شرح موجز لقوانين مادة الإحصاء للإدارة مع شرح أمثلة عليها

إعداد / نبيل المطير

I_do-do_you@hotmail.com

2130010872@sm.ud.edu.sa

الباب الأول : قوانين الاحتمالات

يحتوي هذا الباب على عدة مواضيع علماً أن القوانين التي بها مطلوب حفظها ولن يزودونا بها في الاختبار وهي كالتالي :

التجربة الأحصائية	طرق العد	نظرية الاحتمالات
الحادث البسيط	طريقة الضرب	قوانين الإحتمالات
الحادث المركب	طريقة الجمع	قوانين ديمورغان
الحادث الأكيد	طريقة التبديل	الاحتمال الشرطي
الحادث المستحيل	طريقة التوافيق	الحوادث المستقلة

التجربة الإحصائية

هي أي تجربة إحصائية بالتأكيد تكون فيها نتائج والتجارب التي أخذنا أمثلة فيها هي تجربة القاء قطعة نقد وتجربة القاء قطعة نرد.

قطعة النقد: تحتوي على صورة وكتابة فقط ونرمز للصورة H ولكتابة T أي أنه في حال إلقاء القطعة لن تظهر لك غير النتيجتين إما صورة أو كتابة فلو طلب منك بالسؤال القاء قطعة نقد:

مرة واحدة : نتيجة واحدة في كل مرة فقط إما صورة أو كتابة [(H),(T)] .

مرتين : 4 نتائج صورة وصورة أو صورة وكتابة أو كتابة وصورة أو كتابة وكتابة ستكون كالتالي [(H,H),(H,T),(T,T),(T,H)] .

ثلاث مرات : 8 نتائج ستكون كالتالي [(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)] .

أما بالنسبة لقطعة نرد نعرف أن النرد يحتوي على 6 أرقام من 1,2,3,.....,6 فلو طلب منك بالسؤال إلقاء قطعة نرد :

مرة واحدة : نتيجة واحدة في كل مرة إما 1 أو 2 إلى 6 [(1),(2),(3),(4),(5),(6)] .

مرتين : 36 نتيجة كالتالي

[(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)

وهكذا حتى

[(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)]

ملاحظة: لن تكون هناك تجربة من إلقاء قطعة نرد ثلاث مرات لأن النتائج ستكون كثيرة.

طبعا دائما النتائج التي تظهر ترمز لها بالرمز S وتعني فضاء العينة بعد معرفة النتائج التي ستظهر سيطلب منك في السؤال أن تستخرج التالي :

حادث بسيط : وهي أي قيمة واحدة من النتائج فمن النقد ممكن أن نقول (H,H) مثلا ومن قطعة النرد نقول مثلا (1,2) .

حادث مركب : وهي نتيجتين فأكثر فمن النقد ممكن أن نقول (H,H),(H,T) مثلا أو اكثر ومن قطعة النرد نقول مثلا (2,2),(2,3),(2,4) .

حادث مستحيل : المستحيل هي مثلا احتمال ظهور الرقم 7 في تجربة النرد والنرد لا يحتوي على الرقم 7 لذلك نقول الحادث المستحيل دائما Ø .

حادث أكيد : وهي كل النتائج التي حصلت عليها من التجربة لذلك هي الفضاء العيني بكاملة إذن ستكون هي S .

وكذا انتهينا من القسم الأول بالباب الأول

طرق العد

طريقة الضرب:

قاعدتها طرق التجربة الأولى مضروبة في طرق التجربة الثانية

مثلا لو أتاك سؤال بأن هناك طالب يريد التسجيل في مقررين (لاحظ أنه يريد التسجيل في الأثنين) أحدهم في الإحصاء والآخر في الحاسب , فإذا كان عدد المقررات في الإحصاء 3 مقررات والحاسب 4 مقررات فما عدد الطرق التي يمكن أن يسجل فيها الطالب ؟

لاحظ بأنه أعطاك عدد الطرق لكل مادة وهي عدد المقرر فطرق الإحصاء 3 وطرق الحاسب 4 فهنا نستخدم طريقة الظرب وهي :

$3 \times 4 = 12$ طريقة يمكن التسجيل فيها .

طريقة الجمع:

قاعدتها طرق التجربة الأولى مجموعة مع طرق التجربة الثانية

مثلا لو أتاك نفس السؤال السابق بأن هناك طالب يريد التسجيل في أحد المقررين (لاحظ أنه يريد التسجيل في أحدهما مو كل المادتين) إما من قسم الإحصاء أو من قسم الحاسب فإذا كان عدد المقررات في الإحصاء 3 مقررات والحاسب 4 مقررات فما عدد الطرق التي يمكن أن يسجل فيها الطالب ؟

لاحظ أولاً أنه شرط هنا شرط وهذا ما يفرق بين طريقة الضرب والجمع الضرب بدون شروط ويمكن أن تحدث معاً اما الجمع فأنت مشروط هنا باختيار احده المادتين لذلك تستخدم طريقة الجمع.

أعطاك عدد الطرق لكل مادة وهي عدد المقرر فطرق الإحصاء 3 وطرق الحاسب 4 فهنا نستخدم طريقة الجمع كما ذكرنا وهي :

$3 + 4 = 7$ طريقة يمكن التسجيل فيها .

طريقة التبديل:

لديها ثلاث قواعد :

القاعدة الأولى: $nPn=n!=n(n-1)(n-2)....$

القاعدة الثانية : $nPn=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

القاعدة الثالثة : $nPr=\frac{n!}{(n-r)!}$

التبديل هي طريقة ترتيب بعض أو جميع العناصر المعطاة بالسؤال فسيطلب منك السؤال أن تقوم بترتيب مجموعة أو كلمة أو غيرها فعندما يسألك عن ترتيب أي أنه يقصد هنا استخدام طريقة التبديل . ولكن السؤال أي قاعدة يمكن أن تستخدم لتحل المسألة لنشرح القواعد الثلاثة:

القاعدة الأولى لطريقة التبديل: لو أعطيت مثلا ثلاث حروف a,b,c يريد منك ترتيبها ففي السؤال سيقول لك ما عدد ترتيب الحروف السابقة هو نستخدم القاعدة الأولى حيث أنك في حال ترتيب الحروف السابقة فبما أنها ثلاث حروف أي أنه لدينا ثلاث أماكن فارغه فقد لو وضعنا الحرف الأول a سيكون لدينا حرفين فقط ومكانين ولو اخترنا الحرف الثاني سيكون لدينا حرف واحد ومكان واحد أي أنه في حال ترتيب حرف تتناقص الحروف التي بالسؤال بالتدريج إلى أن تستخدم كل الحروف لذالك في المرة الأولى يكون العدد الكامل هو 3 حروف وفي المرة الثانية سيكون باقي حرفين وسيكون 2 وفي المرة الثالثة سيكون حرف واحد سيكون 1 وبذالك سيكون الحل بالطريقة التالية :

$3P3 = 3! = 3 \times (3-1) \times (3-2) = 3\times2\times1 = 6$

أنا شرحت الفكرة عشان تفهم شلون طلع الحل لكن فيه طريقة مختصرة وتوفر عليك الوقت فأنا رح اتطرق وأشرح الطرق المختصرة عشان نستفيد من الوقت

فلو جاك السؤال الأولى وطلب منك ترتيب الحروف السابقة لاحظ أنه لا يوجد أي حرف مكرر (يجب الانتباه لهذا الأمر وسنفهم لماذا في القاعدة الثانية) فلا يوجد هنا حروف مكررة لذلك مباشرة نطلع النتيجة بالآلة الحاسبة وهي عن طريق استخدام الأزرار التالية بالألة :

3 SHIFT x^{-1} =

راح يطلع لك بالشاشة زي كذا

3!=6

طبعاً ضغطت الـ SHIFT عشان تطلع لي بالألى علامة التعجب التي فوق الزر x^{-1} ولو رجعت بالآلة راح تفهم هذي الرموز فما في داعي أوضح هذا الأمر اختصارا للوقت . طيب هذا حل القاعدة الأولى ومتى نستخدمها .

