تنشأ إحدى **ثلاث حالات هي:**

- a تقع ضمن مجال القاعدة الأولى
- a تقع ضمن مجال القاعدة الثانية
- a تقع على الحد الفاصل بين المجالين

➢ نظرية ساندويتش

إذا كانت : $f(\times) \leq h\ (\times) \leq g(\times)$, وكان $\lim_{\times\to\partial} f(\times) = \lim_{\times\to\partial} g(\times) = L$
فإن :

$$\lim_{\times\to\partial} h(\times) = L$$

➢ نظرية

$\lim_{\times\to\partial}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$، **حيث e العدد النايبيري**

- نظرية

$$\lim_{\times\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- نـهاية المقادير غير المحدودة عند نقطة

- أسلوب التحليل.
- أسلوب الضرب في المرافق.
- أسلوب اخذ أكبر أس بالنسبة لـ **x** ثم قسم الدالة كاملة على هذي القيمة.

- نظرية

- $\lim_{\times\to\infty^+} C = C \quad , \quad \lim_{\times\to\infty^-} C = C$ حيث *C* عدد حقيقي
- إذا كان *n* عدد نسبي موجب وكان *c* عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{\times\to\infty^+}\frac{c}{\times^n}=0 \quad , \lim_{\times\to\infty^-}\frac{c}{\times^n}=0$$

- ملاحظة مهمة

إذا كان لدينا كثيرتي حدود *F(x) , g(x)*، وكان $\lim_{\times\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ فإننا نقسم كل من البسط والمقام على *x* بأكبر قوة مع ملاحظة:

- إذا كانت قوة البسط أكبر من قوة المقام فالنـهاية تساوي ∞
- إذا كانت قوة المقام اكبر من قوة البسط فإنـها تساوي الصفر
- أما إذا كانت تساوت قوة البسط مع قوة المقام فإن النـهاية تساوي قسمة المعاملين للمتغيرين بأكبر قوة

تطبيقات على النهايات

الفائدة المستمرة

افرض ان مبلغا من المالmقد وضع في بنك بسعر $p=100x$وأن الربح يضاف n مر خلال العام الواحد ، لهذا فإن جملة هذا المبلغ في نهاية العام هي:

$$s = m\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n}$$

وإذا سمحنا لعدد المرات nأن يؤول إلى ما لانهاية ، أي أن الفائدة مستمرة فإن جملة هذا المبلغ في نهاية العام:

$$\lim_{n\to\infty} s = m\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\right) = me^{x}$$

ويمثل هذا المقدار$e^{x}m$ قيمة المبلغm بعد سنة من الآن .

وكتعميم لذلك يكون لتصبح قيمة s بعدh من السنوات يعطى بالعلاقة

$$m = se^{-nh}$$

الاتصال

نقول أن الدالة $f(x)$ متصلة عند نقطة C إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

- $f(c)$ معرفة
- $lim_{\times\to\partial} f(x)$ موجودة
- $lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي من الشروط السابقة فإن الدالة $f(x)$ غير متصلة عند C

تكون الدالية$f(x)$ متصلة في الفترة I إذا كانت متصلة عند جميع النقاط الواقعة في هذه الفترة

قوانين الفصل الثالث

- **قانون متوسط التغير**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- **مفهوم المشتقة**

$$f(\overline{x}) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

[أي أن المشتقة هي نهاية متوسط التغير عندما $\Delta_x \to 0$ لهذا تسمى معدل التغير في الدالة]

- **جبر الاشتقاق**

$$f(\overline{x}) = y = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x) = D_x y$$

[رموز الاشتقاق للدالة $y = f(x)$]

A) إذا كانت $f(x) = mx + b$ فإن: $f(\overline{x}) = m$

B) إذا كانت $f(x) = c$ فإن: $f(\overline{x}) = 0$

C) إذا كان neQ عدد نسبي، $f(x) = x^n$ فإن: $f(\overline{x}) = nx^{n-1}$

[حتى تكون المشتقة معرفة يجب أن تكون$x \neq 0$عندما $n \leq 0$]

D) المشتقة لمجموع عدة دوال: $\frac{d}{dx}\left(f_{(x)} + g_{(x)}\right) = \frac{d}{dx}f_{(x)} + \frac{d}{dx}g_{(x)}$

[وكذلك في جملية الطرح]

المشتقة لضرب عدة دوال: $\frac{d}{dx}\left(f_{(x)} \cdot g_{(x)}\right) = f(\overline{x}).g(x) + f(x).g(\overline{x})$

E)

[الضرب عملية إبدالية]

F) المشتقة لخارج قسمة دالتين: $m(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\overline{x}).g(x) - f(x).g(\overline{x})}{(g_{(x)})^2}$

G) مشتقة مقلوب الدالة: $\frac{\text{المشتقة}}{\text{تربيع}}$ $\frac{d}{d(x)}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{(f_{(x)})^2}$

H) قاعدة التسلسل: إذا كانت $y = (f(u)$،$u = g(x)$

فإن : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = f(\overline{x}).g(\overline{x}) = f(\ g(\overline{x})g(\overline{x})\ )$

➢ الإشتقاق الضمني

قد يحدث في بعض الأحيان تكون العلاقه بين المتغير المستقل x والمتغير التابع y غير صريح

في هذه الحالة تكون الدالة على الصورة

$f(x, y) = c$ حيث cمقدار ثابت

ولإيجاد هذه المشتقة نجري عملية التفاضل بالنسبة لـxلجميع المتغيرات

على طرفي المعادلة ويسمى هذا الاشتقاق الضمني.

