تعريف الإحتمالات :

يمكن تعريف الاحتمالات بطرق عديدة غير أن أبسطها

"هو مقياس لامكانية وقوع حدث (Event) معين"

وتستعمل كلمة احتمالات بشكل دائم في حياتنا اليومية مثل:

- احتمال أن ينجح الطالب في مقرر دراسي.
- احتمال نزول المطر اليوم

وفي أحيان أخرى تستخدم كلمة احتمالات ككلمة مرادفة لبعض الكلمات الأخرى مثل: ممكن، غالبا، مؤكد، مستحيل ... وقد ارتبط المفهوم التقليدي للاحتمال بألعاب الحظ لمدة طويلة، وتختلف درجة إمكانية تحقق أي حادثة من شخص إلى آخر حسب خبرته والمعلومات المتوفرة لديه عن الحادثة. وقد تطور علم الاحتمالات تطورا كبيرا وسريعا وأصبح أساسا لعلم الإحصاء وبحوث العمليات وغيرها .

١) التجربة العشوائية Random Experiment :

هي تلك التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج بصفة مؤكدة مثلا:

- رمي حجر نرد مرة واحدة يعتبر تجربة عشوائية، حيث نعلم جميع قيم نتائج التجربة وهي إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.
- المشاركة في سباق الخيل لحصان معين يعتبر تجربة عشوائية فهو إما أن يفوز أو يخسر أو يتعادل.
- رمي عملة معدنية مرة واحدة أو عدد من المرات يعتبر تجربة عشوائية معروف جميع نتائجها قبل أن تبدأ التجربة، ولكن لا يمكن الجزم بظهور أي منها في رمية معينة.

٢) الحادث والفراغ العيني :

✓ فراغ العينة :

هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز Ω ويطلق علية الحالات الممكنة .

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي ١ أو ٣ أو ٥ من التجربة . وهكذا فإن عملية رمي الزهرة تسمى تجربة (Experiment) وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى حادثاً (Event) ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى بالفراغ العيني (Sample Space) ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة او اكثر من الفراغ العيني .

✓ الحادثة :

هي مجموعة جزئية من فراغ العينة وتمثل مجموعة النتائج التي تحقق الحدث وتسمى أيضا الحالات المواتية Favorable Cases ، فمثلا الحصول على رقم زوجي في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة تكون الحادثة هي {٢ ، ٤ ، ٦} ، ويمكن أن تحتوي الحادثة على عنصر واحد أو أكثر.

خلاصة التعريفات السابقة بمثال التالي :

الحصان في سبق الخيل	تجربة عشوائية
احتمال (يكسب ،يخسر، يتعادل)	فراغ العينة
ما هو احتمال أن يفوز؟	حدث
ما هو احتمال ان يخسر ؟	حدث
ما هو احتمال ان يتعادل؟	حدث

٣- أنواع الحوادث :

أ. الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events)

يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا. فمثلاً عند رمي عملة معدنية لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

ب. الحوادث المستقلة (Independent Events)

يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

ج. الحوادث الشاملة (Exhaustive Events)

تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة.

فمثلاً عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مدخنا أو غير مدخن تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لأنه لابد للفرد أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات. كذلك فإن الحصول على العدد ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة لأنه لابد من حدوث إحداها.

مثال :

رمي حجر نرد مرد واحدة ، أحسب التالي:

- احتمال الحصول على رقم ٥
- احتمال الحصول على رقم زوجي
- احتمال الحصول على رقم أكبر من ٢
- احتمال الحصول على رقم أقل من ٧
- احتمال الحصول على رقم ٧

الحل :

فراغ العينة لهذه التجربة هو : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فيكون بالتالي الحل كما يلي:

$P(A=5)=\frac{1}{6}$

$P(A=2,4,6)=\frac{3}{6}$

$P(A>2)=\frac{4}{6}$

$P(A<7)=\frac{6}{6}=1$

$P(A=7)=\frac{0}{6}=0$

ويستنتج من ذلك أن أقل قيمة للاحتمال تساوي الصفر ويقال أن الحدث في هذه الحالة (حدث مستحيل) بينما تساوي واحد إذا كان الحدث مؤكد.

