جامعة الملك فيصل - كلية ادارة الاعمال

ملخص مقرر الاحصاء في الادارة

د . ملفي الرشيدي

تجميع المحاضرات
نداء الايام

تنسيق الشكل النهائي والشرح واضافات اخرى
turki1400

الفصل الدراسي الاول لعام 1435- 1436

المحاضرة الاولى

❖ الدالة :

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ،وكلمة دالة تعبر عن مفهوم (أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو (تتعين بواسطة) كمية أخرى) .

ملاحظة :-

- ❖ إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و تسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .
- ❖ حتى تكون f دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

❖ دالة كثيرة الحدود :

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

(وهذه امثلة على شكلها):

1- $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$

2- $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

4- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

1- $(f + g)(x)$

$= f(x) + f(g)$

$= 3x+5 + x^2+1$

$= x^2+3x+6$

@ نجمع الدالتين بوضعها على الشكل المقابل ـ السهم الاول

@ ناتج الجمع نقوم بترتيبه حسب درجة الاس الاكبر ليظهر على الشكل المقابل – السهم الثاني

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

2-$(f - g)(x)$ =

$= f(x) - g(x)$

$= (3x+5) - (x^2+1)$

$= 3x+5 -x^2-1$

$= -x^2 + 3x +4$

@ نقوم بفكيك الاقواس ولانهمل اشارة (-) اللي بين القوسين ـ السهم الاول

@ ناتج تفكيك غير اشارة ما بداخل القوس الثاني – السهم الثاني

@نرتب الدالة حسب درجة الاس الاكبر – السهم الثالث

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

3- $(f \times g)(x)$ =

$= f(x) \times g(x)$

$= (3x+5) \times (x^2+1)$

نقوم بضرب مابداخل القوس الاول في مابدخل القوس الثاني كما هو مبين بالاقواس

$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$

$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد

4- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$

- ❖ معادلة الخط المستقيم :-
- ❖ ايجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(x1 , y1) و B(x2 , y2)

ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_2 \neq x_1$

مثال(1):-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(1,-3) و B(3,7) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال(2) :-

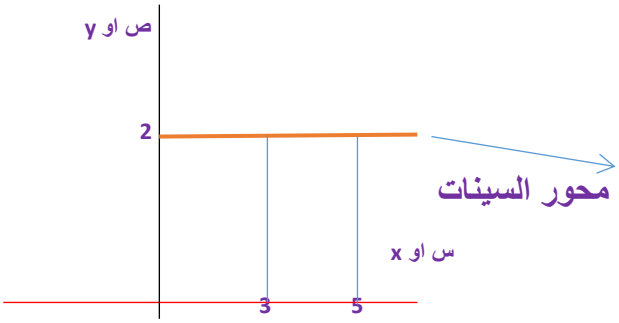
أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

مهم جداً :إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

للتوضيح :



مثال(3) :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

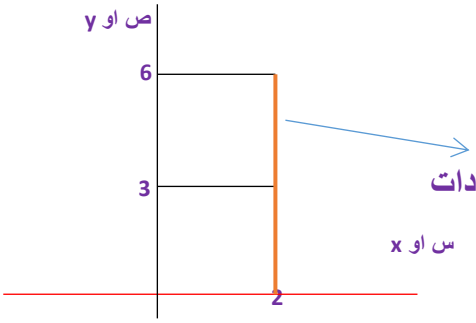
الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$

مهم جداً :اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

للتوضيح:

للتوضيح :



ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a وb لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال(1) :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال (2):-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$5x = -4y + 10$

الحل

هنا نلاحظ ان المعادلة غير مرتبة ولا تتوافق مع الصيغة العامة ومن هنا نقوم بالتالي :

نقوم بنقل الطرف الايمن الى الطرف الايسر مع مراعاة تبديل الاشارات لكي يصبح الطرف الايمن =0

لتظهر على الشكل الموضح بجوار السهم

ثم نطبق القاعدة بكل سهولة

$5x + 4y - 10 = 0$ ⟵

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$

❖ **المستقيمات المتوازية :-**

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

هنا نلاحظ ان المعادلة الثانية غير مرتبة ولا تتوافق مع الصيغة العامة ومن هنا نقوم بالتالي :

