ملخص التحليل الاحصائي

د/احمد فرحـــان .

الشرح من قبل استاذي (عرفة) جزاه الله عنا الف خير .

اعداد اخوكم MOHAMED_KFU

المحاضرة الأولى

المجموعات

تعريف المجموعة:

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً ، وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء آخر.

$A=\{a,b,c,d \ldots\}$

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

$$A, B, C, \cdots$$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

$b \in A$

$F \notin A$

~~$A \in a$~~

$$a, b, c, \cdots$$

العمليات ع المجموعات

الانتماء :

- يستخدم الرمز $\in$ "ينتمي إلى" ليبين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \in A$
- أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \notin A$

ملاحظة : تعد دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة في دراسة العلاقات والدوال.

علاقة الانتماء بين عنصر ومجموعة فقط

أمثلة على المجموعات:

هذا المثال بسيط وواضح متى ما كان أحد العناصر من ضمن المجموعة نستخدم الرمز $\in$
ومتى ما كان العنصر ليس من عناصر المجموعة نستخدم الرمز $\notin$

مثال:

A={a, b, c, d}

أي أن المجموعة A تتكون من العناصر a و b و c و d

$b \in A$

أي أن العنصر b ينتمي إلى المجموعة A

$f \notin A$

أي أن العنصر f لا ينتمي إلى المجموعة A

طرق كتابة المجموعات:

١- طريقة العد (سرد العناصر):

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة "," مثل:

$$A = \{1,3,5,7\}$$

$$B = \{a,b,c,d\}$$

$$C = \{1,2,3,\cdots\}$$

بحيث لا يتم تكرار العناصر

A = { X : X دولة من دول مجلس التعاون }

حيث

٢- طريقة القاعدة (الصفة المميزة):

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

A={x: عدد طبيعي زوجي x }

B={x: كلية بجامعة الملك فيصل x}

C={x: طالب مسجل بالمقرر الحالي x}

D={x: 0≤x ≤12 ، عدد صحيح x }

يعني هنا أن X عدد أو اسم أو غيره ويكون مشروط بصفه حيث في A تجد أنه مشروط بأن يكون عدد طبيعي زوجي ف -٢ ليس من ضمنها و ٣ فردي ليس من ضمنها.
في المجموعة D هناك شرطين أو صفتين بأنها أعداد صحيحه وتكون من ضمن صفر إلى ١٢

مثال على طرق كتابة المجموعات:

فمن خلال رمي حجر نرد مرتين نستطيع أن نعبر عن الحادثة (الحصول على مجموع يساوي ٧) من خلال التالي:

- طريقة سرد جميع العناصر وبينهما فاصلة كالتالي:

A={(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

عملية تخمين كم مرة ممكن يظهر لنا مجموع الرقم سبعه عند رمي النرد لو جمعنا كل رقم نجد أنها تساوي ٧

- ويمكن أن نعبر عن الحادثة نفسها بطريقة الصفة المميزة وهي كتابة مميزات العناصر بين القوسين {} عوضا عن كتابة العناصر نفسها كالتالي:

A={ (x,y) : x + y = 7 }

إذا المجموعة بشكل عام يمكن أن تكتب بميزة عناصرها بأشكال مختلفة طالما كانت الميزة كافيه لتحديد العناصر بشكل دقيق.

أنواع المجموعات:

١- المجموعة الخالية: Ø ، { }

وهي مجموعة الأعداد الصحيحة التي بين العددين ١،٠ مجموعة خالية ، أيضا مجموعة أسماء الأسماك التي تتحدث اللغة العربية مجموعة خالية بالتأكيد. ويرمز للمجموعة الخالية بالرمز Ø أو بقوسين { }.

A={x: عدد طبيعي زوجي وفردي x }

B={x: دولة عربية تقع في اوروبا x }

لا يوجد عدد صحيح بين صفر وواحد ولا يوجد أسماك تتكلم ولا يوجد دوله عربية في أوروبا إذا تكتب قوسين فارغه وتسمى المجموعه الخالية.

٢- المجموعة المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

$$A = \{2,4,6,8\}$$
$$B = \{1,2,3,..,100\}$$
$$C = \{x, y, z, w, u\}$$

٣- **المجموعة غير المنتهية:**

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A={x: عدد طبيعي فردي x }

$B = \{10,20,30,....\}$

> حيث أن X عدد طبيعي فردي ولا يوجد لها نهاية وفي المجموعة B نلاحظ بأنها إلى ما لانهاية.

S ~~الاخرى~~ من المجموعة الشاملة U

٤- **المجموعة الشاملة:**

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية منها ، ويرمز لها بالرمز U .

٥- **المجموعة الجزئية:**

فنقول عن مجموعة A أنها مجموعة جزئية subset من مجموعة B إذا كان كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي إلى B

ونعبر عن هذا بكتابة التالي :

- **إذا كانت $A \subset B$ وكانت $A \neq B$ قلنا أن A جزئية فعلية proper subset من B أو A محتواه في B أو المجموعة B تحتوي A**

- **أما إذا كانت A=B فإن كل عنصر ينتمي إلى أحدهما ينتمي للأخرى وبالتالي $A \subset B$ و $B \subset A$**

$\not\subset$ غير جزئي

$\subset$ جزئي

أمثلة:

١- إذا كانت $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

فإن $A \subset B$

٢- مجموعة جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

ملاحظ علاقة جزئي تستخدم لتوضيح العلاقة بين مجموعة ومجموعة

٦- **تساوي المجموعات:**

تكون المجموعتان A ، B متساويتان إذا كانت

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

مثال: $\{-1,+1\} = \{x : x^2 = 1\}$

$x^2 = 1$ نوجد الجذر

$x = \pm 1$

{ x حرف من كلمة سلام : x} ≠ {س، ل، م}

> أي مربع عدد يساوي واحد حيث ١ في ١ يساوي ١ و -١ في -١ يساوي ١
> المجموعة الثانية غير متساوية لأن سلام من أربعة أحرف

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

1) $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{3,1,5,7\}$ تساوي 1) $A = B$

2) $A = \{0,1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$ تكافؤ 2) $A \equiv B$

الحل:

> لاحظ أن في المجموعتين في الرقم واحد العناصر متساوية بينما في المجموعتين في الرقم 2 العناصر مختلفة ولكن عددها واحد إذا متكافئة

العمليات على المجموعات:

١- الاتحاد :

اتحاد المجموعتين A ، B ($A \cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما.

