المحاضرة الثالثة نظرية الاحتمالات

مقدمة : مفهوم الاحتمال .. هناك عدة طرق متعددة يمكن من خلالها تقديم مفهوم الاحتمال منها :

١/ طريقة الرأي الشخصي : وهي تعتمد على التقدير الشخصي للفرد والذي يرغب بتعيين احتمال حدوث حادث ما ، و كأن يقول احتمال حصوله على تقدير مرتفع لمقرر الاحصاء للإدارة نظرًا للجهد الذي بذله في دراستها .

٢/ طريقة التكرار النسبي :و ويعرف بأنه إذا تكرر إجراء تجربة احصائية n من المرات تحت نفس الظروف وكان عدد المرات التي تؤدي إلى حدوث الحادث A يساوي n(A) , فإن التكرار النسبي لهذا الحادث هو $\frac{n(A)}{n}$ ، وإذا كبرت n بدون حدود وكانت n(A) تكبر معها بحيث يؤول التكرار النسبي في النهاية إلى عدد ثابت ,وليكن pفعندئذ تقول أن احتمال الحادثA هو العدد. p

مثال : عند رمي قطعة نقد عدد معين من المرات بحيث يتم تسجيل ظهور الصورة فيها ، نلاحظ أن التكرار النسبي يقترب من $\frac{1}{2}$ عند رمي قطعة النقد عدد كبير جدًا من المرات. ونقول بأن احتمال ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة نقد منتظمة = $\frac{1}{2}$

مثال : إذا كان طلبة إحدى الكليات موزعين على التخصصات المختلفة فيها حسب الجدول التالي:

التخصص	عدد الطلبة
إدارة أعمال	320
محاسبة	480
تسويق	300
علوم مالية ومصرفية	500

إذا قام احد المدرسين بمقابلة أحد الطلبة ,فما هو احتمال أن يكون من قسم المحاسبة؟

الحل: التكرار النسبي لطلبة تخصص المحاسبة يساوي $0.3 = \frac{480}{320+480+300+500}$

أن مفهوم التكرار النسبي يقودنا إلى تقديم التعريف التالي :

فضاء العينة ذو النقط المتساوية إمكانية الحدوث : إذا احتوى الفضاء العيني على عدد من النقاط n بحيث كانت فرصة الحصول على أي نتيجة بسيطة مساوية على أية نتيجة بسيطة أخرى فإنه يقال أن الفضاء العيني S فيه nمن النقط إمكانية الحدوث ويكون كل حادث بسيط منفصلا عن أي حادث آخر بحيث يكون احتمال حدوث كل حادث مساويا للحادث الآخر . ومن هذا نحصل على النتيجة التالية : إذا احتوى حادث A على عدد من النقط n(A)، فإن احتمال هذا الحادث هو : $p(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{عدد عناصر الحادث A}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} =$

مثال : في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات أوجد احتمال كل من الحوادث التالية :

١/ إذا كان الحادث A يمثل ظهور الصورة (H) مرتين على الاقل ؟

٢/ إذا كان الحادث B يمثل ظهور الاوجه الثلاث متشابهة ؟

الحل : لاحظ أن عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة تكتب كما يلي :

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني يساوي 2×2×2 = 8 (<u>من قاعدة الضرب</u>).

1- $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

احظ أن الحوادث التي ظهرت الصورة فيها مرتين على الاقل هي (H,H,H),(H,H,T),((T,H,H),(H,T,H)

2- $p(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

لاحظ ظهور الاوجه الثلاث متشابه في حادثين .

قوانين الاحتمالات: <u>في هذا البند سنورد القوانين الاولية في الاحتمال وهي :</u>

نظرية (1) :

١- إذا كان لدينا المجموعة الخالية ورمزها Ø فإن احتمال هذه المجموعة يساوي صفر . بالرموز
p(Ø) = 0

٢- إذا كان لدينا المجموعة الكلية ورمزها S فإن احتمال هذه المجموعة يساوي 1 . بالرموز p(S) = 1

٣- احتمال أي حادث E من الفضاء العيني S يكون محصور بين الصفر والواحد . بالرموز $0 \le p(s) \le 1$

نظرية (2) : إذا كان A حادثًا في s ، وكان $\bar{A}$ هو متممة ذلك الحادث فإن $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

مثال : إذا كان احتمال نجاح طال في مادة الحاسبة ما هو 80% ، فما احتمال عدم نجاحه في تلك المادة ؟

الحل : بفرض اننا رمزنا لنجاح الطالب في مادة المحاسبة بالرمز A ، فإن احتمال عدك نجاحه يساوي $p(\bar{A})$

$= 1 - p(A) = 1 - 0.08 = 0.20$

مثال : إذا كان احتمال وصول طالب إلى محاضراته في الوقت المحدد هو 0.75 فما احتمال وصول الطالب المتأخر ؟

الحل : نقرض أن A = وصول الطالب على الموعد المحدد

$\bar{A}$ = وصول الطالب متأخرًا

$P(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.75 = 0.25$

نظرية (3) : إذا كان A,B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى هو 0.30 وغيابه عن المحاضرة الثانية هو 0.15 واحتمال غيابه عن المحاضرة الأولى والثانية يساوي 0.20، أجب عن الاسئلة التالية :

أ) ما احتمال غياب الطالب عن أحد المحاضرتين على الأقل ؟

ب) ما احتمال عد غياب الطالب عن أي من المحاضرتين ؟

ج) ما احتمال حضور الطالب للمحاضرة الأولى ؟

الحل : نفرض أن A تمثل غياب طالب عن المحاضرة الأولى ونفرض أن B تمثل الغياب عن المحاضرة الثانية . وبذلك فأن $A \cap B$ يمثل الغياب عن كلا المحاضرتين

