التحليل الإحصائي

د.أحمد فرحان

إعداد :

Ghayda&dody-11

2014-2015

المحاضرة (١)

المجموعات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها عدد من العناصر بينها صفات مشتركة تكتب بين حاصرتين { } و تسمى بأحد الحروف الهجائية الكبيرة ..... A , B , C ,

و من الأمثلة على المجموعات $A= \{ 1,3,5,7,9,.......\}$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b , c , ...

يستخدم الرمز ϵ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

$A = \{ 1,5,10,15\}$

$B= \{ a , b ,c , d \}$

$C= \{ 1 , 2 , 3 .....\}$

(و هي مجموعة منتظمة تسير بنفس الشكل١ ٢ ٣ ٤وهكذا)

$A = \{ 1, 2 , 3,....,100\}$

(و هي مجموعة مغلقة و لكن المساحة لا تكفي لكتابة من ١ إلى ١٠٠ و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x: عدد زوجي X}

B = { x : طالب بمقرر الاحصاء في الادارة X}

C= { x : طالب بنظام التعليم عن بعد x }

D = {x: عدد صحيح -3 ≤ x ≤ 1 x}

x= { x : 0 ≤ x ≤ 12   عدد صحيح X}

أنواع المجموعات :-

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

A= { x : عدد طبيعي زوجي و فردي x }

B = { x : دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية X }

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

A = { 2 , 4 , 6 , 8 }

B = { 1 , 2 , 3 , …….. , 100}

C = { x , y , s, t u }

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (وهي المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

A = { X: عدد طبيعي فردي}

B = { 10, 20 , 30 ,……… }

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :-

$A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت A = {2 , 4 , 6 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A \ \ggg\ggg A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {1, 5, 7 , 9 } , B = {9 , 7 ,5 ,1 }

2- A= { 2,5,9} , B = { a , s , d }

الحل

1 – A = B

2 – $A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان A = { 1 , 2 , 3 , 7} و B= { 2 , 4 , 6 , 8 } أوجد (AUB) ؟

الحل

(AUB) =   {1 ,2 , 3, 4, 6, 7, 8}

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان   A = { -1 , 0 , 1 , 2 , 3} وB = {0,2,4,6,} أوجد A ∩ B

الحل

(A ∩ B) = {0 , 2 }

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\bar{A}$مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A.

مثال

إذا كان U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} وA={2,4,6,8,10} أوجد

الحل

$\bar{A}$ = {1,3,5,7,9}

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت A={1,2,3,x,y} و B={3,4,5,x,w} أوجد A-B

الحل

A-B = { 1 , 2 , y }

مثال شامل :

A={1,2,3,x,y} و B={3,4,5,x,w}   :- إذا كانت

و المجموعة الكلية

1- A∪B

2- A ∩ B

3- B – A

4- $\bar{A}$

5- $\bar{B}$

6- $\bar{A} \cup \bar{B}$

7- $\bar{A} \cap \bar{B}$

8- $\bar{A}$ ∪ A

9- $\bar{A}$ ∩ A

U = { 1,2,3,4,5,w,x,y,z}

فأوجد :-

الحل

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$

2- $A \cap B = \{3, X\}$

3- $B - A = \{4, 5, w\}$

4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$

5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$

8- $\overline{A} \cup A = U$

9- $\overline{A} \cap A = \{\ \}$

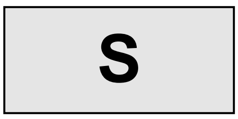
أشكال ِفنْ

VIN Figures

يمكن تمثيل المجموعات والعمليات المختلفة عليها من خلال استعمال اشكال هندسية تسمى أشكال ِفنْ وذلك وفق ما يلي:

١- المجموعة الكلية:

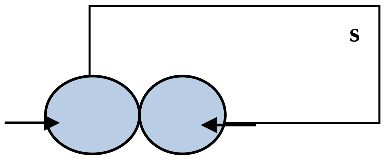
تمثل المجموعات الكلية بمستطيل ويرمز لها بالرمز S



S

٢- إتحاد الحوادث Events Union :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أو إلى كليهما معا يطلق عليها إتحاد حادثتين ويرمز لها (A   B) أو (A أو B) والشكل التالي يوضح ذلك:



شكل فِنْ لتمثيل إتحاد حادثتين A و B

$$(A \cup B)$$

وبشكل عام لأي n حادثة An .... ,A1 , A2, A3 فإن إتحاد هده الحوادث هو :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 ...... \cup_n$$

ويمكن القول أن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وقع أحد هذه الحوادث Ai على الأقل وهو ما يطلق عليه جمع الأحداث

الإتحاد :- يعني اتحاد المجموعتين A و B وهو مجموع العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين دون تكرار العناصر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cup B)$ = {1, 2, -6, -7, -11}

خواص العمليات الجبرية لإتحاد الحوادث:

- إدا كانت A و B و C ثلاث حوادث فإن :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

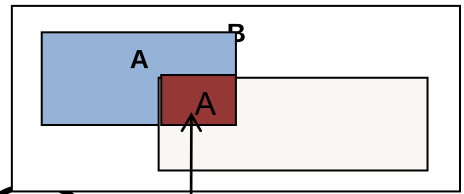
ويعني ذلك توزيع الإتحاد على التقاطع.

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني أن

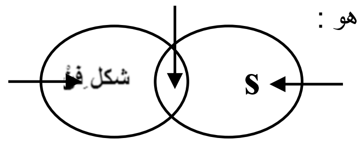
$$(A \cup B) = (B \cup A)$$

٣- تقاطع الحوادث Events Intersection :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى A و B أو إلى كليهما معا في نفس الوقت يطلق عليها تقاطع حادثتين ويرمز لها (A   B) أو (A و B) وباستخدام أشكال ِفنْ يكون الجزء المحدد بـ A and B هو الذي يمثل تقاطع الحادثتين :



وبشكل عام لأي n حادثة A1 , A2, A3, …….. An فإن تقاطع هده الحوادث هو :



$$\bigcap_{i=1} A_i = A_1 \cap A_2$$

$$(A \cap B)$$

ويمكن القول أن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وفقط وقعت كل الحوادث Ai على الأقل و هو ما يطلق عليه ضرب الحوادث

التقاطع :- إذا هو مجموعة العناصر المشتركة بين مجموعتين أو أكثر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cap B)$ **= {-6, -7}**

خواص العمليات الجبرية لتقاطع الحوادث:

- إدا كانت :C و B و A ثلاث حوادث فإن :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

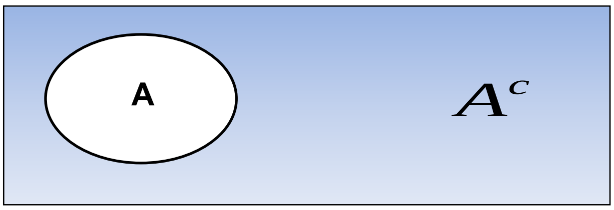
ويعني دلك توزيع التقاطع على الإتحاد

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني $(A \cap B) = (B \cap A)$

٤- الحادثة المتممة Complementary Event

فإن متممتها هي الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي لا تنتمي A ويرمز لها بالرمز A^c **أو** $\overline{A}$

وهو حدث يتألف صر غير المنتمية إلى A وباستخدام أشكال ِفنْ فإن الجزء المظلل يمثل الحادثة المتممة من



$$\overline{A} \quad A^c$$

شكل فن لتمثيل مكملة حادثة A

مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

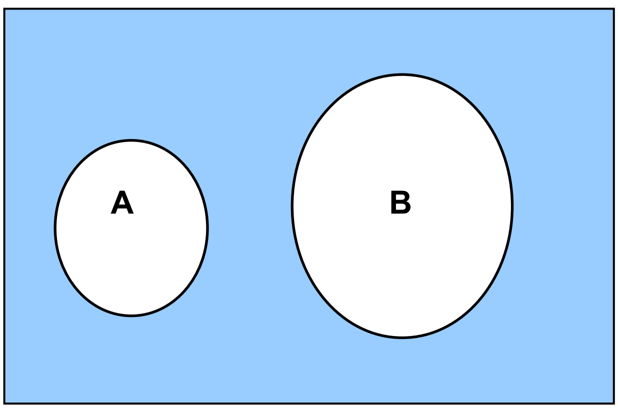
B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\overline{A}$ **={2, 4, 6, 20}**

$\overline{B}$ **={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}**

٥-الحوادث المتنافية Mutually Execlusive Events :