مثال :

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cup B)$ = {1, 2, -6, -7, -11}

لاحظ أننا لا نكرر الأعداد المكررة في كلتا المجموعتين.

مجموع العناصر بدون تكرار

٢- التقاطع :

تقاطع المجموعتين A ، B ($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وفي B معاً ، أي العناصر المشتركة بين A و B

مثال على ذلك :

المشترك فقط

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$A \cap B$ = {-6, -7}

٣- المكملة أو المتممة:

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A.

أي أن

$\overline{A} = S - A$

مثال:

واضحه المجموعة الكلية هي S وتجدون أن المجوعة A لا يوجد بها بعض الأعداد من المجموعة الكلية نضعها في مجموعه أخرى ونسميها مكملة المجموعة A ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$ وكذلك الأمر على المجموعة B

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\overline{A}$ ={2, 4, 6, 20}

$\overline{B}$ ={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}

٤- الفرق (الطرح) نأخذ العناصر الموجودة في المجموعة الأولى وليست الموجودة بالثانية

إذا كانت مجموعتان A ، B فان A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وليست في B.

مثال:

إذا كانت : $A = \{1,2,3,x,y\}$ و $B = \{3,4,5,x,w\}$

فإن : $A - B = \{1,2,y\}$

أي العناصر التي في A وليست في B واضحه ☺

مثال شامل للعمليات على المجموعات :

إذا كانت : $A = \{1,2,3,x,y\}$ و $B = \{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U = \{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

لمعرفة طريقة الحل راجع ما سبق ☺

أوجد :

1) $A \cup B$ 2) $A \cap B$ 3) $A - B$ 4) $\overline{A}$ 5) $\overline{B}$

الحل / = {1, 2, 3, x, y, 4, 5, w} {3, ~~x~~} {1, 2, y} {4, 5, w, z} {1, 2, y, z}

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,x,y,w\}$ $A \cap B = \{3,x\}$ $A - B = \{1,2,y\}$ $\overline{A} = \{4,5,w,z\}$ $\overline{B} = \{1,2,y,z\}$

@m_zahb

تدريبات :

١- نفترض أن $A=\{3,4,5,x,y\}$ و $B=\{4,x,y,z\}$ ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة.

$(i)\ 3 \in A$
$(ii)\ 3 \notin B$
$(iii)\ x \in A$
$(iv)\ x \in B$
$(v)\ z \notin A$
$(vi)\ z \in B$
$(vii)\ 1 \notin A$
$(viii)\ 1 \notin B$

طبعاً هذا التدريب أتى على شكل فراغات وأنا قمت بحله حيث تضع ينمتي إلى أو لا ينتمي

٢- اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية ، يمكن استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر.

i. A={x: x عدد طبيعي اصغر من ٧} = A{1,2,3,4,5,6}
ii. B={x: x عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على٢} = {2,4,6,...}
iii. C={y: y حرف من حروف الهجاء المحصور بين c و h} = {d,e,f,g}
iv. D={x: x عدد طبيعي فردي اصغر من ١٧} = {1,3,5,7,9,11,13,15}

هذا السؤال غير محلول وحله بسيط
١ – ٦
٢ ، ٤ ، ٦ ، ......
نكتب الحروب بين c و h
١٥ ، ١٣ ، ... ، ١

➢ أشكال فن (VIN Figures).

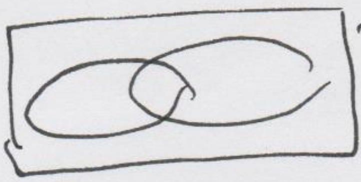
يمكن تمثيل المجموعات والعمليات المختلفة عليها من خلال استعمال اشكال هندسية تسمى أشكال فن وذلك وفق ما يلي:

١- المجموعة الشاملة:

تمثل المجموعات الكلية بمستطيل ويرمز لها بالرمز S

ا لشاملة

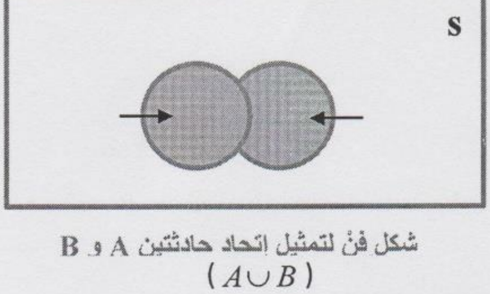
①



S

٢- اتحاد الحوادث Events Union :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أو إلى كليهما معا يطلق عليها اتحاد حادثتين ويرمز لها $(A\cup B)$ أو (A أو B) والشكل التالي يوضح ذلك:



شكل فن لتمثيل اتحاد حادثتين A و B
$(A\cup B)$

وبشكل عام لأي n حادثة $A1 , A2, A3, ... An$ فإن اتحاد هذه الحوادث هو :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 ...... \cup_n$$

ويمكن القول أن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وقع أحد هذه الحوادث Ai على الأقل وهو ما يطلق عليه جمع الأحداث

فالاتحاد $\cup$ يعني اتحاد المجموعتين A و B وهو مجموع العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين دون تكرار العناصر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cup B)$ = {1, 2, -6, -7, -11}

نفس ما تم دراسته سابقا في العمليات على المجموعات (الاتحاد)

خواص العمليات الجبرية لاتحاد الحوادث:

- إذا كانت A و B و C ثلاث حوادث فإن :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

توزيع الاتحاد على التقاطع

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

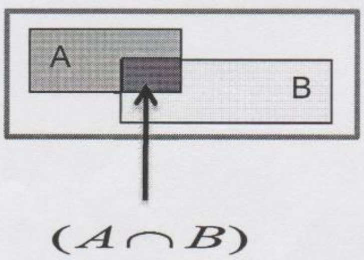
ويعني ذلك توزيع الاتحاد على التقاطع.

