المحاضرة السابعة

الجزء الاول

مجال الدالة:

مجال الدالة:

تعريف: مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون عندها قاعدة الدالة معرفة. وكثيرات الحدود مجالها R

عند البحث عن مجال الدالة لابد من الانتباه للأمور الآتية:

أ- أن لا يكون المقسوم عليه صفراً .

ب- أن لا يكون هناك مقدار سالب تحت جذر دليله زوجي.

ج- أن لا يكون مقدار اخذ لوغاريتمه مقداراً سالباً.

د- النقاط الفاصلة للدوال المعرفة وفق أكثر من قاعدة.

ه- الشروط الإضافية الموضوعة على قاعدة الدالة.

تابع: مجال الدالة:

أمثلة:

أوجد مجال الدوال التالية :

$$1)\quad f(x) = 3x^2 + 5x - 7$$

الحل:

الدالة معرفة لجميع قيم x اذاً المجال هو R.

تابع: مجال الدالة:

$$2)\quad f(x) = \sqrt{x+4}$$

الحل:

يجب أن يكون المقدار $x+4\geq 0$ وذلك لوجود الجذر التربيعي
أي $x\geq -4$ اذاً المجال هو الفترة $[-4,\infty)$.

تابع: مجال الدالة:

$$3)\quad f(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

الحل:

المجال R لان دليل الجذر فردي.

تابع: مجال الدالة:

$$4)\quad f(x) = \sqrt{x^2+4}$$

الحل:

لوجود الجذر التربيعي يجب أن يكون $x^2+4\geq 0$ وهذا صحيح لجميع قيم x اذاً المجال هو R.

تابع: مجال الدالة:

$$5)\quad f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$$

الحل:

يجب أن لا يكون المقام صفراً ، ويكون x-2=0 عندما x=2،
اذاً المجال هو R ما عدا 2 .

تابع: مجال الدالة :

$$6)\quad f(x)=\begin{cases}3x+2 & , x>1\\ 7x-6 & , x<1\end{cases}$$

الحل:

الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة ولكنها غير معرفة عند x=1،
اذاً المجال هو R-{1} .

تابع: مجال الدالة :

$$7)\quad f(x)=\begin{cases} x+7 & ,1<x\le 4 \\ 3x-5 & ,\ 4<x\le 8 \end{cases}$$

الحل:

الدالة معرفة بقاعدتين وهناك قيدا بان 1<x≤8 اذاً المجال هو الفترة [1,8)

تابع: مجال الدالة :

$$8)\quad f(x)=\log(2x+4)$$

الحل:

بسبب وجود اللوغاريتم يجب أن يكون 2x+4>0، أي x>-2 ، اذاً المجال هو الفترة (-2,∞)

تابع: مجال الدالة :

$$9) \quad f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x}$$

الحل:

يوجد جذران ، في الأول يجب ان يكون x+4≥0 أي x≥-4 وفي الثاني يجب أن يكون 3-x≥0 أي 3≥x ، اذاً المجال هو الفترة التي تحقق الشرطين معاً، أي المجال هو الفترة [-4,3]

تمارين:

أوجد مجالات الدوال التالية:

1. $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

2. $f(x) = \log(3x + 7)$

3. $f(x) = \dfrac{2x+8}{x+4}$

4. $f(x) = \sqrt{x+1}$

تابع : تمارين:

6. $f(x) = \dfrac{3x+8}{x^3-1}$

7. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , 0 \le x < 1 \\ 2x - 1 & , 1 \le x \le 2 \end{cases}$

المحاضرة السابعة
الجزء الثاني

رسم الدوال:

رسم الدوال:

الخطوات:

١. نقوم بإنشاء جدول بقيم x وقيم y المناظرة لها للحصول على الأزواج المرتبة التالية: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $\cdots$, (x_n, y_n)

٢. نرسم المحاور الديكارتية ونقوم بتدريج كل منهما تدريجاً مناسباً .

