تابع للفصل الخامس : التقدير

مثال :- عينة عشوائية حجمها 25 ، اخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري = 4 ، فاعطت المعدل 60 . اوجد فترة 98% ثقة للوسط الحسابي للمجتمع ؟

الحل :- (المعطيات :

$n = 25$

$\sigma = 4$

$\bar{X} = 60$)

ويجب أنه نقوم بعملية التحويل التالية :-

مقدار الثقة ← $1 - \alpha = 98\% \Rightarrow 1 - \alpha/2 = ??$

مقدار عدم الثقة ← $\alpha = 2\%$

$$\alpha/2 = \frac{2\%}{2} = 1\%$$

$$1 - \alpha/2 = 1 - 1\% = 99\% = 0.99$$

وبتعويض القيم السابقة في نفس القاعدة ، نحصل على :-

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{X} + Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(60 - Z_{0.99} * \frac{4}{\sqrt{25}} \; , \; 60 + Z_{0.99} * \frac{4}{\sqrt{25}} \right)$$

$$= \left(60 - 2.33 * \frac{4}{5} \;,\; 60 + 2.33 * \frac{4}{5}\right)$$

$$= (58.14 \;,\; 61.86).$$

نظرية (C) :- اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2 غير معلوم، فإن فترة ثقة للوسط الحسابي μ هي :-

$$\left(\bar{X} - t[1-\alpha/2 \,,\, n-1] * \frac{S}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{X} + t[1-\alpha/2 \,,\, n-1] * \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

حيث S هو الانحراف المعياري للعينة.

مثال :- اخذت عينة عشوائية حجمها $= 15$ من مجتمع طبيعي فاحصت الوسط الحسابي 17.4، والانحراف المعياري 2.1. أوجد فترة ثقة 95% للوسط الحسابي μ ؟

المعطيات :- $S = 2.1 \,,\, \bar{X} = 17.4 \,,\, n = 15$

الحل :- نقوم بعملية تحويل $1-\alpha \Rightarrow 1-\alpha/2$

$$1-\alpha = 95\%$$
$$\alpha = 5\%$$
$$\alpha/2 = 2.5\%$$
$$1-\alpha/2 = 1-2.5\% = 97.5\% = 0.975.$$

$$\left(17.4 - t_{[0.975,14]} \times \frac{2.1}{\sqrt{15}},\ 17.4 + t_{[0.975,14]} \times \frac{2.1}{\sqrt{15}}\right)$$

من جدول توزيع t .

$= 2.145$

$$\left(17.4 - 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}},\ 17.4 + 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}}\right)$$

$$(16.24,\ 18.56)$$

نظرية (٣) :- (فترات الثقة للفرق بين وسطي مجتمعين)

اذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمفردة س مجتمع طبيعي $N(M_1, \sigma_1^2)$ وكانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ عينة عشوائية اخرى مستقلة عن الأول، بحيث كانت مفردة س مجتمع طبيعي $N(M_2, \sigma_2^2)$ و σ_1^2 ، σ_2^2 معلومتين، فإن فترة $(1-\alpha)100\%$ ثقة للفرق بين الوسطين $(M_1 - M_2)$ هي :-

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y}) - Z_{1-\alpha/2} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ (\bar{X}-\bar{Y}) + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

مثال :- اخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, 25)$ ثم اخذت عينة عشوائية اخرى حجمها 10 من مجتمع طبيعي $N(\mu_2, 40)$ مستقل عن الأول، فاذا اعطت العينة الأولى وسطاً حسابياً مقداره 32 بينما اعطت العينة الثانية وسطاً حسابياً مقداره 47، اوجد :-

أ) فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ ؟

ب) فترة 90% ثقة للفرق بين الوسطين $(\mu_2 - \mu_1)$ ؟

الحل :-

أ) فترة 95% ثقة للفرق بين $\mu_1 - \mu_2$ ؟

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 97.5\%$$

$$\left((32 - 47) - Z_{0.975} * \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} \, , (32-47) + Z_{0.975} * \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} \right)$$

$Z_{0.975}$ ⇓

بالرجوع الى جدول التوزيع الطبيعي المعياري سنجد أن قيمة Z التي تقع على يسارها مساحة 0.975 تساوي العدد 1.96 .

$$\left(-15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{9} + 4} \, , -15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{9} + 4} \right)$$

$$(-20.1 \, , \, -9.9) .$$

لاحظ أن $\bar{X}_1 - \bar{Y}_1 = 32 - 47 = \boxed{-15}$ تقع في (4)

ب) فترة ثقة 90٪ للفرق $\mu_2 - \mu_1$ ؟

$$1-\alpha = 90\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 95\%$$

$$\alpha = 10\%$$

$$\alpha/2 = 5\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 1-5\%$$

$$100\% = 95\%$$

$$\left[(\bar{Y}-\bar{X}) - z_{1-\alpha/2} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \; , (\bar{Y}-\bar{X}) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$= \left[(47-32) - z_{0.95} \times \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}} \; , (47-32) + z_{0.95}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}\right)$$

يتم استخراج هذه القيمة من جدول التوزيع الطبيعي العياري والتي تقابل العدد 1.64 .

$$= \left(15 - 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4} \; , 15 + 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4}\right)$$

$$= (10.73 \; , \; 19.27).$$

↑

الوسط الحسابي لكلا العينين هو :-

$$\bar{Y} = 47 \; , \; \bar{X} = 32.$$

$$\bar{Y} - \bar{X} = 47 - 32$$

$$= 15$$

وهو يقع داخل هذه الفترة (5)

تمرين :- عينة عشوائية حجمها 16 ، سحبت من مجتمع
طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ ، اذا علمت أن الوسط الحسابي
للعينة يساوي 20 ، اوجد :-

1) الوسط الحسابي للمجتمع اذا علمت ان تباين المجتمع يساوي 9 $\leftarrow \sigma^2$
2) الوسط الحسابي للمجتمع اذا علمت ان تباين العينة يساوي 9 $\leftarrow S^2$

علماً بأن فترة الثقة المطلوبة هي 90% ؟