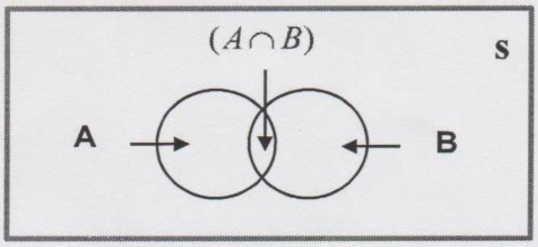
- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني أن :

$$(A \cup B) = (B \cup A)$$

٣- **تقاطع الحوادث Events Intersection :**

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى A و B أو إلى كليهما معا في نفس الوقت يطلق عليها تقاطع حادثتين ويرمز لها $(A \cap B)$ أو (A و B) وباستخدام أشكال ِفنْ يكون الجزء المحدد بـ A and B هو الذي يمثل تقاطع الحادثتين :





شكل ِفنْ لتمثيل تقاطع حادثتين A و B

وبشكل عام لأي n حادثة $A1 , A2, A3, ... An$ فإن تقاطع هده الحوادث هو :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 ...... \cap_n$$

ويمكن القول أن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وفقط وقعت كل الحوادث Ai على الأقل وهو ما يطلق عليه ضرب الحوادث.

فالتقاطع $\cap$ إذاً هو مجموعة العناصر المشتركة بين مجموعتين أو أكثر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cap B)$ = {-6, -7}

نفس ما تم دراسته سابقاً في العمليات على المجموعات (التقاطع)

@m_zahb

خواص العمليات الجبرية لتقاطع الحوادث:

- إذا كانت A و B و C ثلاث حوادث فإن :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

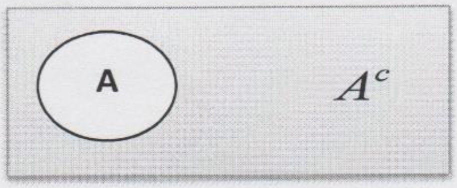
ويعني ذلك توزيع التقاطع على الاتحاد.

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني أن :

$$(A \cap B) = (B \cap A)$$

٤- **الحادثة المتممة Complementary Event :**

لأي حادثة A فإن متممتها هي الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي لا تنتمي إلى A ويرمز لها بالرمز A^c أو $\overline{A}$ وهو حدث يتألف من جميع عناصر المنتمية إلى A غير المنتمية Ω وباستخدام أشكال فنّ فإن الجزء المظلل يمثل الحادثة المتممة :



$$\overline{A} \quad A^c$$

شكل فنّ لتمثيل مكملة الحادثة A

مثال:

نفس ما تم دراسته سابقاً في العمليات على المجموعات (المتممة أو المكملة)

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

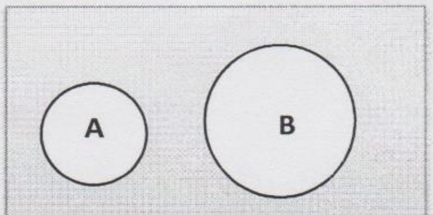
$\overline{A}$ ={2, 4, 6, 20}

$\overline{B}$ ={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}

٥- **الحوادث المتنافية Mutually Execlusive Events :**

الحادثتان A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كان تقاطعهما خاليا أي أن $A \cap B = \phi$

ويمكن القول أيضا أن $A \cap A^c = \phi$ ، وباستخدام أشكال فنّ فإن الحادثتان المنفصلتان يمثلان بالشكل التالي :



$$A \cap B = \phi$$

$$A \cap A^c = \phi$$

شكل فنّ لتمثيل حادثتان متنافيتان A و B

بعض العلاقات المهمة

$\overline{B\cup A}=\overline{B}\cap\overline{A}$	متممة اتحاد مجموعتين يساوي تقاطع متممة كلا المجموعتين	$A\cup A^c=S$	اتحاد أي مجموعة مع متممتها تساوي المجموعة الشاملة
$\overline{B\cap A}=\overline{B}\cup\overline{A}$	متممة تقاطع مجموعتين يساوي اتحاد متممة كلا المجموعتين	$A\cap A^c=\phi$	تقاطع أي مجموعة مع متممتها تساوي المجموعة الخالية
إذا كانت $A\subset B$ فإن : $A=A\cap B$ $B=A\cup B$ $\overline{B}\subset\overline{A}$	عندما نقول أن الـ A جزء من B فإن : الـ A تساوي تقاطع الـ A مع B الـ B تساوي اتحاد الـ A مع B متممة الـ B جزء من متممة الـ A	$\overline{S}=\phi$	متممة المجموعة الشاملة يساوي المجموعة الخالية
		$\overline{\phi}=S$	متممة المجموعة الخالية يساوي المجموعة الشاملة
		$A\cup S=S$	اتحاد أي مجموعة مع المجموعة الشاملة تساوي المجموعة الشاملة
		$A\cap S=A$	تقاطع أي مجموعة مع المجموعة الشاملة تساوي نفس المجموعة
		$A\cap\phi=\phi$	تقاطع أي مجموعة مع المجموعة الخالية يساوي المجموعة الخالية

أسئلة وتمارين :

١- يراد شراء ثلاثة أنواع من اللحوم من جزار معين ، فإذا رمزنا للحم الدجاج بـ A ولحم الضأن بـ B ، ولحم العجل بـ C فإن :