نقوم بنقل الطرف الايسر الى الطرف الايمن مع مراعاة تبديل الاشارات لكي يصبح الطرف الايسر =0

لتظهر على الشكل الموضح بجوار السهم

ثم نطبق القاعدة بكل سهولة

$4x - y - 2 = 0$, $4x - y + 1 = 0$

$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$

$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$

$m_1 = m_2$

إذا المستقيمان متوازيان

❖ **المستقيمات المتعامدة :-**

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m1 \times m2 = -1$

مثال :-

هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$

$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{3}$

$m_1 \times m_2 = \cancel{3} \times \frac{-1}{\cancel{3}} = -1$

اذا المستقيمان متعامدان

❖ **تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :**

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة A(x1,y1) هي :-

$y - y1 = m (x - x1)$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي -2 .

الحل

$m = -2 \quad , \quad x_1 = 5 \quad , y_1 = -3$

$y - (-3) = -2(x-5)$

$Y + 3 = -2(x-5)$

$Y+3 = -2x +10$

$Y= -2x +10-3$

$Y= -2x +7$

❖ **النهايات**

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$

وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت f(x) = 2x +1 فإن $lim_{x\to 2}\, f(x)$

الحل :

$lim_{x\to 2}\, f(x)$=2x +1

=2(2) +1=5

يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

❖ جبر النهايات :

1- إذا كانت f(x)=c (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن

$\lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

2- إذا كانت f(x) = m x + c فإن

$lim_{x\to a}\, f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

1- $lim_{x\to 5}\, 30$

2- $lim_{x\to 2}(1 - 2x)$

3- $lim_{x\to 2}(3x + 4)$

4- $lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x - 5)$

الحل

1- $lim_{x\to 5}\, 30$ = 30

2- $lim_{x\to 2}(1 - 2x)$ = 1 – (2 × -2) = 5

3- $lim_{x\to 2}(3x + 4)$ = 3 × 2 +4 = 6+ 4 = 10

4- $lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x - 5)$ = 8 × $(\frac{1}{2})$ -5 = 4 – 5 = -1

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to 5}[h(x) - f(x)]$

$= \lim_{x\to 2} h(x) - \lim_{x\to 2} f(x)$

$= 10.5 - 5 = 5.5$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

2- $\lim_{x\to 2}[g(x)\times h(x)]$

$= \lim_{x\to 2} g(x) \times \lim_{x\to 2} h(x)$

$= -8 \times 10.5 = -84$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

3- $\lim_{x\to 2} 8\, f(x)$

$= 8 \times \lim_{x\to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

4- $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

مثال :

$lim_{x\to1}[3x-1]^6 = [lim_{x\to1}\ 3x-1]^6$

$= [3\times1-1]^6 = [3-1]^6 = [2]^6 = 64$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $lim_{x\to2}(3x^3+5x^2-7)$

$= 3\times2^3+5\times2^2-7$

$= 3\times8+5\times4-7 = 37$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2- $lim_{x\to3}\frac{3x^2+7}{x-5}$

$= \frac{3\times3^2+7}{3-5} = \frac{3\times9+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

3- $lim_{x\to2}\frac{2x-1}{5x+3}$

$= \frac{2\times2-1}{5\times2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$

4- $lim_{x\to2}\ e^x$

$= e^2$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

5- $lim_{x\to1}\ e^{x^2+2x+1}$

$= e^{1^2+2\times1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

6- $lim_{x\to2}\ log(3x^2+5) = \log(3\times2^2+5)$

$= \log(3\times4+5)$

$= \log(12+5) = \log(17)$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

7- $lim_{x\to 3}\, ln(2x-5)$

$= \ln(2\times 3-5) = \ln(6-5) = \ln(1) = 0$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

8- $lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3 = ((3\times 1^3)+4\times 1-2)^3$

$= (3+4-2)^3 = (5)^3 = 125$

9- $lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5} = \sqrt[3]{2^2+5} = \sqrt[3]{4+5} = \sqrt[3]{9} = 2.08$

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x)=\begin{cases} 9x^2 & , \ x<5 \\ 15x-2 & , \ x>5 \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى 3 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى 7 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+5 & , \ x<1 \\ 7x-2 & , \ x>1 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $lim_{x\to 3}\, f(x)$