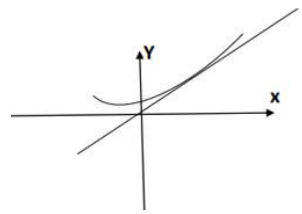
[إن مشتقة الدالة هي دالة اخرى، لهذا يمكن أن نشتق مره ثانية

فنحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية.]

تطبيقات التفاضل على سلوك المنحنيات

1. تفسر المشتقة الأولى هندسياً على أنها ميل المماس لمنحنى الدالة

$y = f(x)$ عند النقطة $(a, f_{(a)})$ إذا كانت مشتقة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x = a$



2. القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية ومجالات التزايد والتناقص

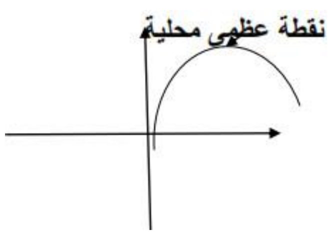
إذا كانت c نقطة في مجال الدالة f فإن:

1. f(c) قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b)

تحتوي على c بحيث أن: $f(x) \le f(x)$

لجميع القيم x في الفترة (a,b)

وتكون النقطة (c,f(c)) هي النقطة العظمى المحلية

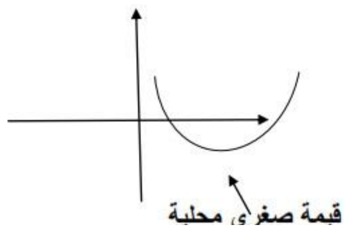


2. تعتبر f(c) قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b)

تحتوي على c بحيث أن: $f(x) \geq f(x)$

لجميع القيم x في الفترة (a,b)

وتكون النقطة ((c,f(c))هي النقطة الصغرى المحلية



1. إذا كان التغير في سلوك الدالة عند النقطة ((c,f(c))من التزايد قبلها إلى التناقص بعدها فإننا نقول:

أن النقطة ((c,f(c))هي قيمة عظمى محلية.

2. إذا كان التغير في سلوك الدالة عند النقطة ((c,f(c))من التناقص قبلها إلى التزايد بعدها فإننا نقول:

أن النقطة ((c,f(c))هي قيمة صغرى محلية.

- نظرية

1. إذا كانت $f(\overline{x}) > 0$ لجميع قيم x في (a,b)فإن f تتزايد على الفترة [a,b]
2. إذا كانت $f(\overline{x}) < 0$ لجميع قيم x في (a,b)فإن f تتناقص على الفترة [a,b]

- ملاحظة

إذا غيرت $f(\overline{x})$ إشارتها من موجب إلى سالب عن النقطة (c,f(c))

فإن هذه النقطة هي النقطة العظمى

أما إذا غيرت $f(\overline{x})$ إشارتها من سالب إلى موجب عن النقطة (c,f(c)).

فإن هذه النقطة هي النقطة صغرى محلية

- نظرية

إذا كانت f لها قيمة قصوى محلية (عظمى أو صغرى) في فترة مفتوحة عند $x = c$ فإن $f(\overline{x}) = 0$ الدالة

- خطوات إيجاد النقاط القصوى ومجالات التزايد والتناقص باستخدام المشتقة الأولى

أولاً: نوجد المشتقة الأولى$f(\overline{x})$

ثانياً: نوجد أصفار المشتقة الأولى أي أن$f(\overline{x}) = 0$ ولتكن C

ثالثاً: نختبر إشارة$f(\overline{x})$ على يمين ويسار النقطة $x = c$

رابعاً: نحقق النظرية السابقة

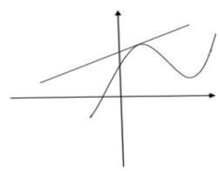
- نظرية

إذا كانت$f(\overline{c}) = 0$وكانت:

$f(\overline{\overline{c}}) < 0.1$ فإن f لها قيمة محلية عظمى محلية عند $x = c$

$f(\overline{\overline{c}}) > 0.2$ فإن f لها قيمة محلية صغرى محلية عند $x = c$

➢ تقعر المنحيات ونقاط الانقلاب



من الشكل المجاور:

1. مقعر لأعلى إذا كانت المشتقة الثانية أكبر من الصفر.