- توفر أنواع اللحوم الثلاثة يعني توفر لحم A و B و C أي بمعنى : $A\cap B\cap C$
- عدم توفر أي نوع من اللحوم يعني عدم توفر A و B و C أو كلها أي بمعنى : $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$
- توفر نوع واحد من اللحوم على الأقل هو توفر A أو B أو C أو كلها أي بمعنى : $A\cup B\cup C$
- توفر نوع A فقط يعني : $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$
- توفر نوع واحد من اللحم يعني إما توفر A وعدم توفر النوعين الآخرين أو توفر B وعدم توفر النوعين الآخرين ، أو توفر C وعدم توفر النوعين الآخرين أي بمعنى : $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

٢- قذفت قطعة نقود معدنية ثلاث مرات ، أوجد المجموعة الشاملة Ω وعدد عناصرها واكتب الحوادث التالية وعدد عناصر كل منها:

- الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى.
- الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل.
- الحادثة C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.
- الحادثة $(A\cap B)$
- الحادثة $(A\cup C)$
- الحادثة $(\overline{A}\cup\overline{B})$
- الحادثة $(A\cap\overline{B})$
- الحادثة $(\overline{A\cap B})$

الحل :

المجموعة الشاملة Ω يمكن إيجاده من خلال حساب ظهور كل رمية مباشرة على النحو التالي:

Ω= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)}

لقطعة النقد وجهين وجه صورة ووجه كتابة ممكن أن نرمز للصورة بـ H والكتابة بـ T
فنجد في المجموعة الشاملة جميع الاحتمالات عند رمي القطعة ثلاث مرات.

- الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى:

A= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT)}

هنا نأخذ العناصر التي تبدأ الرمية الأولى بصورة H من المجموعة الشاملة

- الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل.

B= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)}

هنا نأخذ العناصر التي بها صورة أو أكثر H من المجموعة الشاملة.

- الحادثة C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.

C = {(THH), (THT)}

هنا نأخذ العناصر التي تبدأ الرمية الأولى بكتابة T والرمية الثالثة بصورة H من المجموعة الشاملة.

تقاطع A مع B $(A \cap B)$ = {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT)}

اتحاد A مع C $(A \cup C)$ = {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)}

متممة الـ A اتحاد متممة الـ B $(\overline{A} \cup \overline{B})$ = {(THH), (THT), (TTH), (TTT)}

تقاطع الـ A مع متممة الـ B $(A \cap \overline{B})$ = ϕ

متممة تقاطع الـ A مع الـ B $\overline{(A \cap B)}$ = { (THH), (THT), (TTH), (TTT)}

المحاضرة (٢)

نظرية الاحتمالات

تعريف الاحتمالات:

يمكن تعريف الاحتمالات بطرق عديدة غير أن أبسطها هو مقياس لإمكانية وقوع حدث (Event) معين.
وتستعمل كلمة احتمالات بشكل دائم في حياتنا اليومية مثل:

- احتمال أن ينجح الطالب في مقرر دراسي.
- احتمال نزول المطر اليوم

وفي أحيان أخرى تستخدم كلمة احتمالات ككلمة مرادفة لبعض الكلمات الأخرى مثل: ممكن، غالبا، مؤكد، مستحيل ...

وقد ارتبط المفهوم التقليدي للاحتمال بألعاب الحظ لمدة طويلة، وتختلف درجة إمكانية تحقق أي حادثة من شخص إلى آخر حسب خبرته والمعلومات المتوفرة لديه عن الحادثة

وقد تطور علم الاحتمالات تطورا كبيرا وسريعا وأصبح أساسا لعلم الإحصاء وبحوث العمليات وغيرها.

١- التجربة العشوائية Random Experiment :

هي تلك التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج بصفة مؤكدة مثلا:

رمي حجر نرد مرة واحدة يعتبر تجربة عشوائية، حيث نعلم جميع قيم نتائج التجربة وهي إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.

٢- الحادثة والفراغ العيني:

فراغ العينة هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز Ω ويطلق علية الحالات الممكنة.

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلا ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي ١ أو ٣ أو ٥ من التجربة. وهكذا فإن عملية رمي الزهرة تسمى تجربة (Experiment) وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى حادثا (Event) ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى بالفراغ العيني (Sample Space) ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة او اكثر من الفراغ العيني.

الحادثة هي مجموعة جزئية من فراغ العينة وتمثل مجموعة النتائج التي تحقق الحدث وتسمى أيضا الحالات المواتية Favorable Cases ، فمثلا الحصول على رقم زوجي في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة تكون الحادثة هي {٢، ٤، ٦} ، ويمكن أن تحتوي الحادثة على عنصر واحد أو أكثر.

٣- أنواع الحوادث :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

أ- الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events)

يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا. فمثلا عند رمي عملة معدنية لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ب- الحوادث المستقلة (Independent Events)

يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلا عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

جـ- الحوادث الشاملة (Exhaustive Events)

تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة.

مثال:

رمي حجر نرد مرد واحدة ، أحسب التالي:

فراغ العينة $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- احتمال الحصول على رقم ٥ $= \frac{1}{6}$
- احتمال الحصول على رقم زوجي $= \frac{3}{6}$
- احتمال الحصول على رقم أكبر من ٢ $= \frac{4}{6}$
- احتمال الحصول على رقم أقل من ٧ $= \frac{6}{6} = 1$
- احتمال الحصول على رقم ٧ $\frac{0}{6} = 0$

الحل:

فراغ العينة لهذه التجربة هو : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فيكون بالتالي الحل كما يلي:

$P_{(A=5)}=\frac{1}{6}$

$P_{(A=2,4,6)}=\frac{3}{6}$

$P_{(A>2)}=\frac{4}{6}$

$P_{(A<7)}=\frac{6}{6}=1$

$P_{(A=7)}=\frac{0}{6}=0$

$\cup$ أو إتحاد

$\cap$ تقاطع و

ويستنتج من ذلك أن أقل قيمة للاحتمال تساوي الصفر ويقال أن الحدث في هذه الحالة (حدث مستحيل) بينما تساوي واحد إذا كان الحدث مؤكد.