٣. نقوم بتعيين هذه النقاط على المستوى الديكارتي ثم توصيلها بصورة ملساء للحصول على منحنى الدالة.

رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

هناك صيغ قياسية لبعض الدوال مثل:

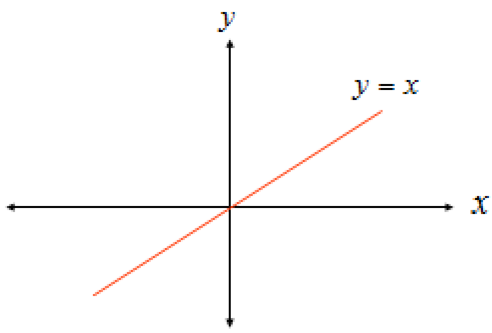
١. دالة خط مستقيم

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x$

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3

تابع: الحل:



رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

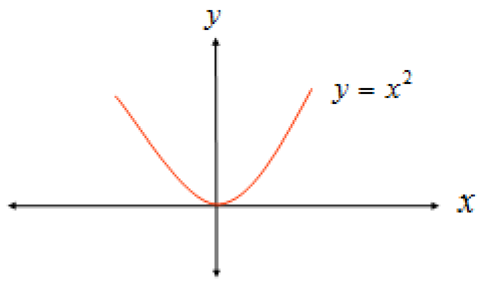
٢. الدالة التربيعية:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^2$

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	9	4	1	0	1	4	9

تابع: الحل:



رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

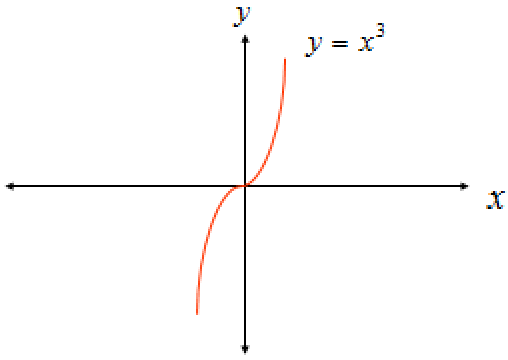
٣. الدالة التكعيبية:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^3$

الحل:

x	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	-8	-1	0	1	8

تابع: الحل:



رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

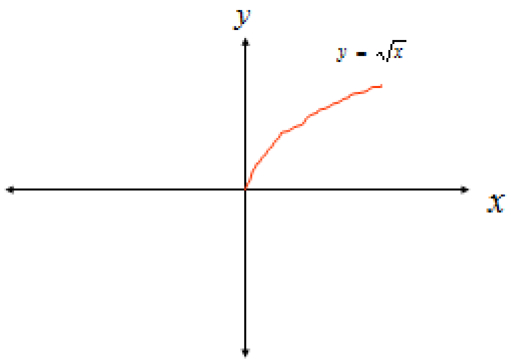
٤. الدالة الجذر التربيعي:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$

الحل:

x	0	1	2	3	4
y=f(x)	0	1	1.4	1.7	2

تابع: الحل:



رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

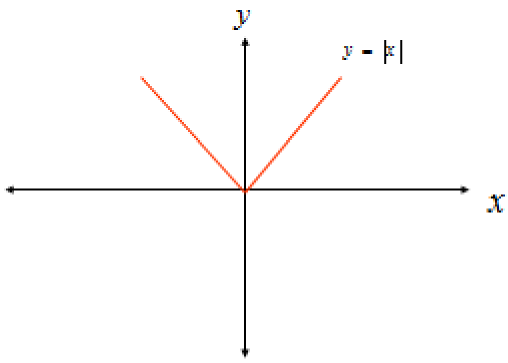
٥. دالة القيمة المطلقة:

مثال: ارسم الدالة

الحل: $y = f(x) = |x|$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	3	2	1	0	1	2	3

تابع: الحل:



ملاحظات على رسم الدوال:

١. الإزاحة إلى الأعلى :

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x) + c$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أعلى (على محور y) .

