الفصل السابع

المصفوفات

أنواع المصفوفات

1- المصفوفة الصفرية $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2- مصفوفة الصف $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

3- مصفوفة العمود $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

4- المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

5-المصفوفة القطرية $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

6- مصفوفة الوحدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7- المصفوفة المثلثية $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

تساوي مصفوفتين

تتساوى مصفوفتان إذا كان لهما نفس العناصر وبالترتيب نفسه

مثال : إذا كانت المصفوفتان التاليتين متساويتين فأوجد قيمة x و y

الحل :

$$\begin{bmatrix} 2 & y \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$y = -4$$

$$x = 5$$

مثال : إذا كانت : $\begin{bmatrix} 3-x & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & y+5 \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة x وy

الحل :

البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

جمع المصفوفات وطرحها

مثال : إذا كان $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ فأوجد :

$$\underline{A} + \underline{B} =$$

$$\underline{B} + \underline{A} =$$

$$3\underline{A} + 2\underline{B} =$$

$$5\underline{A} - 3\underline{B} =$$

ضرب المصفوفات

لكي تتم عملية ضرب المصفوفتين التاليتين $\underline{A}_{m\times n}\times\underline{B}_{n\times s}$ لابد وان يتحقق الشرط التالي :

عدد الأعمدة في المصفوفة n الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية n

مثال : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين :

$$\underline{A}_{2\times2}=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \underline{B}_{2\times2}=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\end{bmatrix}$$

مثال : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين :

$$\underline{A}_{2\times2}=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \underline{B}_{2\times3}=\begin{bmatrix}2&3&-2\\2&-1&0\end{bmatrix}$$

الحل :

$$\underline{A}_{2\times2}\times\underline{B}_{2\times3}=$$

في المثال السابق هل يمكن ايجاد $\underline{B}_{2\times3}\times\underline{A}_{2\times2}$ ولماذا ؟

تمرين : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

مثال : حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$2\underline{X} - 3\underline{A} = 3\underline{B} - \underline{X}$$

حيث : $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

مثال : إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ فاوجد :

$$\underline{A}^2 - 2\underline{A} + 3I =$$

المحددات

أولا : المحددة 2×2

إذا كانت لدينا المصفوفة التالية $\underline{A}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ فإن المحددة لها هي دلتا Δ وهي على الصورة التالية :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=(a_1b_2)-(a_2b_1)$$

مثال : أوجد محددة المصفوفة التالية : $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

مثال : أوجد محددة المصفوفة التالية : $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

مقرر مبادئ الرياضيات للإدارة
أستاذ المادة/ ثابت القحطاني
البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

ثانيا : المحددة 3×3

إذا كانت المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ فإن المحددة لها على الصورة التالية :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

مثال : أوجد محددة المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

طريقة أخرى (طريقة كرامر)

معكوس المصفوفة : يرمز لمعكوس المصفوفة بالرمز $\underline{A}^{-1}$

$$\underline{A}\cdot\underline{A}^{-1}=\underline{A}^{-1}\cdot\underline{A}=I$$

إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ فإن معكوس الدالة يحسب كالتالي

أولا نوجد المحددة الدلتا $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

ثانيا نوجد معكوس المصفوفة بالطريقة التالية $\underline{A}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$

مثال : إذا كانت المصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

فأوجد $\underline{A}^{-1}$

الحل :

تمرين : إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ فأوجد $\underline{A}^{-1}$

مثال : أوجد قيمة X التي تجعل المصفوفة التالية $\underline{A}=\begin{bmatrix} x-2 & x \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ليس لها معكوس

الحل :

تمرين : أوجد قيمة x التي تجعل المصفوفة التالية $\underline{A}=\begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ ليس لها معكوس

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المحددات

الطريقة : لحل النظام التالي $\begin{Bmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{Bmatrix}$

أولا : نوجد المحددة $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2) - (b_1a_2)$

ونوجد مصفوفة الثوابت $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

ثم نوجد $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

ثانيا نوجد قيمة المجهولين x و y كالتالي

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ و $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

مثال : حل النظام التالي $\begin{Bmatrix} 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{Bmatrix}$

مثال : حل نظام المعادلات التالي باستخدام المحددات

$$\begin{Bmatrix} x + 3y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{Bmatrix}$$

مثال : حل النظام التالي $\begin{Bmatrix} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{Bmatrix}$