2. مقعر لأسفل إذا كانت المشتقة الثانية أصغر من الفترة المعطاه.

تعريف نقاط الإنقلاب: هي النقاط التي عنها يحدث عملية تغيير في اتجاه المنحنى بشكل انقلابي.

وبطريقة أخرى: إذا كانت $f(\overline{\overline{x}})$ سالبة قبل نقطة محددة وموجبة بعدها أو العكس.

تسمى هذه النقطة نقطة الانقلاب

➢ خطوات إيجاد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر

- نوجد المشتقة الأولى والثانية

- نوجد اصفار المشتقة الثانية ولتكنx=e

- نختبر إشارة$f(\overline{\overline{x}})$ على يسار ويمين x=e

➢ رسم المنحنيات

يمكننا استخدام خواص المشتقات من حيث المقدار والإشارة عند نقطة معينة لرسم منحنى الدالة.

خطوات رسم المنحنيات

1. تحديد النقاط القصوى ونع كل منها.

2. تحديد فترات التزايد والتناقص.

3. تحديد نقاط الانقلاب وفترات التقعر للأعلى والأسفل.

4. تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحوريين.

➢ تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق

1. دليل الطالب: = $\frac{dp}{dqd}$

2. دليل الإنتاج [التكلفة الحدية] : $c = f(q) = a + bq + \frac{e}{q} + mp^2$

- دليل الإنتاج $\frac{dc}{dq}$

3. الربح [الفائدة]: الربح = الإيراد – التكاليف

$$D(q) = R(q) - C(q)$$

[ولجعل الربح أكبر ما يمكن نضع: $0 = D^1(q) = \frac{dD}{dq}$]

أي أن $R^q(q) - C^1(q) = 0$

4. مرونة الطلب: $Ed = \frac{P}{qd} \cdot \frac{dqd}{dp}$

5. الدخل [الإيرادات] الكليTالناتج عن هذه المبيعات: $T = Px = xg(x)$

الدخل الحدي أو الإيراد الحدي عند بيع الوحدة رقم n هو: $\frac{dT}{dx}$ عند x = n

⮚ مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية

1. مشتقات الدوال اللوغاريتمية :

إذا كانت $f(x) = log_e x$ فإن $f(\overline{x}) = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$

أي أن: $f(x) = \ln x$

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{x} dx$$

إذا كانت $f(\overline{x})$ فإن $f(\overline{x}) = \frac{1}{x} \log_a e$

2. مشتقة الدالة الأسية :

إذا كانت $f(x) = e^x$ فإن $f(\overline{x}) = e^x dx$

3. مشتقات الدوال المثلثية :

- إذا كانت $f(x) = \sin(x)$ فإن $f(\overline{x}) = \cos(x)\, dx$
- إذا كانت $f(x) = \cos(x)$ فإن $f(\overline{x}) = -\sin(x)\, dx$
- مشتقة $f(x) = \cos(x)$ فإن $f(\overline{x}) = \sec^2(x)\, dx$

قوانين الفصل الرابع

- التكامل غير المحدد

$$\int g(X)dX$$

- قوانين التكامل

- $\int dx = x + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$
- $\int a\, f(x)dx \; = \; a \int f(x)dx$
- $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int a\, f(x)dx = a \int f(x)dx$
- $\int \frac{1}{X}dx = ln|x| + e$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$

- قوانين مهمه

- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \sec x^2\, dx = \tan x + c$
- $\int \csc x^2 dx = -\cot x + c$
- $\int \sec x\, \tan x\, dx = \sec x + c$
- $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$

- التكامل بالتعويض

$$\int (f(x))^n g(x)dx$$

حيث n عدد حقيقي

التكامل بالتجزيء

نعلم ان :

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)` = f(x)\cdot g`(x) + g(x)\cdot f`(x)$$

أي ان :

$$f(x)\cdot g`(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)` - g(x)\cdot f`(x)$$

$$\int f(x)\cdot g`(x)dx = \int \left(f(x)\cdot g(x)\right)` - \int g(x)\cdot f`(x)dx$$

يسمى هذا الاسلوب اسلوب التكامل بالاجزاء

التكامل المحدود

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدود للداله *f(x)* على الفتره*[a,b]*

خواص التكامل المحدود

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- اذا كانت $f_{1\,(x)} \le f_{2(x)}$ لكل $a \le x \le b$ ، فإن

$$\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$$

- الدخل الحدي

$$T = \int_{\circ}^{t} f(t)dt$$

$f(t)$ = معدل الدخل من الريالات في السنه.

T= مجمل الدخل.

t = الزمن

- القيمة الرأسمالية :

$$\int_{0}^{t_1} e^{-tr} f(t)dt$$

- التحليل الحدي

$$T = \int \frac{dT}{dx} dx$$