المحاضرة الثالثة عشر
الفصل الخامس: التقدير Estimation

مقدمة: الاستنتاجات الاحصائية هي التعميمات والتوازن التي يمكن اتخاذها بناءً على معلومات او بيانات قمت بجمعها أو كانت متوفرة لديك.

فمثلاً إذا ارادت شركة أدوية أن تسوق دواء ما ، فإنه يجب عليها أن تحصل على تصريح أولاً ويتم ذلك من خلال اثبات أن الدواء المنتج قد جُرِب واثبت جدوى استعماله، وهذا يعني ان عينة من المرضى قد استعملوا ذلك الدواء وحصلوا على نتائج ايجابية، وبذلك فإن الشركة بنت قرارها من خلال دراسة تلك العينة.

المثال السابق يوضح أنه من أهم فروح الاحصاء الاستنتاجي هو عمليتي التق\اير واختبار الفرضيات. حيث حيث نقوم في الفصل الخامس بدراسة مفهوم التقدير على أن يتم دراسة اختبار الفرضيات في الفصل السادس لاحقاً إن شاء الله.

مفهوم التقدير : تتم عملية التقدير من خلال اختبار عينة عشوائية من مجتمع ما ومشاهدة مقررات تلك العينة ومن ثم حساب المقاييس المراد اجراءها وتعميم ذلك على المجتمع.

إن أي توزيع احتمالي يحتوى على معالم تحدد شكله على P ⟵ نسبة النجاح ، n ⟵ عدد مرات اجراء التجربة

أما في توزيع بواسون فيعتمد شكله على معلمة λ ⟵ معدل النجاحات في فترة زمنية معينة

وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة بالنسبة لهذه التوزيعات وفي هذه الحالة لا بد من تقدير هذه المعالم.

هناك طريقتان اساسيتان لتقدير معالم المجتمع المجهولة هما:

١- التقدير بنقطة. ٢- التقدير بفترة.

أولاً: التقدير بنقطة: يمكن ايجاد تقديرات للمعالم الخاصة بالمجتمع من خلال البيانات المأخوذة من عينة عشوائية وذلك بحساب ما يسمى بالإحصاءات، فمثلاً في المجتمع الطبيعي يستخدم متوسط العينة العشوائية $\overline{X}$ كتقدير لمتوسط المجتمع M وكذلك الانحراف المعياري للعينة S يستخدم كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع σ

في توزيع بواسون يستخدم الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ كتقدير لمعدل عدد النجاحات في تجربة بواسون λ، ($\lambda = \overline{X}$)

أما في توزيع ذات الحدين فيستخدم الوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ كتقدير لنسبة النجاح P ($P = \overline{X}$) ... وهكذا

وتسمى هذه التقديرات بالتقدير النقطي حيث أنها تأخذ قيمة واحدة فقط محسوبة من دراسة عناصر العينة.

<u>مثال ١</u> : اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي ($N(\mu , \sigma$ فكانت قيمتها ٥،٥، ٣، ٧، ٤، ٦، أوجد تقديراً معدل المجتمع μ وتقديراً تباين المجتمع σ ؟

الحل : أولاً : سنقوم بإيجاد الوسط الحسابي لعناصر العينة لدينا

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 6+4+7+3+5+5}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

وبناءاً عليه ، نقول ان الوسط الحسابي للمجتمع يساوي ٥

بمعنى ان : $\mu = \overline{X} = 5$

الوسط الحسابي للمجتمع تقديراً $\mu=5$

ثانياً : ولحساب تباين املجتمع ، لابد من حساب تباين العينة ومن ثم يمكن تقدير تبين المجتمع

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$= \frac{(6-5)^2+(4-5)^2+(7-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2}{6-1}$$

$$= \frac{1+1+4+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

وبذلك نستنتج ان تباين المجتمع σ^2 يساوي تقديراً تباين العينة بمعنى $\sigma^2 = 2$

وكذلك يمكن تقدير الانحراف المعياري للمجتمع من خلال ايجاد الانحراف المعياري للعينة بمعنى : $\sigma = S = \sqrt{2}$

$\sigma = \sqrt{2.5}$ (الانحراف المعياري للمجتمع تقديراً يساوي ٢,٥)

مثال: في توزيع بواسون، قدِّر عدد النجاحات في فترة زمنية معينة بناءً على عينة عشوائية اعطت القيم التالية 7,7,7,7,2 ؟

الحل: لابد من ايجاد الوسط الحسابي للعينة ، ومن ثم استطيع ان اقدر عدد النجاحات λ

$$\overline{X} = \frac{7+7+7+7+2}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\lambda = 6$$

تمرين: إذا اخذت عينة عشوائية حجمها 5 ، بحيث كان $\sum_{i=1}^{5} xi = 30$ مجتمع برنولي (ذات الحدين)، أوجد التقدير النقطي للمعلمة P ؟

ثانياً: التقدير بفترة (Interred Estimation):

من الصعب جداً الحصول على تقدير لمعلمة مجتمع ما دون الوقوع في الخطأ مهما كان هذا التقدير جيداً، ولذلك فإنه من المرغوب فيه إعطاء فترة معينة نتوقع أن تقع معلمة المجتمع بداخلها. إن مثل هذا النوع من التقديرات يسمى تقدير بفترة أو فترة ثقة لمعلمة من معالم مجتمع ما ، علماً بأن دقة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة ، فإنه ليس هنالك سبب يبرر امكانية الحصول على تقدير مجتمع دون الوقع في نسبة معينة من الخطأ

وسنتعرف في هذا البند على ايجاد فترات الثقة للوسط الحسابي (M) لمجتمع ما ، وكذلك فترات الثقة للنسبة P واخيراً ايجاد فترات الثقة للتباين σ^2

١. **إيجاد فترات الوسط الحسابي μ:**

نظرية (١): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي N(μ , σ^2) بحيث كانت σ^2 معلومة فإن فترة ١٠٠% (١-X) للمعلمة μ هي: $\overline{X} - Z_{1-x/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-x/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

حيث $\overline{X}$: الوسط الحسابي للعينة

$Z_{1-x/2}$: هي القيمة على محور Z والتي تقع على يسارها مساحة 1-x/2 ونجد قيمتها من خلال جداول التوزيع الطبيعي المعياري **σ :** الانحراف المعياري للمجتمع

n : حجم العينة

تفسير فترات الثقة:

تعتبر فترة الثقة من الأدوات القوية التي تعطي معلومات عن المعلمة المجهولة مثل (μ) باستعمال أسلوب العينة. وسيكون لدينا عدة أنواع دقة فترات الثقة منها ٩٠% ، ٩٥% ، ٩٨% وهذا ما نقصده بالرمز 100%(1-x)100 و سنأخذ توضيحاً حول شرح مفهوم فترة ٩٥% حيث أن البقية لها نفس السلوك.

١. مثل دراسة العينة وتسجيل المشاهدات وإيجاد قيمة الوسط الحسابي فإن

$$(\overline{X} - Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \overline{X} +\ Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

هي فترة نهايتها متغيران عشوائيان تحاول احتواء المجهولة μ.

٢- أن تفسير الاحتمال

$$(\overline{X} - Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \overline{X} +\ Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 95\%$$

أن التكرار النسبي لمحاولات المعاينة الكثيرة المتكررة يحدد أن ٩٥% من فترات الثقة ستحتوي المعلمة μ وأن ٥% منها لا تحويها.

(بمعنى إذا أخذنا ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ ومن خلاله نحسب فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع μ الصحيح وفقط 5% ، سيكون الوسط الحسابي للمجتمع خارج هذه الفترات

تلخيص : مَلاك ..