يتبع ..

القاعدة الثانية لطريقة التبديل: تستخدم القاعدة الثانية في حال أنه طلب منك بالسؤال **ماعدد تباديل او بكم طريقة يمكن ترتيب** كلمة سلسبيل وهذي الصيغتين بالسؤال عندها راح نستخدم القاعدة الثانية وبالآلة الحاسبة ليه القاعدة الثانية لأنه هناك حروف مكررة وهذا سبب عدم استخدام الطريقة الأولى ونفس الشي بالنسبة لكلمة MISSISSPPI .

خلونا نحل كلمة MISSISSPPI لازم نعرف أولاً عدد حروف الكلمة أولاً وعددها 10 حروف طيب فيه حرف الـ I مكرر ثلاث مرات وحرف S مكرر أربع مرات وحرف P مكرر مرتين لذلك راح نستخدم القاعدة الثانية وهي

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}=\frac{10!}{4!\times 4!\times 2!}$$

البسط حيكون مضروب عدد الحروف كلها وهي 10 وبالمقام بيكون مضروب الأربع المكررة في مضروب الثلاث المكررة في مضروب الأثنين المكررة ونفس الطريق بالطريقة بالآلة الحاسبة راح تطلع معك سويها نفس الشي بالكسر بالأزرار التالية :

هذه الأزرار اللي بالبسط [▤] [1] [0] [SHIFT] [x^{-1}]

بعدين تنزل بالسهم تحت للمقام عن طريق زر الأسهم الدائري [▼] اللي موجود بنص الآلة وتكتب قيم البسط بالطريقة التالية

[4] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [3] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [2] [SHIFT] [x^{-1}]

وعند الضغط على [=] راح تظهر لك النتيجة وهي

12600 طريقة

القاعدة الثالثة لطريقة التبديل : تستخدم هذه الطريقة في حال طلب من بالسؤال طرق ترتيب كلمة " تاريخ" ولكنه شرط بالسؤال أن ترتب حرفين كم كلمة " تاريخ " هنا راح نستخدم القاعدة الثالثة وبالآلة الحاسبة ليه القاعدة الثانية لأنه طلب جزء من الحروف يعني كان هناك شرط وهذا سبب عدم استخدام الطريقة الأولى والطريقة الثانية .

راح نعوض بالقاعدة مباشرة عدد حروف الكلمة 5 حروف ويبي منها ترتيب حرفين

$$\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=20$$

البسط حيكون مضروب عدد الحروف كلها وهي 5 وبالمقام بيكون مضروب (عدد الحروف كلها مطروح منها عدد الحروف المراد ترتيبها) وبالتالي سيكون 5-2 = 3 يعني بالمقام مضروب 3 هنا في القاعدة الثالثة يمكن أن تقوم عملها بالآلة بطريقتين :

الأولى :

هذه الأزرار اللي بالبسط [▤] [5] [SHIFT] [x^{-1}]

بعدين تنزل بالسهم تحت للمقام عن طريق زر الأسهم الدائري [▼] اللي موجود بنص الآلة وتكتب قيم البسط بالطريقة التالية

[(] [5] [−] [2] [)] [SHIFT] [x^{-1}]

وعند الضغط على [=] راح تظهر لك النتيجة وهي

20 طريقة

الثانية : تطبق بداية القانون الثاني فقط وتكتب الآلة 5P2 ومن ثم تضغط يساوي ويطلع لك الناتج .. وتسويها بالأزرار التالية :

[5] [SHIFT] [×] [2]

ثم [=]

النتيجة 20 طريقة

لاحظ فوق زر الـ [×] بتلاقي القاعدة nPr واللي هي قاعدتنا الثالثة لحل المسألة

يتبع ..

طريقة التوافيق:

قاعدتها: $nCr=\frac{n!}{(n-r)!r!}$

الفرق بين طريقة التوافيق والتباديل بأن التباديل يسأل عن ترتيب .. أما التوافيق فليس مهما هنا الترتيب ولذلك أي سؤال يأتيك فيه طلب عدد الطرق أن حدد في السؤال وطلب ترتيب يعني أنك ممكن تستخدم أي من القوعد الثلاثة من طرق التبديل أما لو طلب منك عدد الطرق وحدد بدون النظر إلى الترتيب فهنا يمكن أعتماد طريقة التوافيق .

وشرح قاعدتها مضروب عدد العناصر مقسوم على مضروب (عدد العناصر ناقص العينة المطلوبة) في مضروب العينة .

مثال : لو طلب منا صف فيه 10 طلاب بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من 3 أشخاص دون النظر إلى الترتيب ؟

حدد هنا بدون ترتيب لذالك يمكن حل السؤال بالطريقة المطولة والطريقة المختصرة بعطيكم الطريقة المختصرة بالآلة الحاسبة وهي أنك تأخذ الشطر الأول من القانون nCr وتعوض القيم في الآلة وتطلع لك النتيجة عن طريق ضغط الأزرار التالية :

1 0 SHIFT ÷ 3

ثم =

النتيجة 120 طريقة

البسط حيكون مضروب عدد الحروف كلها وهي 5 وبالمقام بيكون مضروب (عدد الحروف كلها مطروح منها عدد الحروف المراد ترتيبها) وبالتالي سيكون 5-2 = 3 يعني بالمقام مضروب 3 هنا في القاعدة الثالثة يمكن أن تقوم عملها بالآلة بطريقتين :

الأولى :

هذه الأزرار اللي بالبسط x^{-1} SHIFT 5 ⊟

بعدين تنزل بالسهم تحت للمقام عن طريق زر الأسهم الدائري ▼ اللي موجود بنص الألة وتكتب قيم البسط بالطريقة التالية

(5 − 2) SHIFT x^{-1}

وعند الضغط على = راح تظهر لك النتيجة وهي

20 طريقة

الثانية : تطبق بداية القانون الثاني فقط وتكتب الآلة 5P2 ومن ثم تضغط يساوي ويطلع لك الناتج .. وتسويها بالأزرار التالية :

5 SHIFT × 2

لاحظ فوق زر الـ ÷ بتلاقي القاعدة nCr .