$= 7x-2 = (7)\times(3)-2 = 19$

نلاحظ ان 3 تقع في مجال الدالة الثانية لان

3 >1 فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 3 عن x

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+5 & , \ x<1 \\ 7x-2 & , \ x>1 \end{cases}$$

فأوجد :-

نلاحظ ان $\frac{1}{2}$ تقع في مجال الدالة الاولى لان

$\frac{1}{2}$<1 نطبق على الدالة الاولى وذلك بالتعويض بالقيمة $\frac{1}{2}$ عن x

2- $lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (\frac{1}{2})^2 + 5 = 3\times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \ x < 1 \\ 7x - 2 & , \ x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

3- $lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين
النهاية من اليسار $lim_{x\to 1^-} f(x)$ و $lim_{x\to 1^+} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

(النهاية من اليمين) $lim_{x\to 1^+} f(x)$

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

(النهاية من اليسار) $lim_{x\to 1^-} f(x)$ =

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to 1^-} f(x) \neq lim_{x\to 1^+} f(x)$

هذه النهاية غير موجودة $lim_{x\to 1} f(x)$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \ x < 5 \\ 6x - 10 & , \ x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$lim_{x\to5}\, f(x)$

الحل

$$\lim_{x\to5} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين
ومن ثم يتم التعويض في المجالين ($lim_{x\to5^+}\, f(x)$ و النهاية من اليسار $lim_{x\to5^-}\, f(x)$

(النهاية من اليمين) $lim_{x\to5^+}\, f(x)$

= 6x -10 = 6 × 5 -10 = 20

(النهاية من اليسار) $lim_{x\to5^-}\, f(x)$ =

$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to5^-}\, f(x) \neq lim_{x\to5^+}\, f(x)$

هذه النهاية غير موجودة $lim_{x\to5}\, f(x)$

❖ **الاتصال**

تعريف :

يقال للدالة f(x) متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \ 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , \ x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$lim_{x\to5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$lim_{x\to5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \ 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , \ x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في *x = 10* ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$lim_{x\to10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$lim_{x\to10^-} f(x)$ = $12x^2$ = 12× 10^2 = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \ x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , \ x > 8 \end{cases}$$

متصلة في *x = 8* ؟

الحل

f(8) = 20 x^2 = 20 × $(8)^2$ = 20 × 64 = 1280

$lim_{x\to8^+} f(x)$ = 1160 +15x = 1160 +15 × 8 = 1280

$lim_{x\to8^-} f(x)$ = 20 x^2 = 20 × $(8)^2$ = 20 × 64 = 1280

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

تمارين الواجب :-

تمرين 1 :- الحلول مجهود شخصي

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

1- $lim_{x\to 0}\ 5$ =5

2- $lim_{x\to 5}(10-2x+x^2)$ =(10 -2(5)+ 5^2) = 10 -10+25=25

3- $lim_{x\to 12}(3x+6)$ =(3(12)+6) =36+6=42

4- $lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x-2)$=(9($\frac{2}{3}$) -2)= $\frac{18}{3}$ -2=6-2=4

تمرين 3 :-

أوجد :-

1- $lim_{x\to 1}[5x-2]^2$ = $[lim_{x\to 1}\ 5x-2]^2$ = [5×1-2]^2 =[5-2]^2 = [3]^2=9

2- $lim_{x\to 2}\left[10\ -2x\right]^2$ =$[lim_{x\to 2}\ 10\ -2x]^2$= [10-2×2]^2 =[10-4]^2 = [6]^2=36

تمرين 4 :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $lim_{x\to 5}(2x^3-2x^2-50)$

=$(2(5)^3-2(5)^2-50)$=2(125)-2(25)-50=150

2- $lim_{x\to 0}(1-e^x)$ = $(1-e^0)$ =1-1=0

3- $lim_{x\to 1}\ log(10x^4+15)$

= $log(10(1)^4+15)$= $log(25)$=1.3979

4- $lim_{x\to 2}\ e^{2x^2+3x+2}$ =$e^{2(2)^2+3(2)+2}$ =e^{8+6+2}= e^{16}

5- $lim_{x\to 3}\ ln(20x^2-5x+10)$

= $ln(20(3)^2-5(3)+10)$ = $ln(20(9)-15+10)$= $ln(175)$=5.1647

تمرين 5 :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \ x < 2 \\ 5x - 2 & , \ x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $lim_{x\to 3}\, f(x) = 5x - 2$ =5(3)-2=15-2=13

