قوانين ديمورغان :

من خواص العمليات الجبرية على المجموعات مايسمى بقوانين ديمورغان والتي تنص على أن

$$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ومنها نستنتج أن :

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

مثال : إذا كان $P(A) = 0.3 \ , \ P(B) = 0.4 \ , \ P(A \cup B) = 0.5$

أوجد مايلي :

1. **احتمال حدوث الحالتين معاً ؟**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = 0.7 - 0.5$$
$$= 0.2$$

2. **عدم حدوث أي من الحادثين A ، B ؟**

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0.5$$
$$= 0.5$$

3. **عدم حدوث الحادث A أو الحداث B ؟**

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$$
$$= 1 - P(A \cap B)$$
$$= 1 - 0.2$$
$$= 0.8$$

4. **حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B ؟**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0.3 - 0.2$$
$$= 0.1$$

5. **حدوث الحادث B وعدم حدوث الحادث A ؟**

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.4 - 0.2$$
$$= 0.2$$

6. **احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B إذا كان A ، B حادثين منفصلين ؟**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= 0.3 + 0.4$$
$$= 0.7$$

الاحتمال الشرطي :

يعرف الاحتمال الشرطي على انه احتمال وقوع الحادث A مشروطاً بوقوع حادث آخر وليكن B ، ويرمز للاحتمال الشرطي بالرمز $P(A/B)$ ويعرف كالآتي :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \, , P(B) > 0$$

وكذلك يمكن تعريف الاحتمال الشرطي للحادث B مشروطاً بحدوث الحادث A على النحو الآتي :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \, , P(A) > 0$$

مثال : وميت قطعه نقد ثلاث مرات ، فإذا رمزنا لظهور الصورة بالحرف H وظهور الكتابة بالحرف T . إذا علم أن الوجه الاول في الرمية الاولى H فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H , H ؟

الحل : نلاحظ أن الفضاء العيني يساوي :

S = { (H,H,H) , (H,H,T) , (H,T,H) , (H,T,T) , (T,T,T) , (T,T,H) , (T,H,T) , (T,H,H) }

نفرض أن A يمثل الحادث " ظهور H في الرميه الاولى "

B تمثل الحادث ظهور الوجان H,H في الرميه الثانية و الثالثة

المطلوب : $P(B/A)$ ؟

بالنظر إلى فضاء العينة S فإن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

وكذلك

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

ومن قانون الاحتمال الشرطي ، نحصل على

$$P(B \Big/ A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

سؤال : اعتماداً على المثال السابق ، إذا علمت ان الوجه الأول كان T فما احتمال ان يكون الوجهان الآخران H,T ؟

قاعدة الضرب :

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

حيث يطلق على هذه القوانين مايسمى بقوانين الضرب ويستفاد منها في احتساب احتمالات التقاطع إذا علمنا أن الاحداث مشروطة بعضها ببعض .

مثال : إذا كان $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ وكان $P(A/B) = O.4$

أ) $\boldsymbol{P(A \cap B)}$

من قاعدة الضرب $P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$

ب) $\boldsymbol{P(B/A)}$

من قانون الاحتمال الشرطي $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2$

الحوادث المستقلة :

تعريف : يقال بأن الحادثان B,A حادثان مستقلان إذا كان حصول احدهما لايؤثر على حدوث الاخر

اي ان : $P(A/B) = P(A)$

لاحظ أن حدوث A لا يتأثر بوجود الحادث B ، وكذلك

$$P(B/A) = P(B)$$

وبتعويض هذه القيم في قانون الاحتمال الشرطي

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نحصل على

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال : إذا كان B,A حادثين مستقلين وكان $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ .. أوجد :

1. $\boldsymbol{P(A \cap B)}$

$$P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$$

2. $\boldsymbol{P(\overline{A \cap B})}$

$$1 - P(A \cap B) = 1 - 0.24 = 0.76$$

مثال : إذا كان $P(A/B) = P(A) = 0.6$, $P(B/A) = 0.5$ هل الحادثان A , B مستقلان ؟ وما احتمال الحادث B ؟

الحل : بما أن $P(A/B) = P(A) = 0.6$ فإن A ، B حادثان مستقلان .. ومع ذلك نجد أن $P(B) = P(B/A) = 0.5$

نظرية بيز :

إذا كانت A_1 , A_2 , ... , A_n تقيسماً لفضاء العينة S أي أن $A_i \cap A_j$ لكل $i \neq j$ و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