في أحد الأمثلة بالمحتوى أعطانا 5 كرات حمراء و 7 كرات بيضاء في صندوق واحد وطلب منا طرق أختيار 4 كرات من الصندوق بغض النظر هعن اللون يعني بغض النظر على الترتيب لذالك سنحل السؤال بطريقة التوافيق ... بعدها في الفقرة الثانية طلب اختيار 4 كرات بشرط أن تكون واحدة حمراء و 7 بيضاء هنا نحل المسألة بطريقة التوافيق ولكن كل لون لوحدة ففي الأحمر نكتب 1 AC 5 ونطلع الناتج وبعدين الكرات الأبيض نكتب 3 AC 7 وتطلع الناتج طيب وبعدين أيش تسوي تطبق قاعدة الظرب اللي بأول طرق العد ليه لأننا قلنا الظهر هو نتيجة التجربة الأولى في نتيجة الطرق الثانية فالنتيجة الأولى بتطلع 5 والثانية 5 3 فنضربهم ببعض يطلع الناتج 5 7 1 .

وكذا انتهينا من القسم الثاني في الباب الأول

نظرية الاحتمالات

طريقة التكرار النسبي :

الطريقة الأولى في نظرية الاحتمالات هي طريقة التكرار النسبي وتعتمد على القانون التالي :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

وهو باختصار البسط عبارة عن عدد عناصر الحادثة والتي تمثل (A) مقسوم على المقام هي مجموع القيم أو العناصر كلها فلو كان السؤال المعطى مثلاً :

إذا كان طلبة إحدى الكليات موزعين حسب التالي : 320 إدارة أعمال – 480 محاسبة – 300 تسويق – 500 علوم مالية فما احتمال مقابلة أحد الطلبة من قسم المحاسبة ؟

كل ما علينا في طريقة التكرار النسبي أن نقوم بتحديد عدد عناصر الحادث والحادث هنا كلية المحاسبة وتحوي على 480 اما مجموع الحوادث كلها فتحتوي على 320+480+300+500 فنعوض بالقانون مباشرة وعن طريق الآلة الحاسبة يمكن إيجاد القيمة

$$\frac{480}{320+480+300+500} = \frac{480}{1600} = 0.3$$

قوانين الاحتمالات:

قوانين الاحتمالات تحتوي 3 نظريات وهي :

النظرية الأولى : وهي نستطيع تسميتها مسلمات أي الاحتمال هذا يساوي كذا وتكون عادة الأسئلة فيها مباشرة بنفس القانون

- **أن أي مجموعة خالية Ø فإن احتمال هذه المجموعة تساوي (صفر) يعني لو جاب بالأسئلة P(Ø) = فالجواب مباشرة (صفر) .**
- **أن أي مجموعة كلية S فإن احتمال هذه المجموعة تساوي (1) يعني لو جاب بالأسئلة P(S) = فالجواب مباشرة (1) .**
- **أن أي احتمال لحادث E في الفضاء العيني S يكون محصورا بين الصفر والواحد يعني لو جاب لك بالسؤال أوجد ≥ P(E) ≥ فأختر الإجابة التي تحتوي على 0 ≤ P(E) ≤1**

النظرية الثانية : أي حادث يعطيك أياه في السؤال ويطلب منك متممة هذا الحادث فيفترض بك أتباع هذا القانون

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ويعني هذا الرمز Ā متمة فلو طلب من بالسؤال إذا كان احتمال نجاح طالب في مادة المحاسبة 60% فما احتمال عدم نجاحة ؟

نلاحظ بالسؤال أن الحادثة A هي النجاح والتي قيمتها 60% أي (0.60) ويريد عدم احتمال نجاحة والتي بالتأكيد ستكون القيمة من الـ 60 بالمية المكلة للـواحد وتسمى متممة Ā لماذا لأننا ذكرنا بأن القيمة في الحادث دائما تكون محصورة بين الصفر والواحد في النظرية الأولى لذلك سنقول :

$$P(\bar{A}) = 1-0.60=0.4$$

يتبع ..

النظرية الثالثة : يجب أن نعرف أن الرمز U تعني أو وأن الرمز ∩ تعني و.

$P(AUB)= P(A)+ P(B)- P(A\cap B)$

في القانون يخبرنا بأن احتمال حدوث حادثة واحده وعدم حدوث الأخرى عشان نستنتجها لابد من استخدام النظرية الثالثة من قوانين الاحتمالات مع العلم أنه في حال ذكر لك بالسؤال بأن A و B حادثين منفصلين فأننا نستخدم الجزء التالي من القانون فقط وهو :

$P(AUB)= P(A)+ P(B)$

مثال حتى تتضح الصورة : احتمال غياب طالب في المحاضرة الأولى هي 0.30 وغيابة في الحاضرة الثانية هي 0.15 واحتمال غيابة عن طل المحاضرتين هي 0.20 فأجب عما يلي :

أ) احتمال غيابه في أحد المحاضرتين على الأقل ؟

ب) احتمال عدم غياب الطالب في أي من المحاضرتين ؟

ج) احتمال حضور الطالب للمحاضرة الأولى ؟

سنرمز A للمحاضرة الأولى ويساوي التغيب فيها 0.30

وسنرمز B للمحاضرة الثانية ويساوي التغيب فيها 0.15

وسنرمز A∩B وهي المطلوب الثالث في السؤال وهو حضور المحاضرتين معاً يعني A و B وقلنا إشارة (و) يعني أتحاد .

هنا الحل صار واضح

في الفقرة الأولى يريد مننا غيابه في احد المحاضرتين الغياب يعني الأولى أو الثانية يعني الرمز U يعني نقول AUB يعني نطبق القانون مباشرة وحل السؤال وبالآلة الحاسب :

$P(AUB)= P(A)+ P(B)- P(A\cap B)= 0.30+0.15-0.2= 0.25$

الناتج هو 0.25 وهو احتمال غيابه في احد المادتين

في الفقرة الثانية يريد مننا عدم غيابة في أي من المحاضرتين يعني حضور أحدهما لاحظ هنا الفقرة الأولى غياب أحدهما وهنا حضور احدهما يعني يريد متممة النتيجة الأولى أي متممة AUB ورمزها $\overline{(AUB)}$ هنا نأخذ النتيجة الأولى ونطرحها من واحد لية لأننا قلنا بالنظرية الأولى أن قيمة الاحتمالات محصورة بين 0 و 1 ولأنه عندنا غيابه في أحد المحاضرتين فحضوره في أحدها هي القيمة المتبقية من قيمة احتمال غيابه وهي :

$$P\overline{(AUB)} = 1 - P(AUB) = 1 - 0.25 = 0.75$$

في الفقرة الثالثة يريد منا حضور الطالب للمحاضرة الأولى فقط وهنا نفس الفقرة الثانية يريد متممة P(A) ليه لأنه بالسؤال معطينا غيابة بالمحاضرة الأولى فنسبة حضوره تعادل القيمة المتبقية من الرقم 1 أي أنه يريد متممة P(A) فنقول الحل :

$$P\overline{(A)} = 1 - P(A) = 1 - 0.30 = 0.70$$

القانون الثاني في النظرية الثالثة والتي يطلب فيها احتمال ظهور الحادثة A أو B حيث أنهما حدثين منفصلين سيأتي السؤال شبيهه بالطريقة التالية :

إذا كان P(A)=0.30 و P(B)=0.4 بحيث كان الحادثان منفصلان فأوجد احتمال حدوث A أو B ؟

هنا نعوض بالقانون الثاني بدون التقاطع

$P(AUB)= P(A)+ P(B)= 0.3 + 0.4 = 0.7$

يتبع ..