نلاحظ ان 3 تقع في مجال الدالة الثانية لان

3 >2 فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 3 عن x

2- $lim_{x\to 1}\, f(x) = 30x^2 + 15 = 30(1)^2 + 15$ =30+15= 45

نلاحظ ان 1 تقع في مجال الدالة الاولى لان

1 <2 فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 1 عن x

تمرين 6 :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \ 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

$f(10) = 3 + x^2 = 3 + (10)^2 = 3 \times 100 = 300$

$lim_{x\to 10^+}\, f(x) = 3 + x^2 = 3 + (10)^2 = 3 \times 100 = 300$

$lim_{x\to 10^-}\, f(x) = 2x = 2(10)$=20

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

المحاضرة الثانية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

❖ قواعد التفاضل

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$=?????

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

❖ القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x5$ $\frac{dy}{dx} = 5\,x4$

2- $y = 15\,x4$ $\frac{dy}{dx} = 60\,x3$

3- $y = 10\,x$ $\frac{dy}{dx} = 10$

❖ القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$

❖ القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (5x^2 + 2x)(30x^2)$

❖ **القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-**

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} \; - \; \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x-3x-6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

❖ **القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-**

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

$$1 - y = (15x2 + 20)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(15x^2 + 20)^2\,(30x)$$

$$2 - y = (10\,x^3 - 12x^2 + 5)^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5\,(10\,x^3 - 12x^2 + 5)^4\,(30x^2 - 24x)$$

❖ **القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة**

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15\,x^4 + 12\,x^3 + 20\,x^2 - 5\,x + 12$$

(المشتقة الاولى) $\frac{dy}{dx} = 60\,x^3 + 36\,x^2 + 40\,x - 5$

(المشتقة الثانية) $\frac{d^2y}{dx^2} = 180\,x^2 + 72\,x + 40$

(المشتقة الثالثة) $\frac{d^3y}{dx^3} = 360\,x + 72$

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة :-

تعرف مرونة الطلب السعرية :

على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها :

مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (1):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 80 – 6x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 100وحدة عند سعر يساوي 10 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}$= -6)

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (2):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 200 – 10 x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 200وحدة عند سعر يساوي 20 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}$= -10)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$

م = (-10) × $\frac{20}{200}$ = -1

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (3):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 15x-20) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 1000وحدة عند سعر يساوي 100 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}$= 15)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$

م = (15) × $\frac{100}{1000}$ = 1.5

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي (D = 1.5x +20) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

الحل : حل شخصي

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}$= 1.5)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$

م = (1.5) × $\frac{200}{600}$ = 0.5

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة اصغر من الواحد الصحيح إذا فالطلب قليل المرونة أو غير مرن

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار :-

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K^/ = 0.6 - 0.04\ x$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$K^/ = 0.6 - 0.04\ x\ 1 = 0.6 - .04 = 0.56$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

3- النهايات العظمى و الصغرى :-

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

2 - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

3 - تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة

∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= - 0.4x^2 + 300x -2000$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^/ = -0.8x + 300$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = -0.8$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= 500-0.2x +0.1x^2$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -0.2 + 0.2x$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = 0.2$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

4- الربح الحدي :-

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

6 = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x +30$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$R^{/} = 36x^2 + 40x - 10$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$R^{/} = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10=3990$ ريال

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

سعر بيع الوحدة$=4x^2 + 6x +5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) X x

$R = (4x^2 + 6x +5)Xx= 4x^3 + 6x^2 +5x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/} = 12x^2 + 12x + 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدات إذاً $x=15$

$R^{/} = 12x^2+ 12x +5 = 12\times15^2 + 12\times15 +5=2885$ ريال

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 10x^3 -11x^2 +5x -20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) X x

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20)X\ x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً x=5

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$R = 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20 =$ 4205 ريال

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

(التكاليف الكلية) $C = 10x^2 - 12x + 15$

(التكاليف الحدية)$C' = 20x - 12$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً x=10

$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188$ ريال

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 15x^2 + 9x - 17$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(2x^3 - 6x^2 + 10x -15)- (15x^2 + 9x -17)$