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

- أن يكون أعزبا $\frac{23}{50}$
- أن يكون متزوجا $\frac{17}{50}$
- أن يكون من القسم الأول $\frac{12}{50}$
- أن يكون من القسم الأول أو الثاني

$= \frac{12}{50} + \frac{22}{50} = \frac{34}{50}$

- أن يكون من القسم الأول وأعزب

$= \frac{12}{50} + \frac{23}{50} - \frac{5}{50} = \frac{30}{50}$

أن يكون من القسم الأول و أعزب $\Leftarrow \frac{5}{50}$

أن يكون من القسم الأول و الثاني $\Leftarrow \frac{0}{50} = 0$

أ-في حالة كون الحوادث متنافية

- **إذا كانت الحوادث A1 , A2 , A3 .... حوادث متنافية بمعنى أن حدوث أحدها يؤدي إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معا يكون معدوما فإن احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث**

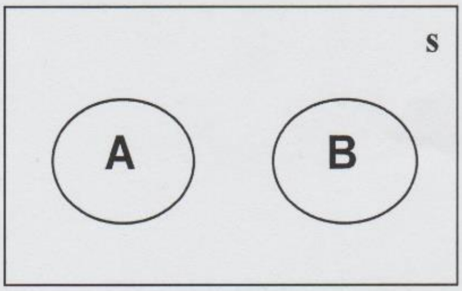
فإذا كان A ، B حادثين متنافيين كما في الشكل (١)

فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$

يرمز أيضا لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

الشكل (١)



حوادث متنافية

مثال:

رمي حجر نرد مرة واحدة ، احسب:احتمال الحصول على رقم ٥ أو ٦

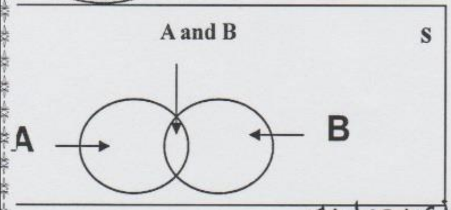
الحل:

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

ب- في حالة كون الحوادث غير متنافية

عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحادث (A أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد كما يتضح من الشكل التالي

أو $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



حوادث غير متنافية

مثال:-

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني. $P(A \cup B) = \frac{12}{50} + \frac{22}{50} =$
- احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول $\frac{27}{50} + \frac{12}{50} - \frac{7}{50} =$
- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب $\frac{16}{50} + \frac{23}{50} - \frac{10}{50} =$

الاحتمال الشرطي Conditional Probability

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان P(A2) لا يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطي بالمعادلة التالية:

$$P(A1|A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

مثال:

A تقاطع B ... A

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{,32}{,64}$

الحالة الاجتماعية	اعزب A	متزوج ~~B~~	المجموع
~~A~~ القسم الاول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
B القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به: اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟
- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟

① $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = ,25$

② $\frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = ,62$

ضــرب الاحتــمالات

إن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معا يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث ببعضها بعضا حيث أن نتيجة السحب إذا تكرر أكثر من مرة الأول لا تؤثر على نتيجة السحب الثاني وهذا ما يسمى سحب بإرجاع أو إحلال أو إعادة.فإذا كان لدينا الحادثين المستقلين A1 و A2 فإن احتمال حدوثهما معا هو:

$$P(A1 \cap A2) = P(A1)\ \ P(A2)$$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مثال:

إذا رمينا قطعة نقود مرة واحدة ، احسب الاحتمالات التالية:

- أن تكون الأولى صورة (A) والثانية كتابة (B).
- أن تكون كلتاهما صورة.

$P(A \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به فإذا سحب عاملان من المصنع مع الإرجاع (أي إرجاع العامل الأول قبل سحب العامل الثاني) احسب :

اختير عاملان من الجدول السابق بطريقة عشوائية،

احسب الاحتمالات التالية

١. احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول؟
٢. احتمال أن يكون العاملان متزوجان؟
٣. احتمال أن يكون للعاملين نفس الحالة الاجتماعية؟
٤. احتمال أن يكون العاملان من القسم نفسه؟

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

الحل:

١ـ احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول

اي العامل الأول من القسم الأول والثاني من القسم الأول

$= P(A) \cdot P(A)$

$\frac{12}{50} \cdot \frac{12}{50} = 0{,}057$

٢ـ احتمال أن يكون العاملان متزوجان ،

$= \frac{27}{50} \cdot \frac{27}{50} = 0{,}29$

٣ـ احتمال أن يكون للعاملين نفس الحالة الاجتماعية يعني أن يكون العاملان كلاهما متزوجين (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما أعزبين (الحادثة B) فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + (P(B)$$

$$= P(A_1 A_2) + P(B_1 B_2)$$

$$= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2)$$

$$= \left[\frac{27}{50} \times \frac{27}{50}\right] + \left[\frac{23}{50} \times \frac{23}{50}\right] = 0.5032$$

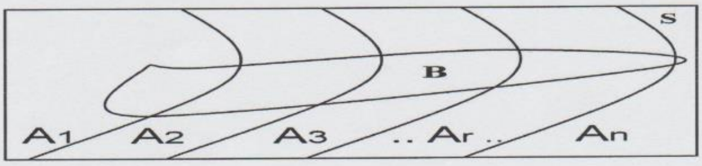
٤. احتمال أن يكون العاملان من القسم نفسه يعني أن يكون العاملان كلاهما من القسم الأول (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما من القسم الثاني (الحادثة B) أو أن يكون كلاهما من القسم الثالث (الحادثة C) فإن:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+(P(B)+(P(C)$$
$$=P(A_1A_2)+P(B_1B_2)+P(C_1C_2)$$
$$=P(A_1\times A_2)+P(B_1\times B_2)+P(C_1\times C_2)$$
$$=\left[\frac{12}{50}\times\frac{12}{50}\right]+\left[\frac{22}{50}\times\frac{22}{50}\right]+\left[\frac{16}{50}\times\frac{16}{50}\right]=0.3536$$