النظرية الرابعة : إذا كان A و B حادثان في الفضاء العيني S فإن:

$$P(A\cup\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$$

$$P(B\cup\overline{A}) = P(B) - P(A\cap B)$$

القانون الأول أن احتمال حدوث A وعدم حدوث B في نفس الوقت يساوي الحادث A مطروح من حدوث الحادثين معاً

القانون الثاني أن احتمال حدوث B وعدم حدوث A في نفس الوقت يساوي الحادث B مطروح من حدوث الحادثين معاً

فلو جانا سؤال يقول إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.9 واحتمال حضور مساعدة في ذلك اليوم هو 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الأقل يساوي 0.97 أوجد ما يلي :

أ احتمال حضور المدير ومساعدة ؟
ب احتمال حضور المدير وحده فقط ؟
ت احتمال حضور المساعد وحده فقط ؟

الحل راح نرمز للمدير بالرمز A والمساعد بالرمز B .

لاحظ بالفقرة أ يبي احتمال حضورهم الأثنين معاً يعني حضور A و B أي $(A\cap B)$ يعني لو رجعنا للقانون

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

عندنا قيمة A تساوي 0.9 وعندنا قيمة B تساوي 0.95 وعندنا قيمة $(A\cup B)$ وهي حدوث الأولى أو حدوث الثاني تساوي 0.97 فنعوض بالقانون مباشرة

$$0.97 = 0.9 + 0.95 - P(A\cap B)$$

$$0.97 = 1.85 - P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$$

لاحظ بالفقرة ب يبي احتمال حضور المدير بس حضور A وهي تعني أن المدير حضر لكن المساعد غاب طيب بالسؤال معطينا حضور المساعد فغيابه يعني أيش يعني متممة B لذلك نستخدم القانون الأول في النظرية الرابعة وهي حضور الأول وغياب الثاني

$$P(A\cup\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$$

$$P(A\cup\overline{B}) = 0.9 - 0.88$$

$$P(A\cup\overline{B}) = 0.02$$

لاحظ بالفقرة ج يبي احتمال حضور المساعد بس حضور B وهي تعني أن المساعد حضر لكن المدير غاب طيب بالسؤال معطينا حضور المدير فغيابه يعني أيش يعني متممة A لذلك نستخدم القانون الثاني في النظرية الرابعة وهي حضور الثاني وغياب الأول

$$P(B\cup\overline{A}) = P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(B\cup\overline{A}) = 0.95 - 0.88$$

$$P(B\cup\overline{A}) = 0.07$$

يتبع ..

قوانين ديمورغان:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

عشان نفهم قوانين ديمورغان نشوف السؤال التالي :

إذا كان P(A)=0.3 و P(B)=0.4 و P(AUB)=0.5 أوجد ما يلي :

أ- احتمال حدوث الحادثين معاً ؟
ب- عدم حدوث أي من الحادثين A,B ؟
ت- عدم حدوث الحادث A أو الحادث B ؟
ث- حدوث الحادث A وعدم حدوث B ؟
ج- حدوث الحادث B وعدم حدوث A؟
ح- احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B إذا كان A , B حادثين منفصلين ؟

هذا تقريبا سؤال يشمل أكثر من قانون .

فقرة أ : عدم حدوث الحادثان معاً يعني $(A \cap B)$ طيب عشان نطلع القيمة هذي نرجع للقانون في النظرية الثالثة ونعوض القيمة والقانون هو :

$$P(AUB)= P(A)+ P(B)- P(A\cap B)$$

$$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A\cap B)$$

$$0.5 = 0.7- P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)= 0.7 - 0.5$$

$$P(A\cap B)= 0.2$$

فقرة ب : عدم حدوث أي من الحادثتين لأنه بالسؤال معطينا قيم الحادثة A وقيم الحادثة B معناته عدم حدوث A يساوي متممة A وعدم حدوث B يساوي متممة B ولأنه يبي عدم حدوثهما معا يعني تقاطع (و) يعني $(\bar{A} \cap \bar{B})$ طيب عشان نطلع القيمة هذي نرجع للقانون في نظرية ديمورغان واللي تقول أن

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

يعني لو عندك قيمة $P(\overline{A \cup B})$ فهي تساوي $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ والعكس صحيح لو رجعنا للسؤال حنا عندنا $P(A \cup B)$ يعني عشان نطلع الإجابة نجيبة متممة $P(A \cup B)$ وهي $P(\overline{A \cup B})$ ولذلك نرجع للقانون المعروف متممة الشي تساوي

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0.5$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0.5$$

فقرة ت : عدم حدوث الحادث A أو الحادث B وهذا يعني علامة (أو) يعني $(\bar{A} \cup \bar{B})$ طيب عشان نطلع القيمة هذي نرجع للقانون في نظرية ديمورغان واللي تقول أن

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

يعني لو عندك قيمة $P(\overline{A \cap B})$ فهي تساوي $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ والعكس صحيح لو رجعنا للفقرة أ حنا طلعنا قيمة $(A \cap B)$ واللي تساوي 0.2 الحين نطلع متممتها بنفس القانون الخاص بالمتممة

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0.2$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0.8$$

فقرة ث : حدوث الحادث A وعدم حدوث B وهذا يعني أننا نتعامل مع القاعدة الأولى في النظرية الرابعة وهي :

$$P(A\bar{B})= P(A)- P(A\cap B) = 0.3- 0.2 = 0.1$$

يتبع ..

فقرة ج : حدوث الحادث B وعدم حدوث A وهذا يعني أننا نتعامل مع القاعدة الثانية في النظرية الرابعة وهي :

$$P(B\cup\bar{A})= P(B)- P(A\cap B) = 0.4- 0.2 = 0.2$$

فقرة ح : احتمال حدوث الحادثة A أو الحادثة B إذا كان A,B حادثين منفصلين هنا نعود للقانون الثاني في النظرية الثالثة الخاصة بالانفصال وهي

$$P(A\cup B)= P(A)+ P(B)$$

$$P(A\cup B)= 0.3+ 0.4$$

$$P(A\cup B)= 0.7$$

الاحتمال الشرطي :

أي أن حدوث الحادث A مشروطاً بحدوث الحادث B والعكس والقانون المستخدم هنا :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

حيث أن P(B) أكبر من صفر .

ولو كان حدوث B مشروطاً بحدوث A نعكس بالقانون كالتالي :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

مثال لتوضيح الصورة : رميت قطعة نقد ثلاث مرات فإذا رمزنا لظهور الصورة H وظهور الكتابة T فإذا علمت أن الوجه الأول H فما احتمال أن يكون الوجه الثاني HH ؟

هذا يسمى احتمال شرطي ولذلك نطبق القاعدة ولكن قبل ذلك نخرج القيم المطلوبة بالقاعدة . لنفرض أن A هي H ونفرض أن B هي HH . عشان نعوض بالقانون لازم نوجد قيمة $P(A\cap B)$ وهي A تقاطع B يعني A+B وتساوي (HHH) وهي نتيجة واحدة من أصل 8 نتائج وتكتب بالطريقة التالية :

$$P(A\cap B) = \frac{1}{8}$$

القسم الثاني من القانون يبقى نتيجة A ولو لاحضنا أن A ظهورها بين النتائج بحيث يكون الخانة الأولى هي H هي موجودة بالطريقة هذه في أربع نتائج من أصل 8 نتائج فراح يكون الناتج هو :

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

الحين نعوض بالقانون الشرطي

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

يتبع ..