الحادثتان A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كان تقاطعهما خاليا أي أن $A \cap B = \phi$ **ويمكن القول أيضا أن** $A \cap A^c = \phi$



$$A \cap B = \phi$$

$$A \cap A^c = \phi$$

شكل ِفنْ لتمثيل حادثتان متنافيتان A و B

بعض العلاقات المهمة :-

$$\overline{B\cup A}=\overline{B}\cap\overline{A}$$

$$A\cup A^{c}=S$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

$$A\cap A^{c}=\phi$$

إذا كانت $A\subset B$ **فإن:**

$A=A\cap B$

$B=A\cup B$

$\overline{B}\subset\overline{A}$

$$\overline{S}=\phi$$

$$\overline{\phi}=S$$

$$A\cup S=S$$

$$A\cap S=A$$

$$A\cap\phi=\phi$$

و = ∩
أو = ∪

أمثلة وتمارين

يراد شراء ثلاثة أنواع من اللحوم من جزار معين، فإذا رمزنا للحم الدجاج بـ A ولحم الضأن بـ B ، ولحم العجل بـ C فإن :

– توفر أنواع اللحوم الثلاثة يعني توفر لحم A و B و C أي بمعنى

$A \cap B \cap C$:

– عدم توفر أي نوع من اللحوم يعني عدم توفر A و B و C أو كلها أي بمعنى :

$$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

– توفر نوع واحد من اللحوم على الأقل هو توفر A أو B أو C أو كلها أي بمعنى : $A\cup B\cup C$

– توفر نوع A فقط يعني : $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

– توفر نوع واحد من اللحم يعني إما توفر A وعدم توفر النوعين الآخرين أو توفر B وعدم توفر النوعين الآخرين ، أو توفر C

$$(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$$

تمارين :-

١- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عدد سالب و موجب x }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , …….,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,…….}

(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }

2- A= { 20,50,70} , B = { k , d , u }

إذا كانت U= {0 , 1, 2, 3,…….,10} وكانت C = { 6, 7,8, 9,10} ، B = { 1 , 2 ,3 ,4 ,5 } ، A = { 2, 4 ,6 ,8 ,10}
فجد ما يلي:-

1- $A \cup B$	5- $A \cap \bar{C}$
2- $A \cap C$	6- $A - (B \cap C)$
3- $\bar{A} \cap \bar{B}$	7- $(\bar{A} \cup B) - C$
4- $B \cup C$	8- $\overline{(\bar{B} \cap \bar{C})}$

حل المثال :-

1- $A \cup B$ = { 1 , 2 , 3 ,4 , 5 ,6 , 8 , 10 }

2- $A \cap C$ = { 6 , 8 , 10 }

3- $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ = { 0 , 7 ,9 }

4- $B \cup C$ = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ,10 }

5- $A \cap \bar{C} = A - C$ = { 2 , 4 }

6- $A - (B \cap C) = B \cap C = \emptyset$

$A - (B \cap C) = A - (\emptyset) = A$

7- $(\bar{A} \cup B) - C$

$\bar{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

$\bar{A} \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

$(\bar{A} \cup B) - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

8- $(\overline{\bar{B} \cap \bar{C}}) = \overline{(\bar{B} \cup \bar{C})} = B \cup C$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

تمارين :-

٤- إذا كانت

$A=\{8,10,12,r,m\}$ و $B=\{4,6,10,o,r\}$

أوجد المجموعة الكلية

ثم أوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\bar{A}$
5- $\bar{B}$
6- $\bar{A} \cup \bar{B}$
7- $\bar{A} \cap \bar{B}$
8- $\bar{A} \cup A$
9- $\bar{A} \cap A$

٥- نفترض أن $A = \{3,4,5,x,y\}$ **و** $B = \{4,x,y,z\}$ **ضع الرمز** $\in$ **أو** $\notin$ **في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .**

$(i)\ 3 \underline{\qquad} A$

$(ii)\ 3 \underline{\qquad} B$

$(iii)\ x \underline{\qquad} A$

$(iv)\ x \underline{\qquad} B$

$(v)\ z \underline{\qquad} A$

$(vi)\ z \underline{\qquad} B$

$(vii)\ 1 \underline{\qquad} A$

$(viii)\ 1 \underline{\qquad} B$