المحاضرة الثانية عشر – الباب الرابع (توزيعات المعاينة) ..

❖ توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{\mathbf{X}}$:

نظرية (١) : اذا كان لدينا مجتمع وسطه الحسابي M وتباينه σ^2 وكان المتغير العشوائي X ينتمي إلى هذا النوع من التوزيع ، واذا سحبنا عينة وسطها الحسابي $\overline{\mathbf{X}}$ وحجمها n من هذا المجتمع فإن :-

- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي $\overline{\mathbf{X}}$ هو :-

1) $E(\overline{\mathbf{X}}) = M_{\overline{X}} = M$

- تباين $\overline{X}$ هو :-

٢) $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$

- بشرط أن يكون السحب مع الإرجاع .

❖ مثال : سُحبت عينة عشوائية من مجتمع لانهائي معدله ٧٠ وتباينه ٤٠ ، إذا كان حجم العينة ١٠ أوجد :-

١- الوسط الحسابي للعينة .

٢- تباين العينة .

٣- الإنحراف المعياري للعينة .

❖ الحل :

- الوسط الحسابي للعينة :

١) $M_{\overline{X}} = M = 70$

- تباين العينة :

٢) $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{40}{10} = 4$

- الإنحراف المعياري للعينة :

٣) $\sigma^2_{\overline{X}} = \sqrt{4} = 2$

❖ توزيع المعيانة للوسط الحسابي $\overline{\mathbf{X}}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي :

نظرية (٢) : اذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي معدله M وتباينه σ^2 فإن توزيع $\overline{\mathbf{X}}$ يكون التوزيع الطبيعي ذا الوسط الحسابي M والتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ حيثُ أن المتغير العشوائي Z والذي يُعطى بالصيغة :

$$Z = \frac{\overline{X} - M}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري .

❖ مثال : تخضع علامات الطلاب في أحد المقررات لتوزيع طبيعي معدله ٦٥ وانحرافه المعياري ١٨ ، أخذت عينة عشوائية حجمها ٣٦ طالب ، أوجد مايلي :

١- احتمال أن يزيد وسط علامات تلك العينة عن ٧٤ .

٢- احتمال أن يقل الوسط الحسابي لعلامات تلك العينة عن ٦٠ .

❖ الحل :

- احتمال أن يزيد وسط العلامات عن ٧٤ :

لإيجاد قيمة Z المقابلة ٧٤ = $\overline{X}$

$$Z = \frac{\overline{X} - M}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{74 - 65}{18/\sqrt{36}} = \frac{9}{18/6} = \frac{9}{3} = 3$$

$P(\overline{X} > 74) = P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3)$

$= 1 - 0.9987 = 0.0013$

- احتمال أن يقل الوسط الحسابي لعلامات تلك العينة عن ٦٠ :

لإيجاد قيمة Z المقابلة ٦٠= $\overline{X}$

$$Z = \frac{\overline{X} - M}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{60 - 65}{18/\sqrt{36}} = \frac{-5}{18/6} = \frac{-5}{3} = -1.67$$

$P(\overline{X} < -1.67) = 0.0475$

نظرية (٣) : " المعاينة من مجتمع طبيعي وسطه M وتباينه σ^2 غير معلوم "

اذا أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي معدله M وتباينه σ^2 غير معلوم بحيث كان $\overline{\mathbf{X}}$ [الوسط الحسابي للعينة]

لعينة حجمها n وانحرافها المعياري S فإن المتغير : $T = \frac{\overline{X}-M}{s/\sqrt{n}}$ ، يخضع لتوزيع t بدرجات حرية v=n-1 .