قاعدة الضرب في الاحتمال الشرطي :

$$P(A\cap B) = P(B)P(A / B)$$

$$P(A\cap B) = P(A)P(D / B)$$

طبعا هذا قانون الضرب من خلال الاحتمال الشرطي مثال عشان نفهم القاعدتين :

إذا كان P(A)=0.6 و P(B)=0.3 وكان P(A / B)=0.4 أوجد :

- $P(A\cap B)$
- $P(B/A)$

من السؤال نشوف حط لنا القيمة الشرطية (p(A / B يعني هنا هو يتكلم عن قانون الضرب من خلال الاحتمال الشرطي ولذلك راح نتعامل مع القانون

$$P(A\cap B) = P(B)P(A / B)$$

$$P(A\cap B) = 0.3 \times 0.4$$

$$P(A\cap B) = 0.12$$

الفقرة الثانية من السؤال يطلب قيمة $P(B/A)$ وحنا قلنا بقانون الاحتمال الشرطي أن

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2$$

الحوادث المستقلة :

أي أن حدوث الحادث A لا يؤثر على الحادث B وكذلك العكس :

ومنها نحصل على قانون الحوادث المستقلة وهو

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

وراح يجيك بالسؤال إذا كان A,B حادثين مستقلين وكان P(A)=0.4 و P(B)=0.6 فأوجد :

- $P(A\cap B)$
- $P\overline{(A\cap B)}$

الطلب الأول بالسؤال بسيط نعوض في قانون الحوادث المستقلة مباشرة وهو

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A\cap B) = 0.4 \times 0.6$$

$$P(A\cap B) = 0.24$$

الطلب الثاني بالسؤال يطلب متممة $P(A\cap B)$ نعوض في قانون المتممة مباشرة وهو

$$P\overline{(A\cap B)} = 1 - P(A\cap B)$$

$$P\overline{(A\cap B)} = 1 - 0.24$$

$$P\overline{(A\cap B)} = 0.76$$

وكذا نكون انتهينا من قوانين الباب الأول في مبادئ الإحصاء

توزيعات احتمالية خاصة	المتغيرات العشوائية والتوزيعات المنفصلة
توزيع ذات الحدين	المتغيرات العشوائية
توزيع بواسون	التوزيع الاحتمالي المنفصل
خواص التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي الذي يتبع بواسون	التوقع الرياضي للمتغير العشوائي
	خواص التوقع الرياضي
	التباين للمتغير العشوائي
	خواص التباين

المتغيرات العشوائية :

اختصارا للوقت ... هنا لا يوجد قانون ولكن لو عدنا للمثال بالمحتوى ففيه شرح وافي لطريقة استخراج قيمة المتغير العشوائي من الجدول .

التوزيع الاحتمالي المنفصل :

حتى نعرف أن التوزيع الذي أمامنا توزيع احتمالي منفصل يجب أن يكون

$f(x) \geq 0$, X لجميع قيم

$\sum f(x) = 1$, X لجميع قيم

وفي السؤال راح يعطينا معادلة مثل

$$f(x) = \frac{x}{15}, x = 1, 2, 3, 4, 5$$

$f(x) = 0$ لغير ذلك

ويقولك هل تمثل المعادلة توزيع احتمالي منفصل :

عشان نحلها نسوي جدول ونعوض بـقيم X

x	1	2	3	4	5	المجموع
F(x)	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

لو جمعنا الكسور راح يطلع لنا الناتج 1 إذن المعادلة توزيع احتمالي منفصل

كمان ممكن يجيك سؤال ثاني ويعطيك القيم بالجدول ويخفي عنك مثلا قيمة 1 يضع مكانها a ويقولك أوجد قيمة a الحل بسيط اجمع الكسور واطرحها من 1 وبيطلع لك الناتج .

وأيضا يجيك يسألك أنه أوجد $P(x > 4)$ فلو شفت الجدول القيمة الأكبر من 4 هي قيمة الـ 5 يعني الجواب $\frac{5}{15}$

وأيضا يجيك يسألك أنه أوجد $P(x > 3)$ فلو شفت الجدول القيمة الأكبر من 3 هي قيمة الـ 4 والقيمة 5 يعني الجواب $\frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{3}{5}$

وأيضا يجيك يسألك أنه أوجد $P(x \leq 4)$ من الجدول تأخذ قيمة الـ 1 + 2 + 3 ومعاهم قيمة الـ 4 لأنه قال أصغر أو يساوي وتجمعهم وتطلع الناتج .

يتبع ..

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي :

التوقع الرياضي يرمز له بالرمز μ وهو ببساطه حتى نطلع قيمة التوقع الرياض ناخذ قيمة X ونظربها بقيمة F(X) ونجمع بعدها الناتج هذا هو التوقع الرياضي والقانون حقه :

$$\mu = E(x) = \sum x\, f(x)$$

فممكن يجيب لك القيم بالجدول مثل الجدول اللي حلينا قبل هذا وممكن يجب لك نفس السؤال الماضي وهو :

أوجد توقع X إذا كان :

$$f(x) = \frac{x}{15}, x = 1, 2, 3, 4, 5$$

$f(x) = 0$ لغير ذلك

تقدر تحلها مباشرة بالآلة الحاسبة بتصير بالشكل التالي تحط قيمة X تضربها بقيمة F(X) وتجمع باللي بعدها بالطريقة التالية

$$f(x) = 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15} = \frac{11}{3}$$

العملية سهلة بالآلة تطلع لك الناتج بسرعة

خواص التوقع الرياضي:

قانون خاصية التوقع الرياضي يقول إذا كان

$$E(ax + b) = aE(x) + b$$

فلو عطانا سؤال وقالنا إذا كان E(X)=6 فأوجد :

- E(3X+5)
- E(0.5X-2)
- ثم أوجد قيمة a في E(aX+5)=25 إذا كانت E(X)=10

الحل بالأول تعوض عادي

E(3× 6=+5)=23

الحل بالثاني نعوض عادي

$$E(0.5\times 6 - 2) = 1$$

أما الثالث يبي قيمة a هنا نطبق قانون خاصية التوقع الرياضي وهو

$$E(aX + 5) = 25$$

$$aE(x) + 5 = 25$$

$$a \times 10 + 5 = 25$$

$$10a = 25 - 5 = 20$$

$$10a = 20$$

نقسم على 10

$$a = 2$$

يتبع ..