نظريـــــة بايـــز (Bayes' Theorem)

إذا كانت A1, A2, ... An مجموعة أحداث متنافية وكانت احتمالات حدوثها P(A1), P(A2), ... P(An) وإذا كان هناك حدث B يحدث إذا حدث أي من الأحداث المتنافية أنظر الشكل بالأسفل ، فإن احتمال حدوث الحدث Ar بشرط حدوث B هو :

$$P(A_r|B)=\frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\qquad 1\le r\le n$$



مثال:-

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٢٠٪ من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٣٥٪ والثالثة بنسبة ٤٥٪ ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٢٪ و ٢,٥٪ و ٣٪ ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟

٢- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

مصنع

آلة ١   آلة ٢   آلة ٣

٪٢٠   ٪٣٥   ٪٤٥

نسبة العيب   ٪٢   ٪٢،٥   ٪٣

$$=\frac{2\%\cdot 20\%}{(2\%\cdot 20\%)+(2,5\%\cdot 35\%)+(3\%\cdot 45\%)}$$

الحل:

نفرض أن

A1= {إنتاج الآلة الأولى}   P(A1)=0.2

A2= {إنتاج الآلة الثانية}   P(A2)=0.35

A3= {إنتاج الآلة الثالثة}   P(A3)=0.45

B= {إنتاج سلعة معينة}

فيكون بالتالي:

P(B|A1)=0.02

P(B|A2)=0.025

P(B|A3)=0.03

تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times0.02}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times0.025}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.333$$

المحاضرة (٣)
المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي Random Variable:

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين .

وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

- **المتغيرات العشوائية المنفصلة** Discrete Random Variables
- **المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)** Continuous Random Variables

أولا : المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة): دائما يسبقها كلمة عدد

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة،....X, Y, Z ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة، ... ,x, y, z

فالمتغير العشوائي المنفصل هو كل قيمة من قيم المتغير العشوائي ، ومن أمثلة هذه المتغيرات:-

- عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد X، $X:\{x=0,1,2,3,4\}$.
- عدد العملاء الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل 10 دقائق Y، $Y:\{y=0,1,2,3,....\}$.
- عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.
- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 200 وحدة كل موسم.
- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكرار النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

مثـال :

إذا كانت نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي 0.60، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.40، اشترى أحد العملاء عبوتين . والمطلوب: كون فراغ العينة. إذا عرف المتغير العشوائي بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي .

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي

x_i	$f(x_i)$
0	0.4×0.4 = 0.16
1	0.4×0.6+0.6×0.4= 0.48
2	0.6×0.6=0.36
Σ	1

الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل:

يرمز للوسط الحسابي للمتغير العشوائي بالرمز (ميو)، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\mu = \sum x_i \ f(x_i)}$$

وأما التباين ويرمز له بالرمز (سيجما)، فيحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum (x_i - \mu)^2 \ f(x_i) \\ &= \sum x_i^2 \ f(x_i) - \mu^2\end{aligned}}$$

مثـال:

الوسط $\mu = 0 \times 0.16 + 1 \times 0.48 + 2 \times 0.36 = 1.20$

في المثال السابق احسب ما يلي:

- الوسط الحسابي لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي.

التباين $\sigma^2 = 0^2 \times 0.16 + 1^2 \times 0.48 + 2^2 \times 0.36 - 1.20^2$

- احسب الانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي.
- أوجد معامل الاختلاف النسبي.

باستخدام الحاسبة

الحـــــل:

- الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع الأمريكي:

MODE → 3 → 1 → البيانات → AC

shift → 1 → 4 → الوسط = 2 =
→ الانحراف = 3 = → تربيعه → تباين

- لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتم استخدام المعادلة الخاصة بذلك وهذا يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
$\sum$	1	1.20	1.92

إذا الوسط الحسابي هو:

$$\mu = \sum x_i \ f(x_i) = 1.20$$

ولحساب الانحراف المعياري يجب أولا حساب التباين وهو:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 \ f(x_i) - \mu^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

إذا الانحراف المعياري قيمته هي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$$

معامل الاختلاف النسبي هو: = الانحراف المعياري / الوسط الحسابي × ١٠٠

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{0.693}{1.2} \times 100 = 57.7$$

ثانيا : المتغيرات العشوائية المستمرة Continuous Random Variables

المتغير العشوائي المستمر هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان x متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b)، فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b)، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- المساحة المزروعة بالأعلاف في المملكة بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار من (30-40)، $\{X = x : 55 < x < 80\}$
- وهكذا الأمثلة على المتغير الكمي المستمر كثيرة.

الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي المستمر:

معادلة الوسط والتباين يمكن كتابها كما يلي:

$$\mu = E(x) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 \ , \ E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x) \ dx$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المنفصلة:-

أ- توزيع ذي الحدين:

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح(p)، والأخرى تسمى بحالة الفشل(q) ، ومن أمثلة ذلك:

- عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان: (استجابة للدواء، أو عدم استجابة)
- عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان (الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة)
- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)
- نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)
- استخدام المزارع لبرنامج معين في الزراعة (يستخدم، أو لا يستخدم)

- ### شكل التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين:

إذا كررت محاولة من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- النتيجة محل الاهتمام- حالة نجاح- وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة

- النتيجة الأخرى - حالة فشل - وتتم باحتمال ثابت أيضا

إذا فتوزيع ذو الحدين هو أحد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، ويستخدم لإيجاد احتمال وقوع حدث معين (نجاح) عددا من المرات مقداره X من بين n من المحاولات لنفس التجربة (ونرمز لهذا الاحتمال بالرمز P(X) وذلك عندما تتحقق الشروط التالية:

- هناك ناتجان ممكنان فقط ومتنافيان لكل محاولة.
- المحاولات وعددها n مستقلة عن بعضها البعض.
- احتمال وقوع الحدث المعين في كل محاولة (النجاح) P ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى.