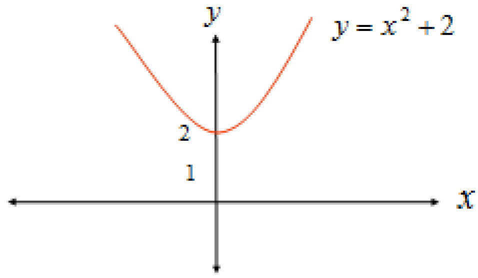
مثال:

ارسم منحنى الدالة $y = x^2 + 2$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ وحدتين إلى أعلى كما يلي:

تابع: الحل:



ملاحظات على رسم الدوال:

٢. الإزاحة إلى الأسفل:

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x) - c$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أسفل (على محور y) .

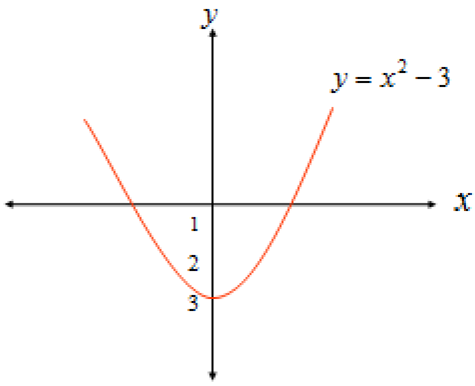
مثال:

ارسم الدالة $y = x^2 - 3$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ ثلاث وحدات إلى أسفل كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

٣. الإزاحة إلى اليمين:

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x-c)$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى اليمين (على محور x) .

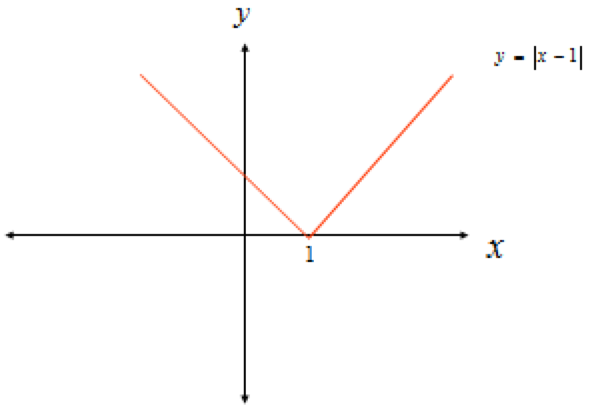
مثال:

ارسم الدالة $y = |x-1|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = |x|$ وحدة واحدة إلى اليمين كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال :

٤. الإزاحة إلى اليسار:

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x+c)$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى اليسار (على محور x) .

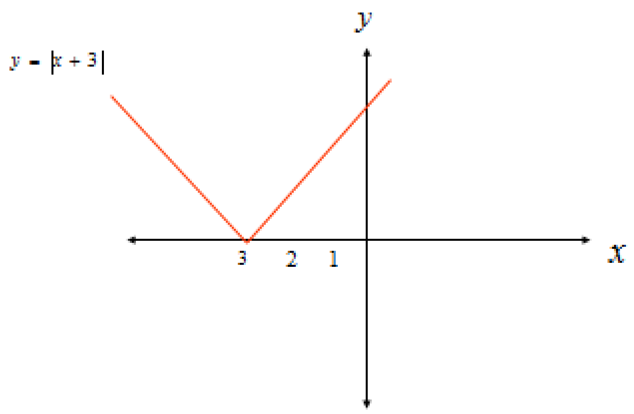
مثال:

ارسم الدالة $y = |x+3|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = |x|$ ثلاث وحدات إلى اليسار كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: رسم الدوال :