تباين المتغير العشوائي:

تباين التوقع الرياضي يرمز له بالرمز σ^2 فإذا أردنا أن نعرف التباين الرياضي فعلينا التعامل مع القاعدة التالية :

$$\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 f(x)$$

سيطلب منك سؤال : أوجد تباين X إذا كان توزيعه الاحتمالي كما يلي ثم أوجد الانحراف المعياري ؟

X	F(X)
10	$\frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{4}$
30	$\frac{1}{4}$
40	$\frac{1}{4}$

لحل السؤال هذا نطبق بداية طريقة الحصول على التوقع الرياضي عبر القانون والناتج بالألة الحاسبة نطلعه

$$\mu = E(x) = \sum x\, f(x) = 10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} + 30 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} = 25$$

حصلنا على التوقع الرياضي وهو 25 الآن نعوض بقانون التباين الرياضي للحصول على التباين

$$\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 f(x) = (10-25)^2 \times \frac{1}{4} + (20-25)^2 \times \frac{1}{4} + (30-25)^2 \times \frac{1}{4} + (40-25)^2 \times \frac{1}{4} = 125$$

إذا تبيان التوقع الرياضي هو 125 وحسب السؤال أنه يريد الانحراف المعياري والانحراف المعياري هو عبارة عن جذر التباين أي $\sqrt{125}$

خواص التباين:

من خواص التباين بأننا نستطيع أن نوجد قيمة التباين للمتغير Y في حال كان X متغير منفصل معدله μ وتباينة σ_X^2 وكان لدينا التحول $Y = aX + b$.

كما أننا نستطيع إيجاد الانحراف المعياري للمتغير Y بالقانون التالي

$$\sigma_Y^2 = a^2 a_x^2$$

يعني لو جانا مثال إذا كان المتغير X , $\sigma_x^2 = 16$, $\mu_x = 50$ أوجد معدل Y وانحرافه المعياري إذا كان $Y = 3X - 4$

الحل :

لاحظ بالسؤال كل المعطيات اللي تكلمنا فيها بخواص التباين معطاه ما علينا غير نعوض بس لأيجاد تباين Y

$$\mu_y = E(3X-4) = 3\mu_x - 4 = 3 \times 50 - 4 = 146$$

بعد ما نعوض القيم بتطلع عندنا معادلة ممكن حلها بالآلة الحاسبة إذا الآن التوقع الرياضي للمتغير Y هو 146

طيب الآن مطلوب منا نطلع الانحراف المعياري نعوض أيضا بالقانون

$$\sigma_Y^2 = a^2 a_x^2$$

قيمة a بالمعادلة السابقة تساوي 3وهو يبي 3 تربيع فنعوض بـ 3 تربيع وقيمة التباين لأكس موجودة ومعطاه بالسؤال وهو 16 أجل نعوض تعويض مباشر

$$\sigma_Y^2 = 3^2 \times 16 = 9 \times 16 = 144$$

طيب تباين Y معروف أنه جذر الانحراف المعياري لـ Y والانحراف المعياري لـ Y = 144 يعني التباين يساوي (وبالآلة الحاسبة)

$$\sqrt{144} = 12$$

يتبع ..

توزيع ذات الحيدين وتسمى أيضا (محاولات بيرنوللي)

تعريف تجربة بيرنوللي هو :

إذا أجريت تجربة بيرنوللي وكان n من المرات واحتمال النجاح في المحاولة الواحدة p وكان xيمثل عدد النجاحات فنطبق القانون التالي .

$$nCx \times p^x \times (1-p)^{n-x}$$

شروطها :

كل تجربة مستقله عن الأخرى – وكل محاولة نسمي أحدها بالنجاح والأخرى بالفشل – واحتمال النجاح هو عدد ثابت نرمز له بـ P وأحتمال الفشل هو q=1-p

عشان تحل توزيع احتمالي ذو حدين لازم يتوفر عندك القيم التالية

$$b(x; n; p)$$

قيمة X بتكون موجود بالسؤال عندما يسألك عن عدد النجاحات .

قيمة n أيضا بتكون بالسؤال وهي عدد إجراء المرات .

قيمة P في حال لم يزودك أياها بالسؤال فمباشرة نتوقع قيمتها $\frac{1}{2}$

مثال : رميت قطعة نقد أربع مرات جد التوازن الاحتمالي لهذه التجربة ثم أوجد احتمال ظهور الصورة أربع مرات ؟

طيب هنا توفر هنا بالسؤال الشروط قيمة n وهي 4 وقيمة p وهي $\frac{1}{2}$ لأنه قلنا بأنه لو قيمة p غير موجودة يعني تساوي نصف نعوض الحين بالقانون :

$$nCx \times p^x \times (1-p)^{n-x}$$

$$4C4 \times (\frac{1}{2})^4 \times (1-\frac{1}{2})^{4-4}$$

المعادلة كاملة وحلها أسهل مما تتوقع بالآلة الحاسبة فقط ماعليك إلا تكتبها بالألة الحاسبة ويطلع لك الناتج مباشرة وعشان تكتبها بنفس الشكل اتبع الرموز اللي حطيتها لك بالأسفل بنفس الترتيب

4 SHIFT ÷ 4 × (⊟ 1 ▼ 2 ▶) $x^{■}$ 4 ▶ × (1 − ⊟ 1 ▼ 2 ▶) $x^{■}$ 4 − 4

ثم بعد ذلك تضغط = وراح تطلع معك النتيجة وهي

$$\frac{1}{16}$$

توزيع بواسون :

يعتمد توزيع بواسون على القانون التالي

$$p(x; \lambda) = p(x = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

لاحظ القانون مو طويل انت عليك تحفظ هذا $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ لأنه هو المطلوب لحل المعادلة أما البقية فهي تساعدك على تذكر القيم الموجودة بالأساس في في السؤال ☺

خلينا نطبق مثال :

تصل المكالمات الهاتفية إلى مقسم أحد المستشفيات بمعدل مكالمة واحدة كل دقيقتين ما احتمال ما يلي :

- **صفر مكاملة في أربع .**
- **4 مكالمات في أربع دقائق .**

طبعاً عشان نحل المعادلة لازم تكون عندنا قيمة X وقيمة λ وعشان نطلع قيمة لمدا (λ) عن طريق القانون التالي :

قيمة λ = معدل النجاحات × (أي مضروبة في) الفترة الزمنية أو المنطقة المحددة اللي هي قيمة e

يتبع ..

معدل النجاحات شلون نطلعه عندنا كل دقيقتين مكالمة يعني في المكالمة الواحد تستقبل نصف مكالمة هذا هو معدل النجاح الفترة الزمنية حسب الطلب في السؤال يبي هو في اربع دقائق كذا نعوض مباشرة ونحلها بالألة الحاسبة

$$\lambda = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

طلعنا قيمة لمدا الحين نحل الفقرة الأولى من السؤال :

قيمة أكس في القانون هي صفر وهي تعكس عدد النجاحات .

نعوض بالمعادلة

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2} \times 2^{0}}{0!} = 0.1353$$

طبعاً مو صعبة حسبتها لو كانت بالآلة الحاسبة وكيف تكتبها بالآلة الحاسبة أتبع الأزرار التالية وراح تطلع لك نفس المعادلة

وبعدها تضغط وراح يطلع لك نفس الناتج

طيب حلينا اللمدا وحلينا الطلب الأول من السؤال الطلب الثاني نفس الطلب الأول بس تعوض القيم الصحيحة

قيمة أكس راح تكون هنا 4 لأن يبي حساب احتمال 4 مكالمات في أربع دقائق إذا قيمة أكس 4 ولمدا 2

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2} \times 2^{4}}{4!} = 0.0902$$

خواص التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون :

طيب أي توقع رياضي يتبع بواسون يمكن معرفته مباشرة بمعرفة قيمة لمدا (λ)

فإن توقع X هو λ =E(X) وتباين X هو $\sigma_x^2 = \lambda$

نحل السؤال عشان توضح : ما هو التوقع الرياضي والانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون إذا كان $\lambda = 25$ ؟

عطانا قيمة لمدا إذا التوقع الرياضي هو 25 مباشرة وتكتب E(X)=25

الانحراف المعياري حنا قلنا سابقاً أن الانحراف المعياري هو جذر التباين وهنا قلنا أنه التباين هو قيمة لمدا يعني تباين = 25 والأنحراف المعياري هو جذر الـ 25

$$\sqrt{25} = 5$$

إذن الانحراف المعياري هو 5

وكذا نكون انتهينا من الباب الثاني

التوزيعات الاحتمالية المتصلة

- التوزيع الطبيعي المعياري
- توزيع (t)
- توزيع كاي تربيع
- توزيع (F)

التوزيع الطبيعي المعياري :

سأحاول هنا اتطرق مباشرة للقانون الذي يفترض بنا حفظه والتعامل معه ومن أراد الشرح بالتفصيل يمكنه مراجعة المحاضرة والمحتوى .