مثال :

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الدي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزبا
- أن يكون متزوجا
- أن يكون من القسم الأول
- أن يكون من القسم الأول أو الثاني
- أن يكون من القسم الأول وأعزب

الحل :

نفرض أن الحادثة A أن يكون العامل أعزب أي A= {أن يكون العامل أعزب} فيكون الاحتمال المطلوب :

$$P(A) = \frac{\text{عدد العمال العزاب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = \frac{23}{50} = 0.46$$

نفرض أن الحادثة B أن يكون العامل متزوج أي أن B = {أن يكون العامل متزوج} فيكون الإحتمال المطلوب :

$$P(B) = \frac{\text{عدد العمال المتزوجين}}{\text{عدد العمال الكلي}} = \frac{27}{50} = 0.54$$

نفرض أن الحادثة C أن يكون العامل من القسم الأول أي أن C = { أن يكون العامل من القسم الأول } فيكون الإحتمال المطلوب :

$$P(C) = \frac{\text{عدد عمال قسم الأول}}{\text{عدد العمال الكلي}} = \frac{12}{50} = 0.24$$

نتفرض ان الحادثة D ان يكون العامل القسم الاول او الثاني D أي = { ان يكون العامل من القسم الاول او الثاني }
فيكون الاحتمال المطلوب :

$$P(D) = \frac{\text{عدد عمال قسم الثاني او الاول}}{\text{عدد العمال الكلي}} = \frac{12+22}{50} = \frac{34}{50} 0.68$$

نفترض ان الحادثة E ان يكون العامل من القسم الاول و أعزب أي ان E = { أن يكون العامل من القسم الاول و أعزب }
فيكون الاحتمال المطلوب :

$$P(E) = \frac{\text{عدد عمال قسم الأول وأعزب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = \frac{5}{50} = 0.1$$

○ جمع الاحتمالات :

أ- في حالة كون الحوادث متنافية

إذا كانت الحوادث A1 , A2 , A3 .... حوادث متنافية بمعنى أن حدوث أحدها يؤدي إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معاً يكون معدوماً فإن احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث .

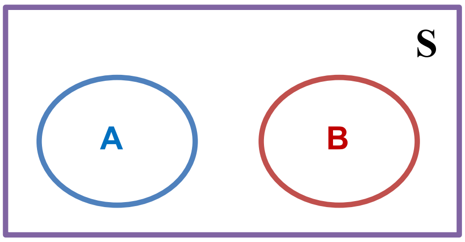
فإذا كان B ، A حادثين متنافيين كما في الشكل (١)

فإن P (A أو B) = P(A) + P(B)

يرمز أيضاً لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز

حوادث متنافية

P (AUB) = P (A) + P (B)



حوادث متنافية

- في حالة الحوادث المتنافية : نستخدم الجمع بين الحوادث.
- أو = +

☒ **مثال:**

رمي حجر نرد مرة واحدة ، احسب:

- احتمال الحصول على رقم ٥ أو ٦
- احتمال الحصول على رقم زوجي

الحل:

حيث أن الحصول على رقم ٥ أو ٦ حادثتان متنافيتان ، أي أن:

A1={الحصول على الرقم ٥} ، و A2= {الحصول على الرقم ٦} فإن:

P(A1 ᴜ A2)=(1/6)+(1/6)=1/3

وحيث أن الحصول على رقم زوجي يعني الحصول على رقم ٢ أو رقم ٤ أو رقم ٦ وكلها حوادث متنافي، أي أن:

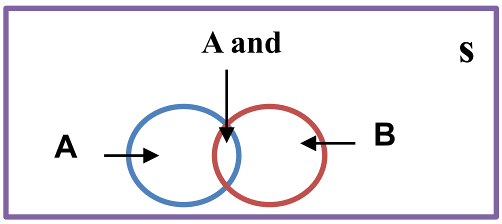
A1= {الحصول على الرقم ٢} ، و A2= {الحصول على الرقم ٤} ، و A3= {الحصول على الرقم ٦} فإن:

P(A1 ᴜ A2 ᴜ A3)=(1/6)+(1/6) +(1/6) = 1/2

ب- في حالة كون الحوادث غير متنافية :

عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحادث (A أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد كما يتضح من الشكل التالي

حوادث غير متنافية



الآن P (A) + P (B) تمثل مجموع الحالات المواتية للحادث A مضافاً إليها مجموع الحالات المواتية للحادث B ولكن يجب ملاحظة أن كل من الحالات المواتية للحادث A وتلك المواتية للحادث B تتضمن الحالات المواتية لوقوع A و B معاً ، وبهذا فإنه في حالة جمع P (A) و P (B) فإننا نجمع P (A و B) مرتين ، لهذا لابد من طرح P (A و B) مرة واحدة لنحصل على الاحتمال P (A أو B) وهذا هو :

$$P(A \text{ او } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$$

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- في حالة الحوادث الغير متنافية : نستخدم الجمع بين الحوادث ثم طرح التقاطع في ما بينها