أ) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.30 + 0.15 - 0.20 = 0.25$

ب) عدم غياب الطالب عن أي محاضرتين يعني أنه حضر المحاضرتين، وهذا يعني متممة الحادث "غياب الطالب عن إحدى المحاضرتين على الأقل" أي أنه متممة $(A \cup B)$ ومن قانون المتممة

$p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.25 = 0.75$

ج) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.30 = 0.70$

مثال : إذا كان $p(A \cup B) = 0.9 , p(B) = 0.8 , p(A) = 0.5$. أوجد

أ) $p(A \cap B)$

ب) $p(\bar{A})$

ج) $p(\overline{A \cap B})$

الحل :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$0.9 = 0.5 + 0.8 - p(A \cap B)$

١)

$p(A \cap B) = 1.3 - 0.9 = 0.4$

٢) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

٣) $p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$

ملاحظة : في حال كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فإن تقاطعهما = Ø وبذلك تصبح النظرية (3) على الصورة

$p(A \cup B) = p(A) + P(B)$

مثال : إذا كان $p(A) = 0.3$ ، $p(B) = 0.4$ بحيث كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فأوجد احتمال حدوث الحادث A أو حدوث الحادث B ؟

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$

لاحظ أن احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B او حدوث احدهما على الأقل تعني $p(A \cup B)$ أما في حال السؤال عن احتمال حدوث الحادث A والحادث B أو حدوث كليهما معًا فهذا يعني $p(A \cap B)$

نظرية (4) : إذا كان B,A أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

أ) $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

ب) $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.9 واحتمال حضور مساعد في ذلك اليوم هو 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الاقل يساوي أو أوجد احتمال

1- حضور المدير ومساعده؟

2- حضور المدير وحده؟

3- حضور المساعد وحده؟

الحل : نعبر عن حضور المدير بالحادث A وحضور المساعد بالرمز ، وحضور احدهما على الأقل بالرمز A U B

١- من نظرية رقم ثلاث نجد أن :

الحل :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$0.97 = 0.90 + 0.95 - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$$

٢- حضور المدير وحده تعني أن المدير حضور وغيابك مساعد ، وهذا يعني حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)\ 0.90 - 0.88 = 0.02$$

٣- حضور المساعد وحده تعني أن المساعد حضر والمدير غاب حدوث B وعدم حدوث A .

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0.95 - 0.88 = 0.07$$

تمارين :

- **في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين اوجد احتمال ما يلي :**

1- ظهور عددين متشابهين

2- ظهور عددين مختلفين

3- ظهور عددين مجموعهما أكبر من12 ؟

4- ظهور عدين بحيث يكون الأول عدد فردي؟

- **ألقيت قطعتا نقود متزنتان مرة واحدة فما أحتمال :**

١- ظهور صورة واحدة على السطح العلوي ؟

٢- ظهور صورة واحدة على الأقل ؟

٣- ظهور صورة واحدة على الأكثر ؟

أمثلة :

- اذا كان احتمال حصول طالبة على قبول من جامعة الملك فيصل هو 0.5 ، واحتمال حصولها على القبول من جامعة الملك سعود هو 0.8 ، واحتمال حصولها على القبول من كلا الجامعتين هو 0.4 ، فما هو احتمال حصولها على القبول من احدى الجامعتين ؟

الحل : اذا كان الحصول على القبول من جامعة الملك فيصل هو A ، والحصول على القبول من جامعة الملك سعود هو B فإن :-

$P(A)=0.5 \quad P(B)=0.8 \quad P(A \cap B)=0.4$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$0.5 + 0.8 - 0.4 = 0.9$$

- في تجربة رمي حجر النرد منتظم مرة واحدة ، أوجد احتمال الحوادث التالية :
  ١- الحادث A احتمال ظهور العدد 4 .
  ٢- الحادث B احتمال ظهور عدد زوجي .
  ٣- الحادث C احتمال ظهور العدد 9 .

S = { 1,2,3,4,5,6 }

بما أن حجر النرد منتظم فإن كل نقاط فراغ العينة متساوية في احتمال الظهور .

1=P(S)=P { (1) U (2) U… U (6)}

P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)

6P(1)=1→ P(1)= $\frac{1}{6}$

$$\therefore P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

1- P(A) = P(4) = $\frac{1}{6}$

2- P(B) = P(2,4,6)= $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3- P© =PØ $= 0$

- في تجربة القاء حجر نرد مرتين ماهو احتمال :
  ١- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى يساوي 10 .
  ٢- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى أكبر من 10 .
  ٣- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى يساوي 7 .
- فراغ العينة يتألف من 36 نقطة .

الوجه الأول / الوجه الثاني	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

١- اذا كان A ظهور عددين مجموعهما يساوي 10 .

A=[(4,6),(6,4),(5,5)]

P(A)= $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

٢-اذا كان B ظهور عددين مجموعهما أكبر من 10 .

B=[(5,6),(6,5),(6,6)]

P(B)= $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

٣-اذا كان C ظهور عددين مجموعها يساوي 7 .

C=[(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)]

P(C)= $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

تمرين :

وجد في أحد نوادي الرياضة القريبة من الجامعة 50 طالبا من جامعة الدمام ، منهم 20 طالبا من كلية الاقتصاد والادارة و 25 طالبا من كلية الآداب والباقي من الكليات الآخرى . أختير منهم طالبًا عشوائيا أوجد الاحتمالات التالية :

١- احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والادارة .

٢- احتمال أن يكون الطالب من كلية الآداب .