رمز التوزيع الطبيعي المعياري هو

$$\mathbf{Z: N(0,1)}$$

طبعاً بالسؤال أحيانا بيجك الرمز كذا $\mathbf{X: N(0,1)}$ أو يجبه لك محول جاهز فإذا كان محول جاهز هنا تكون قيمة Z موجوده لديك ويمكنك أستخراج التوزيع الطبيعي المعياري من الجدول الإحصائي مباشرة واللي راح يزوده لنا الدكتور مع الأسئلة أهم شي تعرف كيف تطلع القيمة .

لكن لو ما كان محول القيمة وأعطاك أياها بـ $\mathbf{X: N(0,1)}$ هنا لازم تحولها لقيم Z وعشان تحولها لازم تحفظ القانون وهو

$$\mathbf{Z = \frac{X - M}{\sigma}}$$

وشرح القانون هو :

قيمة M هي القيمة الأولى بداخل القوس $\mathbf{X: N(0,1)}$ وهي تساوي هنا 0

قيمة σ هي <u>جذر القيمة الثانية</u> بداخل القوس $\mathbf{X: N(0,1)}$ وهي تساوي هنا 1 يعني تطلع جذر العدد اللي راح يعطيك بالسؤال وتوعض مباشرة بالقانون .

أما قيمة X راح يزودك أياها بالسؤال .

لاحظ أن قيمة Z لازم تكون محصورة بين الصفر والواحد لذلك عند التحويل لو طلعت القيمة أكبر من الواحد لازم نحولها لقيمة أصغر عن طريق إيجاد قيمة Z من الجدول وطرحها من العدد 1.

قبل لا ناخذ مثال هذا الباب يعتمد على الجداول الإحصائية والتي راح يزودنا بها الدكتور في الأختبار عشان نعرف نطلع منها القيم اللي نبيها عشان كذا بذكر كذا مثال للأسئلة اللي ممكن تجينا :

المثال الأول يقول :

نفرض أن وزن العبوات =X , $X:N(85,2.5^2)$ المطلوب :

- **P (X > 90)**
- **P (x < 82)**

طيب لاحظ بالسؤال معطيك X يعني لازم نحولها إلى Z لكل الفقرتين بالسؤال وأيضا القانون قلنا بالمقام نحط جذر القيمة الثانية بالقوس لكن لو لاحظت أن القيمة الثانية حاط لها الدكتور أس 2 إذا القيمة ما يحتاج لها تحويل بس شيل الأس وحطها نفسها لو كانت بدون أس طلع لها الجذر مثل ما شرحنا القانون الحين نعوض للقانون بالقانون التالي :

$$\mathbf{P(x > 90) = Z = \frac{X - M}{\sigma} = \frac{90 - 85}{2.5} = 2}$$

أذن هنا نجد أن Z تساوي

$$\mathbf{P(Z > 2)}$$

ولأننا قلنا القيمة لازم تكون محصورة بين الصفر والواحد نحول قيمة Z إلى قيمة أصغر من 2 عن طريق طرحها من 1 وعشان نحل المعادلة نوجد قيمة Z المقابلة لقيمة 2 من الجداول الإحصائية .... كيف !!

لاحظ أن القيمة 2 مافي رقم بعدها ولا رقم قبلها يعني لو تخيلنا اللي بعدها أكيد بتكون 2.00 لأنه القيمة أثنين فبعد الفاصلة بتكون طبيعي أنها أصفار

انا أقول كذا لأننا راح نقسم الناتج هذا إلى عددين هما 2.0 والعدد الثاني 0.00 عشان نقدر نطلع القيمة من الجدول عشان اختصر الجدول لأنه طويل بطلع القيم اللي تخص مسألتنا وهي

جدول التوزيع الطبيعي المعياري Z :

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

القيمة ما قبل الفاصلة وما بعدها برقم تكون إلى يسار الجدول وهي القيمة 2.0

القيمة ما بعد الرقم الأول الذي بعد الفاصلة تكون فوق الجدول اللي هي 0.00

والرقم الذي يقع تحت هذا وذاك هو قيمة Z من الجدول وتساوي 0.9773

الحين نوجد قيمة Z لما تكون أصغر من 2

$$\mathbf{P(x > 90) = P(Z > 2) = 1 - P(z < 2)}$$
$$\mathbf{= 1 - 0.9773}$$
$$\mathbf{= 0.0227}$$

وهي قيمة حتما أصغر من 1

لاحظ المطلوب الثاني في السؤال لو حولناه من X إلى Z

$$\mathbf{P(x < 82) = Z = \frac{X - M}{\sigma} = \frac{82 - 85}{2.5} = -1.2}$$

هنا الناتج طلع لنا قيمة أصغر من الواحد وبالسالب .. أجل ما راح نحتاج هنا لعملية إيجاد قيمة Z أصغر من واحد هنا راح نعوض مباشرة من الجدول لكن الناتج بالسالب وهنا لازم تعرف انه فيه جدول خاص بالناتج الموجب وجدول خاص بالناتج السالب ... وراح يزودنا بها أيضا الدكتور لذالك نشوف صورة الجدول بالسالب وقبلها نشوف الرقم كيف راح نقسمه إلى رقمين لما يقولك 1.2 بالتأكيد هي 1.20 فالرقمين هما :

-1.2 هذا بالجهة اليسرى من الجدول ... والرقم 0.00

Table Z: Areas under the standard normal curve (negative Z)

Second decimal place in z

0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00	z
0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0808	-1.4
0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0968	-1.3
0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151	-1.2
0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357	-1.1
0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587	-1.0

طبعاً ما يضر لو كان الجدول القائمة الأساسية يمين أو شمال يعتمد على حسب الجدول عربي أو انجليزي

هنا قيمة Z = 0.1151

في الأسئلة ممكن يريحك من هذا كله " ويااليت يسوي كذا الدكتور ☺ " يعطيك قيمة Z جاهزة فيقولك أوجد مثلا Z=3.48 بنفس الطريقة نقسم الرقم إلى أثنين الأول هو 3.4 والثاني راح يكون خذينا الـ 3 فبنحط بدلها صفر وخذنا الـ 4 فبنحط بدلها صفر أجل راح يكون 0.08 ونروح نشوفها بالجدول تحت الرقمين :

Table Z: Areas under the standard normal curve (positive Z)

Second decimal place in z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

فيه سؤال ممكن يجيبة له أوجد قيمة Z في :

$$P(-1.23 < Z < -0.68\,)$$

عشان أطلع مساحة Z المحصورة بين القيمتين لاحظ أن القيم بالسالب .. وقيمة 0.68- هي أكبر من 1.23- لأن السالب كلما الزيادة في القيمة يعني صغرها .