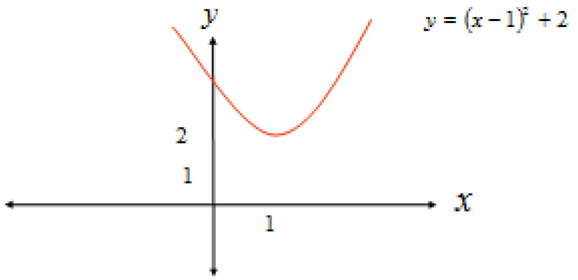
مثال:

ارسم الدالة $y=(x-1)^2+2$

الحل:

نحصل على منحني هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=x^2$ وحدة واحدة إلى اليمين ثم وحدتان إلى أعلى كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

٥. الانعكاس على محور x:

يمكن الحصول على منحنى $y = -f(x)$ بانعكاس منحنى $y = f(x)$ على محور x .

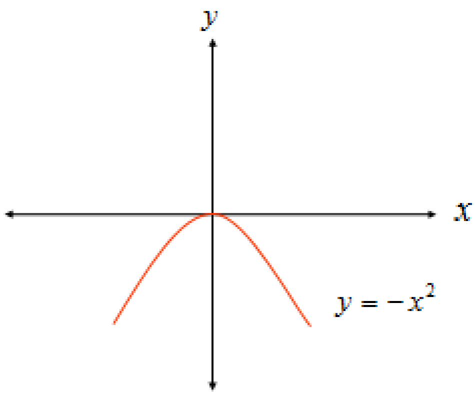
مثال:

ارسم الدالة $y = -x^2$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y = x^2$ على محور x كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

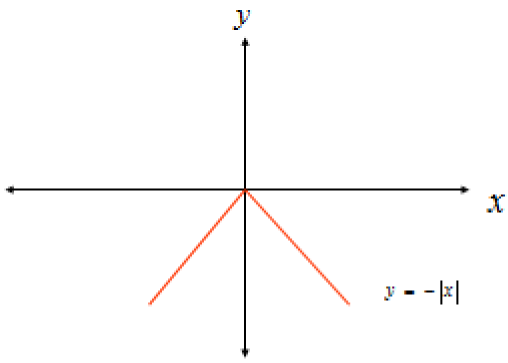
مثال:

ارسم الدالة $y=-|x|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=|x|$ على محور x كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

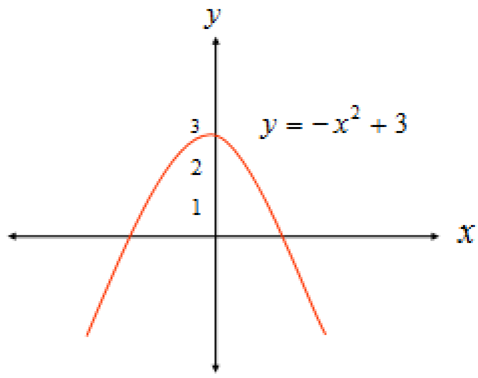
مثال:

ارسم الدالة $y=-x^2+3$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y = x^2$ على محور x ثم إزاحته ثلاث وحدات إلى أعلى كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

٦. الانعكاس على محور y:

يمكن الحصول على منحنى $y = f(-x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور y .

مثال:

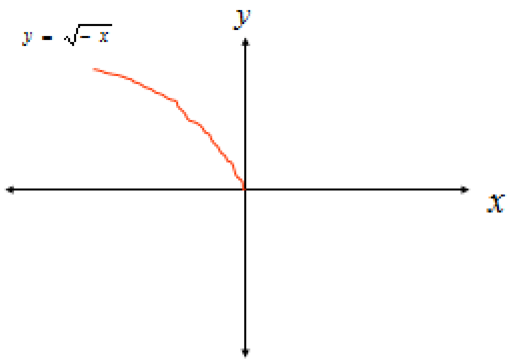
ارسم الدالة $y = \sqrt{-x}$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ على محور y كما يلي:

\

تابع: الحل:



تمارين:

ارسم الدوال التالية:

1. $f(x) = x + 4$
2. $f(x) = x^2 - 4$
3. $f(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = (x+2)^2 - 1$
5. $f(x) = (x-3)^2$
6. $f(x) = -(x+2)^2$

تمارين:

7. $f(x) = |x - 3| + 4$

8. $f(x) = (x - 2)^3$

9. $f(x) = \sqrt{-x}$

10. $f(x) = -|x| - 2$

تمت
بحمد الله

المحاضرة الثامنة

النـهايات

Limits

النـهايات:

مفهوم النهاية:

نهاية الدالة يقصد بها إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة. وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a ($x \to a$)

مثال:

إذا كانت f(x)=2x+1 فان $\lim_{x \to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما قيمة x تؤول إلى 2. وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5.

تابع: النهايات:

جبر النهايات:

١. إذا كانت $f(x) = c$ ، حيث c عدد حقيقي فان $\lim_{x \to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢. إذا كانت $f(x) = x$ فان $\lim_{x \to a} f(x) = a$ لكل عدد حقيقي a .

وكذلك اذا كانت $f(x) = mx + b$ ، حيث m و b عددان حقيقيان فان $\lim_{x \to a} f(x) = ma + b$

تابع: النهايات:

مثال:

أوجد قيمة كل مما يأتي:

1. $\lim_{x \to 3} 2$

2. $\lim_{x \to -2} x$

3. $\lim_{x \to 2} (3x + 4)$

4. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5)$

تابع: النهايات:

الحل:

1. $\lim_{x \to 3} 2 = 2$

2. $\lim_{x \to -2} x = -2$

3. $\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$

4. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$

تابع: النهايات:

٣. إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ، وكانت $\lim_{x \to a} g(x) = k$ وكانت c أي عدد حقيقي ، فإن:

i. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = l \pm k$

ii. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \times \lim_{x \to a} f(x) = c \times l$

iii. $\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \times \left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = l \times k$

iv. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{l}{k} \quad , k \neq 0$

تابع: النهايات:

مثال:

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10$ .5

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x\to 2}[h(x) - f(x)]$

ii. $\lim_{x\to 2}[g(x) \times h(x)]$

iii. $\lim_{x\to 2} 8f(x)$

تابع: النهايات:

iv. $\lim_{x\to 2}[f(x) + h(x) + g(x)]$

v. $\lim_{x\to 2} \dfrac{h(x)}{f(x)}$

تابع: النهايات:

الحل:

i. $\lim_{x \to 2} [h(x) - f(x)] = \lim_{x \to 2} h(x) - \lim_{x \to 2} f(x)$

$= 10.5 - 5 = 5.5$

ii. $\lim_{x \to 2} [g(x) \times h(x)] = \lim_{x \to 2} g(x) \times \lim_{x \to 2} h(x)$

$= -8 \times 10.5 = -84$

iii. $\lim_{x \to 2} 8 f(x) = 8 \lim_{x \to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$

تابع: النهايات:

الحل:

iv. $\lim_{x \to 2} [f(x) + h(x) + g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} h(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$

$= 5 + 10.5 + (-8)$

$= 15.5 - 8 = 7.5$

v. $\lim_{x \to 2} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \to 2} h(x)}{\lim_{x \to 2} f(x)} = \frac{10.5}{5} = 2.1$

تابع: جبر النهايات:

٤. إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود ، $f(x)=c_o+c_1 x+c_2 x^2+\cdots+c_n x^n$

فان

$$\lim_{x\to a} f(x)=c_o+c_1 a+c_2 a^2+\cdots+c_n a^n=f(a)$$

مثلاً :

$$\lim_{x\to 5}(x^2-4x+3)=5^2-4\times 5+3$$

$$=25-20+3=8$$

تابع: جبر النهايات:

ملاحظة:

اذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=l$ فان

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{l}$$

تابع: النهايات:

نظرية:

إذا كانت النهاية $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة و n عددا صحيحاً موجباً فان

