

الفصل الثالث

الأسس

إذا كان n عدد صحيح موجب فإن :

$$a^n = a.a.a... \text{ من } n \text{ المرات (1)}$$

مثال : $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

(2) إذا كان $n=0$ فإن :

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

(3) إذا كانت n عدد صحيح سالب فإن :

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}, a \neq 0$$

مثال : $8^{-3} = \frac{1}{8^{(-3)}} = \frac{1}{8^3}$

تمارين : بسط ما يلي :

$$1) (x^3 y^2)^0 =$$

$$2) 10^{-3} =$$

$$3) \frac{x^{-3}}{y^{-5}} =$$

$$4) \frac{u^{-7}}{v^{-2}} =$$

$$5) \frac{1}{x^{-5}} =$$

خواص الأسس الصحيحة

إذا كان m, n عدنان صحيحان و a, b عدنان حقيقيان فإن :

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2) (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$3) (ab)^m = a^m \cdot b^m$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$$

$$5) \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \\ a^{n-m} \end{cases}, a \neq 0$$

تمارين

بسط ما يلي باستخدام الخواص السابقة :

$$1) 3x^5 (2x^2) =$$

$$2) \frac{6x^{-3}}{8x^{-4}} =$$

$$3) (2a^{-3}b^2)^{-2} =$$

$$4) \left(\frac{a^3}{b^5}\right)^{-2} =$$

$$5) \frac{4x^{-3}y^{-5}}{6x^{-4}y^3} =$$

$$6) \left(\frac{m^{-3}n^3}{n^{-2}}\right)^{-2} =$$

$$7) \left(\frac{x^{-3}}{y^4z^{-2}}\right)^{-3} =$$

الأسس الكسرية

إذا كان n, m عددان طبيعيين والعدد b أي عدد حقيقي ما عدا b لا تكون سالبة عندما n زوجية فإن :

$$1) b^{\frac{m}{n}} = (b^{\frac{1}{n}})^m$$

$$2) b^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}$$

مثال :

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = 2^3 = 8$$

تمارين : أوجد ما يلي :

$$1) 4^{\frac{1}{2}} =$$

$$2) 8^{\frac{1}{3}} =$$

$$3) 8^{\frac{2}{3}} =$$

$$4) (3x^{\frac{1}{3}})(2x^{\frac{1}{2}}) =$$

$$5) \left(\frac{4x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$6) (5y^{\frac{3}{4}})(2y^{\frac{1}{3}}) =$$

أيضا يمكننا استخدام الجذور لتبسيط الأسس كما يلي :

$$b^{\frac{m}{n}} = \left\{ \begin{array}{l} (b^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b^m} \\ (b^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{b})^m \end{array} \right\}$$

مثال :

تمارين :

$$1) 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3}$$

$$2) x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$$

$$3) y^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \quad \text{بسط مايلي :}$$

$$1) \sqrt{12x^3y^5z^2} =$$

$$2) 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$$

$$3) (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) =$$

تمارين :

أنطق مقامات الكسور التالية (ضع في أبسط صورة)

$$1) \frac{3}{\sqrt{5}} =$$

$$2) \frac{2}{5 + \sqrt{3}} =$$

$$3) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{5}} =$$

اللوغاريتمات

تعريف اللوغاريتم :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

- الرمز $\log_a b$ يقرأ لوغاريتم b للأساس a
- الأساس $a > 0, a \neq 1$ والعدد $b > 0$ لذلك يوجد عدد وحيد c بحيث أن :
 $b = a^c$ وهذا يعني أن : $\log_a b$ لها قيمة وحيدة (واحد لواحد)
- يمكننا أن نقول أن لوغاريتم العدد الموجب b للأساس a هو الأس الذي يجب أن نرفع إليه الأساس a لنحصل على العدد b
- $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ وبالتعويض عن قيمة c نجد أن : $b = a^c = a^{\log_a b}$
- $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
- $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$

أمثلة

(1) أكتب الصيغة اللوغاريتمية المقابلة للصيغة الأسية فيما يلي :

A) $3^4 = 81$

B) $2^{-5} = \frac{1}{32}$

C) $0.001 = 10^{-3}$

(2) أكتب الصيغة الأسية المقابلة للصيغة اللوغاريتمية فيما يلي :

$$A) \log_{10} 1000 = 3$$

$$B) \log_2 64 = 6$$

$$C) \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

(3) أوجد قيمة المجهول فيما يلي :

$$A) \log_4 x = 3$$

$$B) \log_3 x = 2$$

$$C) \log_x 81 = 4$$

تمارين

$$A) \log_5 125 = x$$

$$B) \log_{10} (x^2 + 1) = 1$$

$$C) \log_x 27 = 3$$

$$1) \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3) \log_a x^n = n \log_a x$$

مثال : إذا كانت $\log_3 5 = 1.46$ و $\log_3 2 = 0.63$ فأوجد مايلي :

$$1) \log_3 10 =$$

$$2) \log_3 15 =$$

$$3) \log_3 16 =$$

$$4) \log_3 2.5 =$$

$$5) \log_3 0.4 =$$

$$6) \log_3 \sqrt[3]{4} =$$

تمرين

حل المعادلة التالية :

$$\log_4 x + \log_4(x - y) = 2$$