هنا لازم نطبق قاعدة وهي طرح القيمة الأكبر من القيمة الأصغر لذلك المعادلة راح تكون

$$P(Z < -0.68) - P(Z < -1.23\,)$$

نطلع القيم لـ Z من الجدول وبنفس الطريقة نقسم الرقمين ونطلعهم من الجدول راح يطلعوا

$$P(Z < -0.68) - P(Z < -1.23\,)$$

$$= 0.2483 - 0.0934$$

$$= 0.1549$$

ملاحظة احتمال وحسب كلام الدكتور بالمحاضرات بأنه يجب لك قيمة الـ Z فما يحتاج كذا تطلعها من الجدول .

توزيع (t) :

رمز التوزيع (t) هو

$$t\,[\,\lambda\,;\,\nu\,]$$

وأيضا عندما تكون قيمة λ صغيرة مثل 0.05 أو 0.01 نستعمل القاعدة التالية عشان نوجد قيمة t

$$t\,[1 - \lambda\,;\,\nu\,]$$

مافي داعي تحفظ القانون حقه أحفظ الرمز هذا يغنيك عن القانون لأن السؤال راح يجيك في الغالب بالشكل التالي :

مثال : المتغير العشوائي t يتبع التوزيع t بدرجات حرية 4 , أوجد :

- **المساحة الواقعة على يسار 1.532 ؟**
- **ماهي قيمة t التي يقع على يسارها 0.01 ؟**
- **قيمة λ بحيث** $t\,[\,\lambda\,;\,4\,] = -2.776$

الحل

انت لازم تكون حافظ رمز التوزيع ونعوض القيم فيها مباشرة طبعا من الفقرة الأولى بالسؤال نعرف أن قيمة t تساوي 1.532 فنقول :

$$t\,[\,\lambda\,;\,4\,] = 1.532$$

الأن نبي نوجد قيمة λ لذلك من الجدول الخاص بالتوزيع t احنا بحاجة أن نوجد المساحة اللي على يسار t لاحظ هنا القائمة اللي على اليمين بالجدول راح تختار الرقم 4 وهو يبي القائمة العلوية فكيف تطلعها من قيمة t قيمة t تساوي 1.532 بالجدول ابحث في الأرقام المقابلة للرقم 4 بتلاقي الرقم 1.533 مو مشكلة إذا وجد فرق في الرقم الأخير عن قيمة t لانه ما بتلاقي قيمة t بالجدول نفسها لذلك هذي أقرب قيمة لها بعدها تشوف الرقم بالجدول فوق المقابل للقيمة 1.533راح تلاقيها 0.90 هذي هي قيمة λ .

الفقرة الثانية يبي قيمة t التي على يسارها 0.01 هو معطيك اليمين معناته عشان نطلع القيمة اللي على اليسار نطرح من الرقم 1 بالطريقة التالية :

$$t\,[\,0.01\,;\,4\,] = -t[1 - 0.01; 4]$$

$$= -t[0.99; 4]$$

الأن نشوف القيمة من الجدول اللي محصورة بين 0.99 من القائمة العلوية وبين الرقم 4 من القائمة الجنبية فنجدها

$$= -3.747$$

توزيع (كاي) :

رمز التوزيع (كاي) هو

$$x^2\,[\,\lambda\,;\,\nu\,]$$

مثال : إذا كان المتغير x^2 **يخضع لتوزيع كاي بدرجة حرية ν=15 أوجد :**

1- **قيمة** x^2 **التي تقع 0.99 من المساحة على يسارها ؟**
2- **قيمة** x^2 **التي تقع 0.01 من المساحة على يمينها ؟**

الحل عندي درجة الحرية وعندي درجة لمدا من المعطيات بالسؤال نحل الفقرة الأولى :

$$x^2\ [\,0.99\ ;\ 15\,]$$

الآن عشان نطلع قيمة x^2 من الجدول الخاص بتوزيع كاي والمحصورة بين 15 من القائمة اليمنى والقائمة العلوية 0.99 وبالتالي راح تكون 30.578 هذه هي قيمة x^2

الفقرة الثانية يبي قيمة x^2 اللي تقع 0.01 من المساحة على يمينها . في قانون كاي نلاحظ أن المساحة على اليمين هي متممة للمساحة اللي على اليسار لذلك قيمة x^2 ستكون نفسها 30.578

توزيع (F) :

رمز التوزيع (F) هو :

$$F\,[\,\lambda\ ;\ \nu_1 ; \nu_2\,]$$

وأيضا عندما تكون قيمة λ صغيرة مثل 0.05 أو 0.01 نستعمل القاعدة التالية عشان نوجد قيمة t

$$F\,(\,\lambda\ ;\ \nu_1 ; \nu_2\,) = \frac{1}{F\,(1 - \lambda\ ;\ \nu_1 ; \nu_2\,)}$$

رمز التوزيع فوق :

يحدد لك λ من أي جدول راح تأخذ القيم لأنه فيه توزيع *F* فيه عدة جداول وستكون محددة من قبل الدكتور .

يحدد لك ν_1 القيمة العلوية للجدول

يحدد لك ν_2 القيمة الجانبية للجدول

ناخذ مثال لو طلب منك أوجد مايلي :

- F(0.95;9,7)

لاحظ لمدا هي 0.95 يعني نروح لجدول التوزيع (F) الخاص بقيم 0.95 وبعدها نطلع القيمة المحصورة بين نقطة 7 ونقطة 9 راح تكون هذي هي قيمة F وتساوي 3.68

Den. df	A	Numerator df 1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	.50	0.506	0.767	0.871	0.926	0.960	0.983	1.00	1.01	1.02
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.995	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
	.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3

لاحظ انا اخذت القيمة من مقابل 0.95 اللي هي قيمة لمدا لو قيمة لمدا غير يعني مثلا 0.99 الناتج يتغير إلى 6.72

أحيانا يجب الدكتور جدول يطلب مثلا قيمة F المحصورة بين 7 و 9 لكن بالجدول تلاقي بدل 9 فيه بس 8 و 10 تأخذ قيمة القيمة تحت 8 ونجمعها مع القيمة تحت 10 ونقسمهم على 2 تطلع لنا القيمة تحت 9 .

مثال ثاني لو طلب منك أوجد مايلي :

- F(0.01;10,7)

لاحظ قيمة لمدا صغيرة ولا يوجد لها جدول فإذا جانا سؤال كذا نطبق القانون

$$F\,(\,\lambda\ ;\ \nu_1 ; \nu_2\,) = \frac{1}{F\,(\,\lambda\ ;\ \nu_1 ; \nu_2\,)} = \frac{1}{F\,(\,1 - 0.01 ; 10, 7\,)} = \frac{1}{F\,(0.99\ ;\ 10 ; 7\,)} = \frac{1}{6.62}$$

والقيمة طلعناها من الجدول للتوزيع *F* الخاص بـ 0.99

كذا نكون انتهينا من الباب الثالث