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

مثلاً:

$$\lim_{x \to 1} [3x-1]^6 = \left[\lim_{x \to 1} 3x-1\right]^6 = [3\times 1-1]^6 = [3-1]^6 = 2^6 = 32$$

تابع: النهايات:

أمثلة:

أوجد نهاية كل من الدوال التالية:

$$1.\quad \lim_{x \to 2} (3x^3 + 5x^2 - 7) = 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7$$

$$= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7$$

$$= 24 + 20 - 7 = 37$$

$$2.\quad \lim_{x \to 3} \frac{3x^2+7}{x-5} = \frac{3\times 3^2+7}{3-5} = \frac{3\times 9+7}{-2} = \frac{27+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$$

تابع: النهايات:

3. $\lim_{x \to 2} e^{x+2} = e^{2+2} = e^4$

4. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} = \frac{1 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$ كمية غير معينة

5. $\lim_{x \to 3} \ln(2x - 5) = \ln(2 \times 3 - 5) = \ln(6 - 5) = \ln 1 = 0$

تابع: النهايات:

6. $\lim_{x \to 2} \log(3x^2 + 5) = \log(3 \times 2^2 + 5)$

$= \log(3 \times 4 + 5)$

$= \log(12 + 5)$

$= \log 17$

7. $\lim_{x \to 1} (3x^3 + 4x - 2)^3 = (3 \times 1^3 + 4 \times 1 - 2)^3 = (3 + 4 - 2)^3 = 5^3 = 125$

8. $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9}$

تابع: النهايات:

٣. إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات:

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الأولى

تابع: النهايات:

ii. تقع a ضمن مجال القاعدة الثانية

iii. تقع a على الحد الفاصل بين المجالين

مثال: إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

فأوجد

$i.\ \lim_{x\to 3} f(x) \qquad ii.\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) \qquad iii.\ \lim_{x\to 1} f(x)$

تابع: النهايات:

الحل:

i. تقع 3 ضمن مجال القاعدة الثانية لان $1< 3$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(7x-2)=7\times 3-2=21-2=19$$

ii. تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال القاعدة الأولى لان $\frac{1}{2}<1$

$$\therefore \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}}(3x^2+5)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2+5=\frac{3}{4}+5=\frac{3}{4}+\frac{20}{4}=\frac{23}{4}$$

تابع: النهايات:

iii. تقع 1 على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا نحسب النهاية من اليمين(أي $\lim_{x\to 1^+} f(x)$) والنهاية من اليسار(أي $\lim_{x\to 1^-} f(x)$)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(7x-2)=7\times 1-2=7-2=5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x^2+5)=3\times 1^2+5=3+5=8$$

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

تمارين

أ- إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$
فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x \to 2} [5 f(x) - 4 h(x)]$

ii. $\lim_{x \to 2} \left[-\frac{1}{2} g(x) \times h(x) \right]$

iii. $\lim_{x \to 2} [f(x) + 2h(x) + 3g(x) - 2]$

تابع: تمارين:

iv. $\lim_{x \to 2} [8 f(x) - g(x) \times h(x)]$

v. $\lim_{x \to 2} \frac{g(x)}{f(x)}$

vi. $\lim_{x \to 2} \frac{h(x)}{2 f(x)}$

تابع: تمارين:

ب- أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

1. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

3. $\lim_{x \to -2} \dfrac{2x - 3}{x + 4}$

4. $\lim_{x \to 0} e^x$

تابع: تمارين:

5. $\lim_{x \to 6} \sqrt[4]{x - 3x - 8}$

6. $\lim_{x \to 3} \log(2x + 4)$

7. $\lim_{x \to 2} \ln(x^2 + 1)$

8. $\lim_{x \to -1} (2x^2 + 5x + 1)^2$

9. $\lim_{x \to 1} \sqrt{x}$

المحاضرة التاسعة

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة

(حالات عدم التعيين) والاتصال

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

الكمية الغير معينة هي الكمية التي ليس لها جواب محدد.