☒ **مثال:**

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني. .... حادثه متنافية جمع الحوادث
- احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول .... حادثه غير متنافية جمع الحوادث – تقاطعهم
- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب .... حادثه غير متنافية جمع الحوادث – تقاطعهم

الحل :

نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الثاني أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الثاني}

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1)=12/50$

$P(A2)=22/50$

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2) = (12/50)+(22/50) = 34/50 = 0.68$

نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل متزوجا أي أن A1 = {أن يكون العامل متزوج}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1)=27/50$

$P(A2)=12/50$

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (27/50)+(12/50)-(7/50) = 32/50 = 0.64$

نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الثالث أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل أعزب أي أن A2 = {أن يكون العامل أعزب}

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1)=16/50$

$P(A2)=23/50$

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (16/50)+(23/50)-(10/50) = 29/50= 0.58$

الاحتـمال الشرطي Conditional Probability

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان P(A2) لا يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطى بالمعادلة التالية:

$$P(A1|A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

تقاطع الشرطين تقسيم (على) الشرط الثاني

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ A1 , A2 على احتمال الحادث A2.

مثال:

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل :

نفرض أن A1={ نجاح الطالب في مقرر الإحصاء }

A2= { نجاح الطالب في مقرر الرياضيات }

وبذلك يكون:

$P(A2)=0.64$

$P(A1 \cap A2)=0.32$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب $P(A1|A2)$ وبتطبيق العلاقة :

$$P(A1|A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟
- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟

الحل :

نفرض أن A_1= {أن يكون العامل من القسم الأول}

A_2= {أن يكون العامل متزوج}

B_3 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

B_4= {أن يكون العامل أعزب}

فيكون بالتالي:

١- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج}}{\text{احتمال أن يكون متزوج}}$$

$$P(A1 | A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}$$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو **0.259**

٢- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث}}{\text{احتمال أن يكون من القسم الثالث}}$$

$$P(B1 | B2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16}$$

إذا احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو **0.625**

ضـــرب الاحتــمالات

إن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث ببعضها بعضاً .

فمثلا إذا كان لدينا صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٦ بيضاء و ٤ سوداء وسحبنا كرة من الصندوق فإن احتمال أن تكون بيضاء 6/10 واحتمال أن تكون سوداء 4/10، فإذا أعدنا الكرة إلى الصندوق (ليصبح العدد مكتملا كما كان) وسحبنا الكرة مرة أخرى فإن احتمال أن تكون بيضاء 6/10 واحتمال أن تكون سوداء 4/10 ، فتكرار العملية يؤدي إلى نفس الاحتمال.

ومن هذا نرى أن نتيجة السحب الأول لا تؤثر على نتيجة السحب الثاني وهذا ما يسمى سحب بإرجاع أو إحلال أو إعادة.

فإذا كان لدينا الحادثين المستقلين A1 و A2 فإن احتمال حدوثهما معا هو:

$$P(A1 \cap A2) = P(A1)\ P(A2)$$

بمعنى أن احتمال وقوع حدثين مستقلين معا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع أي منهما بمفرده في احتمال وقوع الحدث الآخر بمفرده وفي حالة التعميم لـ n فإن :

$$P(A1 \cap A2 \cap A3 \cap \ldots\ldots\ An)\ P(A1)\ P(A2)\ P(A3) \ldots\ldots\ P(An)$$

مثال: إذا رمينا قطعة نقود مرتان ، احسب الاحتمالات التالية:

- أن تكون الأولى صورة والثانية كتابة.
- أن تكون كلتاهما صورة.