وكان $P(A_i) > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ وكان E حادث في S بحيث $P(E) > 0$ فإن $P(A_k|E) = \frac{P(A_k)P(E \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{k} p(A_i)p(E \mid A_i)}$

مثال : تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما ، فإذا كانت السكرتيرة A تطبع 40% من المراسلات ، وتطبع B 30% الباقيه ، وتطبع C 30% الباقيه ، إذا كان احتمال ان A تخطئ في الطباعه هو 0.02 واحتمال الخطأ في عند B هو 0.03 واحتماله عند C هو 0.04 .. سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ ، اوجدي احتمال ان نكون السكرتيرة B هي التي طبعتها ؟

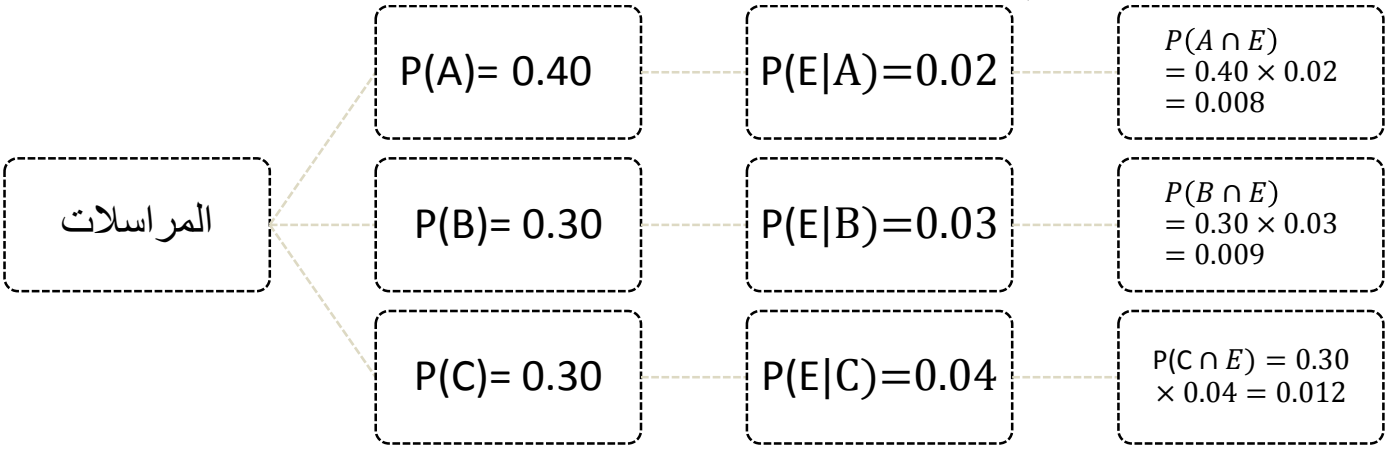
الحل : إذا كان E هو الحادث ، يوجد خطأ في الورقة المطبوعة .. المطلوب : ايجاد $P(B/E)$

$$P(B/E) = \frac{P(B)P(B/E)}{P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C)}$$

$$P(B/E) = \frac{0.30 \times 0.03}{0.40 \times 0.02 + 0.30 + 0.30 \times 0.04}$$

$$= \frac{9}{29} = 0.31$$

يمكن توضيح المثال السابق بالشكل التالي



تمرين 1 : إذا كان $P(A) = 0.7$ ، $P(B) = 0.8$ ... أوجد مايلي :

1) $P(A \cup B)$ إذا كان A , B حادثين مستقلين ؟

2) $P(A \cup B)$ إذا كان A , B حادثين منفصلين ؟

3) $P(\overline{A \cap B})$ إذا كان حادثين مستقلين ؟

4) $P(A/B)$ إذا كان A , B حادثين مستقلين ؟

5) $P(B/A)$ إذا كان A , B حادثين منفصلين ؟

تمرين 2 : يوجد في مصنع ثلاث ماكينات تنتج الاولى 450 وحدة يومياً والثانية 350 وحدة يومياً و الثالثة تنتج 200 وحدة يومياً وكانت نسبة المعيب من إنتاج الماكينة الاولى 1% ومن الثانية 2% ومن الثالثة 3% . اختيرت من إنتاج المصنع وحدة عشوائياً فوجدت أنها معيبة فاحسب احتمال أن تكون الوحدة المختارة من الماكينة الثانية .

تلخيص : مَلاك .. ❦