من أهم حالات عدم التعيين التي تظهر عند حساب النهايات هي:

$\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

يمكن إزالة حالة عدم التعيين بإحدى الطرق التالية:

أولاً: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ نعالج الحالة كما يلي:

أ- إذا كانت البسط والمقام كثيرتا حدود:

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

التحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1.\quad \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

الحل:

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} = \frac{1 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

تابع: النهايات:

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x - 1)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2.\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

الحل:

كمية غير معينة
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$3.\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

الحل:

كمية غير معينة
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{1^2-3\times 1+2}{1-1}=\frac{1-3+2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ب- إذا احتوت الدالة على جذر:

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

الحل:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \frac{3 - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{x} + 3\right)$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)}{(x - 9)\left(\sqrt{x} + 3\right)} = \lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{(x - 9)\left(\sqrt{x} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$$

$$= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2.\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2}=\frac{\sqrt{4}-2}{2-2}=\frac{2-2}{2-2}=\frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ثانياً: عندما $x \to \infty$

عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ نتبع ما يلي:

نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على x بأكبر أس أو نستخدم النتيجة التالية إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود.

نتيجة:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود و $x \to \infty$ فان:

$$1 - \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2 - \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}$$

إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام.

$$3 - \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ملاحظة:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^n = \left[\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \right]^n = 0$$

مثال:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^3 = \left[\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \right]^3 = 0$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1.\quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \frac{1}{3}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2.\quad \lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1} = 0$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$3.\quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+x}{x^2+5}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+x}{x^2+5} = \infty$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$4.\quad \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7} = \frac{5}{2}$$

تابع: تمارين:

أوجد النهايات التالية:

$$1.\quad \lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$$

$$2.\quad \lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$$

$$3.\quad \lim_{x\to -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4}$$

$$4.\quad \lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$$

تابع: تمارين:

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4}$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1}$

الاتصال:

تعريف:

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في نقطة c إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

أ- الدالة معرفة في c أي أن f(c) معرفة

ب- $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة

ج- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

تابع: الاتصال:

مثال(1):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & , x\neq -3 \\ -6 & , x=-3 \end{cases}$$

متصلة في x=-3 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(-3)=-6$$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{9-9}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3} x-3=-6$$

بما أن

$$\lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)$$

اذأ الدالة متصلة في x=-3

تابع: الاتصال:

مثال(2):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & , x \le 2 \\ x^2 & , x > 2 \end{cases}$$

متصلة في x=2 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(2)=2\times 2-3=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x-3)=2\times 2-3=1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2=2^2=4$$

بما أن

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

اذاً

$\lim_{x\to 5} f(x)$ غير موجودة

اذأ الدالة غير متصلة في x=2

تابع: الاتصال:

مثال(3):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , \quad x<2 \\ 1 & , \quad x=2 \\ 5-x & , \quad x>2 \end{cases}$$

متصلة في x=2 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(2)=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(5-x)=5-2=3$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2} f(x)=3$$

بما أن $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

اذاً الدالة غير متصلة في x=2

تابع: الاتصال:

مثال(4):

أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ غير متصلة في x=-2

الحل:

$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$ غير معرفة

اذاً الدالة غير متصلة في x=-2

تمارين:

بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة متصلة أو غير متصلة في العدد x المعطى

1. $f(x) = \begin{cases} 2 + x & , x < 2 \\ 2 - x & , x \geq 2 \end{cases}$ في x=2

2. $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq -1 \\ x - 1 & , x < -1 \end{cases}$ في x=-1

تمارين:

في x=1

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le 1 \\ 2 & , x > 1 \end{cases}$$

في x=2

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & , x < 2 \\ 3 & , x = 2 \\ 5-x & , x > 2 \end{cases}$$

تمت
بحمد الله