الخلاصة / في حالة الحوادث المستقلة يتم ضرب الحوادث

الحل: نفرض أن: A_1= {ظهور صورة في الرمية الأولى}

A_2= {ظهور كتابة في الرمية الثانية}

فيكون :

$$P(A_1) = \frac{1}{2}\quad , P(A_2) = \frac{1}{2}$$

حيث أن الحادثتان A1 و A2 مستقلتين فإن احتمال أن تكون الرمية الأولى صورة والثانية كتابة هو :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times (P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

نفرض أن: B1={ظهور صورة في الرمية الأولى}

B2={ظهور صورة في الرمية الثانية}

فيكون :

$$P(B_1) = \frac{1}{2}\quad , P(B_2) = \frac{1}{2}$$

وحيث أن الحادثتان B1 و B2 مستقلتين فإن احتمال أن تكون الرمية الأولى صورة والثانية صورة هو :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times (P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مما سبق يمكن القول أن الحوادث المعطاة تكون مستقلة عندما تبقى الاحتمالات ثابتة مثل الحوادث:

١- رمي قطع نقود (أو قطعة واحدة عدة مرات)

٢- رمي أحجار نرد (أو حجر نرد عدة مرات)

٣- السحب مع الإرجاع (أو الإعادة)

مثال :

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به فإذا سحب عاملان من المصنع مع الإرجاع (أي إرجاع العامل الأول قبل سحب العامل الثاني) احسب :

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عاملان من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول؟
- احتمال أن يكون العاملان متزوجان؟
- احتمال أن يكون للعاملين نفس الحالة الاجتماعية؟
- احتمال أن يكون العاملان من القسم نفسه؟

الحل:

١- احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول يعني أن يكون العامل الأول من القسم الأول (الحادثة A1) والعامل الثاني من القسم الأول (الحادثة A2) وحيث أنهما مستقلان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times (P(A_2) = \frac{12}{50} \times \frac{12}{50} = \frac{144}{2500} = 0.0576$$

٢- احتمال أن يكون العاملان متزوجان ، يعني أن يكون العامل الأول متزوج (الحادثة B1) والعامل الثاني متزوج (الحادثة B2) وحيث أنهما مستقلان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times (P(B_2) = \frac{27}{50} \times \frac{27}{50} = \frac{729}{2500} = 0.2916$$

٣- احتمال أن يكون للعاملين نفس الحالة الاجتماعية يعني أن يكون العاملان كلاهما متزوجين (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما أعزبين (الحادثة B) فإن:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + (P(B) \\ &= P(A_1 A_2) + P(B_1 B_2) \\ &= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2) \\ &= \left[\frac{27}{50} \times \frac{27}{50}\right] + \left[\frac{23}{50} \times \frac{23}{50}\right] = 0.5032 \end{aligned}$$

٤- احتمال أن يكون العاملان من القسم نفسه يعني أن يكون العاملان كلاهما من القسم الأول (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما من القسم الثاني (الحادثة B) أو أن يكون كلاهما من القسم الثالث (الحادثة C) فإن:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + (P(B) + (P(C) \\ &= P(A_1 A_2) + P(B_1 B_2) + P(C_1 C_2) \\ &= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2) + P(C_1 \times C_2) \\ &= \left[\frac{12}{50} \times \frac{12}{50}\right] + \left[\frac{22}{50} \times \frac{22}{50}\right] + \left[\frac{16}{50} \times \frac{16}{50}\right] = 0.3536 \end{aligned}$$

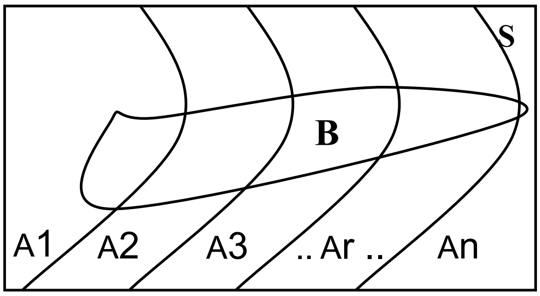
○ نظريـــة بايـز (Bayes' Theorem)

إذا كانت A1, A2, ... An مجموعة أحداث متنافية وكانت احتمالات حدوثها

P(A1), P(A2), ... P(An) وإذا كان هناك حدث B يحدث إذا حدث أي من الأحداث المتنافية أنظر الشكل بالأسفل ، فإن احتمال حدوث الحدث Ar بشرط حدوث B هو :

$$P(A_r|B)=\frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)} \qquad 1\le r\le n$$

المهم فهم طريقة الحل / ولا يهم حفظ القانون بهذه الحالة .. كما في حل المثال التالي



☒ مثال:-

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٢٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٣٥% والثالثة بنسبة ٤٥% ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٢% و ٢.٥% و ٣% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟

٢- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل: نفرض أن

A1={إنتاج الآلة الأولى} P(A1)=0.20

A2={إنتاج الآلة الثانية} P(A2)=0.35

A3={إنتاج الآلة الثالثة} P(A3)=0.45

B= {إنتاج سلعة معينة}

فيكون بالتالي:

P(B | A1)=0.020

P(B | A2)=0.025

P(B | A3)=0.030

تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times0.02}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times 0.025}{(0.2\times 0.02)+(0.35\times 0.025)+(0.45\times 0.03)}=0.333$$

مثال:-

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هذه الأقسام هي ٣٠% ، ٤٠% ، ٢٠% ، ١٠% على التوالي، إذا كانت نسب العمال المدخنين بهذه الأقسام هي ١٥% ، ١٨% ، ١٢% ، ٩% على التوالي، اختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن يكون العامل من القسم الأول؟

٢- أن يكون العامل من القسم الثاني؟

٣- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

A_1={أن يكون العامل من القسم الأول} $P(B|A1)=0.15$ $P(A1)=0.3$

A_2={أن يكون العامل من القسم الثاني} $P(B|A2)=0.18$ $P(A2)=0.4$

A_3={أن يكون العامل من القسم الثالث} $P(B|A3)=0.12$ $P(A3)=0.2$

A_4={أن يكون العامل من القسم الرابع} $P(B|A4)=0.09$ $P(A4)=0.1$

احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times 0.15}{(0.3\times 0.15)+(0.4\times 0.18)+(0.2\times 0.12)+(0.1\times 0.09)}=0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.4\times 0.18}{(0.3\times 0.15)+(0.4\times 0.18)+(0.2\times 0.12)+(0.1\times 0.09)}=0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B)=1-0.3=0.7$$

الخلاصة لحل التمارين بدون حفظ القوانين .. مجرد فهم تطبيق القانون :

١- **جمع الاحتمالات** / حرف (أو) = + حوادث متنافيه (اي انعدام حدوثها مع بعضها) يتم الجمع بين الحوادث
حوادث غير متنافية (تقاطعها بنقطة معينه) (يتم جمعها ثم طرح التقاطع بينها)

٢- **ضرب الإحتمالات** / حرف (و) = × حوادث مستقلة (اي امكانية حدوث احدهما بدون ما تأثر على الأخرى) يتم ضرب الحوادث.

٣- **احتمال شرطي** / (لا يتحقق الحدث الاول الا بشرط تحقق الحدث الثاني) ياخذ تقاطع الحدثين ثم يقسم على الحدث الثاني

٤- **نظرية بايز** / يضرب كل حدث بالأحتمال الخاص فيه .. ثم يتم اخذ الحدث المطلوب ويقسم على / جميع الاحداث الأخرى مضروبه بإحتمالاتها بما فيهم الحدث المطلوب . والجمع بينها

** تمارين واجب **

١- عرف المصطلحات التالية :-
(التجربة العشوائية – فراغ العينة – الحادث – الحوادث المتنافية – الحوادث المستقلة – الحوادث الشاملة) .

٢- الجدول التالي يمثل توزيع موظفي أحد الشركات حسب الحالة الاجتماعية للموظف والمستوى الاداري الذي يعمل به

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
مستوى الإدارة الدنيا	١٠	١٤	٢٤
مستوى الإدارة المتوسطه	١٦	٢٨	٤٤
مستوى الإدارة العليا	٢٠	١٢	٣٢
المجموع	٤٦	٥٤	١٠٠

أولاً :-اختر موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزبا.
- أن يكون متزوجا .
- أن يكون من مستوى الادارة الدنيا.
- أن يكون من مستوى الادارة الدنيا أو المتوسطة .
- أن يكون من مستوى الادارة الدنيا وأعزب .

ثانياً : اختير موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال أن يكون موظفي الادارة الدنيا بشرط أنه متزوج؟
- احتمال أن يكون الموظف أعزب بشرط أنه من موظفي الادارة العليا ؟

ثالثاً : تم اختيار ٢ موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون الموظفين من الادارة الدنيا ؟
- احتمال أن يكون الموظفين متزوجان؟
- احتمال أن يكون للموظفين نفس الحالة الاجتماعية؟
- احتمال أن يكون الموظفين من القسم نفسه؟

٣- مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٤٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٢٥% والباقي من إنتاج الالة الثالثة، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٤% و ٣% و ٥.٥% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها جيدة ، احسب الاحتمالات التالية:

- أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الأولى؟
- أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الثانية؟