$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

$P^/ = 6x^2 - 21x + 1$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$P^/= 6x^2 - 21x + 1 = 6\times30^2 - 21\times30 + 1 = 4771$ ريال

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 12x^3 +5x^2 - 2x +100$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 + 3x +20$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(12x^3 +5x^2 - 2x +100)- (10x^2 + 3x +20)$

$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

$P^/ = 36x^2 + 30x - 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$P^/ = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 -5 = 23245$ ريال

تمرين شامل (1)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$

$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$

$R' = 120\,x^3 + 24x^2 - 6$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$R' = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394$ ريال

الحل

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$

$C' = 39\,x^2 - 10x + 3$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$C' = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499$ ريال

الحل

3- دالة الربح الكلي :-

$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$

$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$

$P = R - C = 30\,x^4 - 13\,x^3 + 7x^2 - 9\,x + 35$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$P = 30\,x^4 - 13\,x^3 + 7x^2 - 9\,x + 35$

$P^{/} = 120\,x^3 - 39x^2 + 7x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$P^{/} = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 7 \times 12 - 9 = 201819$ ريال

تمرين شامل (2)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 3x^2 + 25x - 18$

$C = 10\,x^2 + 2x - 5$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) X x

$R = (3x^2 + 25x - 18)X\ x$

$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$

الحل

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R^/ = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R^/ = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457$ ريال

الحل

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$C = 10\,x^2 + 2x - 5$

$C^/ = 20\,x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C^/ = 20\times20 + 2 = 402$ ريال

الحل

4- دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10\,x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15\,x^2 - 20x + 5$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$P = 3x^3 + 15\,x^2 - 20x + 5$

$P^/ = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$P^/ = 9\times10^2 + 30\times10 - 20 = 1180$ ريال

المحاضرة الثالثة

❖ التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ،

حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز ∫ و هو رمز التكامل

و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

❖ قواعد التكامل :-

1- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n \, .dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k \, .dx = k\,x + c$$

$$\int \, .dx = x + c$$

مثال :-

1- $\int x^3 \, .dx = \frac{1}{4} x^4 + c$

2- $\int x^5 \, .dx = \frac{1}{6} x^6 + c$

3- $\int 6 \, .dx = 6\,x + c$

4- $\int 3x^4 \, .dx = \frac{3}{5} x^5 + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 \ . dx$$

الحل

$$y = \frac{1}{6} x^6 + \frac{4}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6} x^6 + x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4\,x^3 - 30x^2 + 20x + 3 \ . dx$$

الحل

$$y = \frac{4}{4} x^4 - \frac{30}{3} x^3 + \frac{20}{2} x^2 + 3x + c$$

$$y = x^4 - 10\,x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

2- تكامل e^x :-

$$\int e^x \, . \, dx = e^x + c$$

3- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} \, . \, dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9\,x^2 - 10x + 15 \ . dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

الحل

$y = \frac{9}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x + c$

$y = 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

$1 = 3(4)^3 - 5(4)^2 + 15(4) + c$

$1 = 3\times64 - 5 \times 16 + 60 + c$

$1 = 172 + c$

$c = -171$

التطبيقات التجارية للتكامل :-

1- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

2- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

4- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$R' = 3x^2 + 6x - 10$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$

$R = x^3 + 3x^2 - 10x$

2- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$R = x^3 + 3x^2 - 10x$

الايراد الكلي= $(5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = 150$ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$

$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$

2- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$

التكاليف الكلية $C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

2- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع 25 وحدة .

3- دالة الربح الحدي .

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

5- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$R^{/} = 8x^3 + 24x^2 - 12\,x + 20$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كمايلي:-

$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}\,x^2 + 20x$

$R = 2x^4 + 8x^3 - 6\,x^2 + 20x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع 20 وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=20 كما يلي :-

$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$

$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$ ريال

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$C^{/} = 36x^2 + 40x - 10$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$C = 12x^3 + 20\,x^2 - 10\,x$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة x=25 كما يلي :-

$C = 12(25)^3 + 20\,(25)^2 - 10\,(25) = 199750$ ريال

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P' = R' - C'$

$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$

$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P' = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P = R - C$

$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$

$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=10 في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$P = 2(10)^4 - 4(10)^3 - 26(10)^2 + 30(10)$

$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700$ ريال