- فبالتالي يمكن حساب الاحتمال من خلال المعادلة التالية:

$$P(X)=\frac{n!}{X!(n-X)!}P^{x}(1-P)^{n-X}$$

- حيث n! (وتقرأ - مضروب n) = n. (n-1). (n-2)...3.2.1 =1, 0!.
- ويكون متوسط توزيع ذي الحدين
- والانحراف المعياري

ا لعدد ١ بو

$$\mu = np \leftarrow \text{٢ التي}$$

$$\sigma=\sqrt{np(1-p)}$$

الانحراف $\rightarrow = \sqrt{n.p.q} \rightarrow$ ٤

تحديد شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح كما يلي:

- إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون متماثل.
- إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون موجب الالتواء.
- إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون سالب الالتواء.

تمرين:

عند رمى عملة متوازنة مرتين فإن النواتج الممكنة هي TT,TH,HT,HH وعلى ذلك فإن:

$$P(0H)=\frac{1}{4} \qquad P(1H)=\frac{1}{2} \qquad \text{and} \qquad P(2H)=\frac{1}{4}$$

وهكذا فإن عدد الصور متغير عشوائي منفصل، وتمثل مجموعة كل النواتج الممكنة مع احتمالاتها المناظرة توزيعا احتماليا منفصلا، أنظر الجدول التالي:

عدد الصور	إمكانية حدوثها	الاحتمال
0	TT	0.25
1	TH, HT	0.50
2	HH	0.25

تمرين

إذا كان إحتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الإحصائي ٨٠٪ تم إختيار ٤ طلاب المطلوب:- n

١. كون جدول توزيع ثنائي الحدين.
٢. أوجد إحتمال نجاح ٣ طلاب.
٣. أوجد إحتمال رسوب ٣ طلاب.
٤. أوجد إحتمال نجاح طالبين على الأقل.
٥. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي).
٦. الانحراف المعياري.

(2) $P = ,80 \qquad q = ,20$

$$p(X=3) = C^{n}_{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$$

$$\boxed{\text{shift} \div} \rightarrow C^{4}_{3} \cdot ,80^{3} \cdot ,20^{4-3} = ,40$$

(3) $p(X=1) = C^{4}_{1} \cdot ,80^{1} \cdot ,20^{4-1} = ,025$

(4) $p(X \geq 2) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$

$$C^{4}_{2} \cdot ,80^{2} \cdot ,20^{2} + ,40 + C^{4}_{4} \cdot ,80^{4} \cdot ,20^{4-4} = ,96$$

(5) الوسط $= 4 \cdot ,80 = 3,2$

(6) الانحراف $= \sqrt{4 \cdot ,80 \cdot ,20} = ,8$

تمارين مراجعة

١- إذا كانت A ,B ,C ثلاث حوادث فإن العلاقة (B ∩ C) ∪ A تساوي :

أ- $(A\cup B)\cap(A\cup C)$	ب- $(A\cup B)\cup(A\cup C)$
ج- $(A\cap B)\cap(A\cap C)$	د- لا شئ مما سبق

٢- إذا كانت A ,B ,C ثلاث حوادث فإن العلاقة (B ∪ C) ∩ A تساوي :

أ- $(A\cup B)\cap(A\cup C)$	ب- $(A\cap B)\cup(A\cap C)$
ج- $(A\cap B)\cap(A\cap C)$	د- لا شئ مما سبق

٣- يراد شراء ثلاث أنواع من الكتب الدراسية A و B و C فإن : -

حرف [و] يعني تقاطع

أ- $A\cup B\cup C$	ب- $A\cap B\cap C$
ج- $A\cup B\cap C$	د- لا شئ مما سبق

٤- عدم توافر الكتب الدراسية الثلاثة يرمز لها بالرمز : -

عدم توفر $\bar{A}$

أ- $A\cup B\cup C$	ب- $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$
ج- $A\cup B\cap C$	د- لا شئ مما سبق

٥- توافر نوع واحد من الكتب الدراسية على الأقل A أو B أو C أو كلها يرمز لها بالرمز :-

أ- $A\cup B\cup C$	ب- $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$
ج- $\bar{A}\cap B\cap C$	د- لا شئ مما سبق

٦- توافر الكتاب الدراسي A فقط يمكن الرمز له بالرمز :

أ- $A\cup B\cup C$	ب- $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$
ج- $A\cap B\cap C$	د- لا شئ مما سبق

٧- توافر نوع واحد فقط من الكتب الدراسية يمكن الرمز له بالرمز : -

أ- $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$	ب- $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$
ج- $(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$	د- لا شئ مما سبق

٨- الجدول التالي يمثل توزيع مجموعة من الطلاب والطالبات حسب التخصص الدقيق بكلية إدارة الأعمال : -
تم اختيار احد الدارسين من الجدول السابق بطريقة عشوائية ، أحسب الاحتمالات التالية : -

	طلاب A	طالبات B	المجموع
محاسبة A	١٠	١٤	٢٤
نظم	١٦	٢٨	٤٤
ادارة B	٢٠	١٢	٣٢
المجموع	٤٦	٥٤	١٠٠