- ❖ مثال : اذا كانت أطوال الطلاب في أحد الصفوف المدرسية تتبع التوزيع الطبيعي عند وسط حسابي = ١٦٠ سم ، اذا سحبت عينة عشوائية من ٤ طلاب فيما احتمال أن يقل متوسطها الحسابي عن ١٦٦ سم ، اذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة = ١٥ سم .
- ❖ المطلوب : $P(\overline{X} < 166)$
- ❖ الحل :

$$T = \frac{\overline{X}-M}{s/\sqrt{n}} = \frac{166-160}{10/\sqrt{4}} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$P(t[\lambda,3]=1.2) = 0.90$

بالرجوع إلى جدول توزيع t فإن $\lambda = 0.90$

نظرية (٤) : توزيع المعاينة للفرق بين وسطين عيينين $(\overline{X} - \overline{Y})$:

اذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي معدله M_1 وتباينه σ^2، ثم اخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي معدله M_2وتباينه σ^2 بحيث كان مستقل عن المجتمع الاول، ورمزنا للوسط الحسابي للعينة الأولى بالرمز $\overline{X}$ والوسط الحسابي للعينة الثانية $\overline{Y}$ فإن توزيع الفرق بين وسطين العينتين $(\overline{X} - \overline{Y})$ يخضع للتوزيع الطبيعي ذا المعدل $(M_1 - M_2)$ والتباين $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ بحيث: $Z = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

ويخضع للتوزيع الطبيعي المعياري .

- ❖ مثال : تخضع علامات الناجحين في امتحان الدراسة الثانوية العامة في أحد المدارس الحكومية (أ) لتوزيع طبيعي معدله ٧٠ وانحرافه المعياري ١٢ ، وفي مدرسة أخرى (ب) تخضع علاماتهم لتوزيع طبيعي معدله ٧٤ وانحرافه المعياري ١٦ ، أخذت عينة عشوائية حجمها ١٦ طالب من المدرسة أ وعينة أخرى حجمها ٩ طلاب من المدرسة ب ، على فرض أن الوسط الحسابي للعينة الأولى $\overline{X}$ والعينة الثانية $\overline{Y}$ أوجد :

١- $P(\overline{Y} - \overline{X}) > 8$

٢- $P(\overline{X} - \overline{Y}) < 3$

- ❖ الحل :
  - للمطلوب الأول :

$$z = \frac{(\overline{Y}-\overline{X})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{8-(74-70)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}} = \frac{4}{\sqrt{9+26.4}} = 0.65$$

$P[(\overline{Y} - \overline{X})>8]=P(Z > 0.65)$

$=1-P(Z < 0.65)=1-0.7422=0.2578$

  - للمطلوب الثاني :

$$z = \frac{(\overline{Y}-\overline{X})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{3-(70-74)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}} = \frac{7}{\sqrt{9+26.4}} = 1.14$$

$P[(\overline{X} - \overline{Y})<3]=P(Z < 1.14)=0.8729$

❖ تمارين :

سؤال (١): إذا كان لدينا المتغير العشوائي X والذي يتبع التوزيع الطبيعي ذا المعدل ٢٥ والتباين ٣٦، أجب عن الاسئلة التالية:

a. أوجد القيمة المعيارية المقابلة للعدد X=10 ؟
b. اذا تم سحب عينه حجمها ١٦ من ذلك التوزيع ، اوجد القيمة المعياريه المقابله للعدد $\overline{X} = 10$ ؟
c. أوجد الانحراف المعياري للعينة إذا علمت أن n=16 ؟

سؤال (٢) : اذا كان لدينا (x : n (15 , 25 ، سحبت منه عينة حجمها 10 ، اوجد $p(\overline{X} < 10$ ؟

سؤال (٣)إذا كان لدينا التوزيع الطبيعي X;N (10,25) والتوزيع الآخر Y;N (15,36)، ومستقل عن الاول ، سحبت عينة من المجتمع الأول حجمها ١٦، وسحبت عينة من المجتمع الآخر حجمها ٢٥، أوجد احتمال الفرق بين $(\overline{Y} - \overline{X})$ يقل عن العدد ٣ ؟

المطلوب: $[P\ (\overline{Y} - \overline{X}) < 3]$