احتمال أن يكون طالب : -

$\frac{46}{100} = ,46$

أ- ٠,٥٤	ب- ٠,٤٦
ج- ٠,٢٤	د- لا شئ مما سبق

٩- احتمال أن تكون طالبة : -

$\frac{54}{100} = ,54$

أ- ٠,٥٤	ب- ٠,٤٦
ج- ٠,٢٤	د- لا شئ مما سبق

١٠ احتمال أن يكون من قسم المحاسبة : -

$\frac{24}{100} = ,24$

أ- ٠,٥٤	ب- ٠,٤٦
ج- ٠,٢٤	د- لا شئ مما سبق

١١- احتمال أن يكون من قسم المحاسبة وطالب : -

تمارين مراجعة

أ- ٠,١٠	ب- ٠,٤٦
ج- ٠,٢٤	د- لا شئ مما سبق

$\frac{10}{100} = ,10$

١٢- أن يكون طالبة أو من قسم المحاسبة : -

أ- ٠,٦٤	ب- ٠,٧٨
ج- ٠,٥٤	د- لا شئ مما سبق

$\frac{54}{100} + \frac{24}{100} - \frac{14}{100} =$

١٣ أن يكون من قسم الإدارة أو طالب :-

أ- ٠,٧٨	ب- ٠,٣٢
ج- ٠,٥٨	د- لا شئ مما سبق

$\frac{32}{100} + \frac{46}{100} - \frac{20}{100}$

B A

١٤- احتمال أن يكون من قسم المحاسبة بشرط أن تكون طالبة : -

أ- $\frac{7}{27}$	ب- $\frac{24}{100}$
ج- $\frac{54}{100}$	د- لا شئ مما سبق

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{14}{100}}{\frac{54}{100}} = \frac{7}{27}$

B A

١٥- احتمال أن يكون طالب بشرط أنه من من قسم الإدارة : -

أ- $\frac{32}{100}$	ب- $\frac{5}{8}$
ج- $\frac{20}{100}$	د- لا شئ مما سبق

$\frac{\frac{20}{100}}{\frac{32}{100}} =$

$\frac{32}{100}$

إذا علمت أن :

مصنع لإنتاج لعب الأطفال يمتلك ثلاث آلات A و B و C تنتج الآلة الأولى ٢٥% من الإنتاج والآلة الثانية ٤٠% من الإنتاج والباقي من إنتاج الآلة الثالثة فإذا كانت نسبة المعيب في الآلات الثلاثة على الترتيب هو ٣% و ٤% ٦% ، سحبت وحدة واحدة عشوائياً من إنتاج المصنع . احسب الإحتمالات التالية :

C	B	A	
35%	40%	25%	
6%	4%	3%	معيب
94%	96%	97%	سليم

١٦ احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة معيبة :-

أ- ٠,٩٤×٠,٣٥+٠,٩٦×٠,٤٠+٠,٩٧×٠,٢٥	ب- ٠,٠٦×٠,٣٥+٠,٠٤×٠,٤٠+٠,٠٣×٠,٢٥ = ,04
ج- ٠,٠٦×٠,٦٥+٠,٠٤×٠,٦٠+٠,٠٣×٠,٧٥	د- لا شئ مما سبق

١٧- احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة جيدة :-

أ- ٠,٩٤×٠,٣٥+٠,٩٦×٠,٤٠+٠,٩٧×٠,٢٥	ب- ٠,٠٦×٠,٣٥+٠,٠٤×٠,٤٠+٠,٠٣×٠,٢٥
ج- ٠,٠٦×٠,٦٥+٠,٠٤×٠,٦٠+٠,٠٣×٠,٧٥	د- لا شئ مما سبق

١٨- احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة معيبة ومن انتاج الآلة الثالثة :-

أ- $\frac{0.94\times0.35}{0.25\times0.97+0.40\times0.96+0.35\times0.94}$	ب- $\frac{0.40\times0.04}{0.25\times0.03+0.40\times0.04+0.35\times0.06}$
ج- $\frac{0.06\times0.35}{0.25\times0.03+0.40\times0.04+0.35\times0.06}$	د- لا شئ مما سبق

إذا كان إذا علمت أنه :

" أحد المصانع وجد أنه من بين كل ١٠٠٠ وحدة هناك ١٥٠ وحدة معيبة ،أخذت عينة مكونة من خمس وحدات ، فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع ثنائي الحدين " أوجد الإحتمالات التالية :-

n

$q = \frac{150}{1000} = ,15$

$P = \quad = ,85$

١٩- احتمال أن تكون الوحدات المختارة كلها سليمة :-

$P(X=5) = C^5_5 \cdot ,85^5 \cdot ,15^0$

أ- ٠,٥٥٦٣	ب- ٠,٤٤٣٧
ج- ٠,٨٣٥٢	د- لا شئ مما سبق

٢٠ احتمال وجود وحدة على الأكثر معيبة :-

$P(X \leq 1) = P(x=0) + P(x=1)$

$= C^5_0 \cdot ,15^0 \cdot ,85^5 + C^5_1 \cdot ,15^1 \cdot ,85^4$

أ- ٠,٣٩١٥	ب- ٠,٤٤٣٧
ج- ٠,٨٣٥٢	د- ٠,٠٠٢٢٢٧

٢١ احتمال وجود وحدتان معيبتان على الأقل :-

$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(x=3) + P(X=4) + P(x=5)$

أ- ٠,١٦٤٨	ب- ٠,٨٥٠٠
ج- ٠,٨٣٥٢	د- ٠,٩٩٧٧٧

تابع التوزيعات الإحتمالية

$P(X) = C^{n}_{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

مثال : 1

إذا كان احتمال إصابة الهدف لشخص ما هو $\frac{1}{5}$ أتيحت له فرصة الرماية في ١٠ محاولات : المطلوب

$p = \frac{1}{5}$ ، $q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ ، $n = 10$

- (1) ما هو إحتمال إصابة الهدف مرتين على الأكثر. $P(X \le 2) = X=0 , X=1 , X=2$
- (2) .إحتمال إصابة الهدف مرة واحدة

$$(1)\; P(X\le 2) = C^{10}_{0}\cdot(\tfrac{1}{5})^{0}\cdot(\tfrac{4}{5})^{10-0} + C^{10}_{1}(\tfrac{1}{5})^{1}(\tfrac{4}{5})^{9} + C^{10}_{2}\cdot(\tfrac{1}{5})^{2}\cdot(\tfrac{4}{5})^{8}$$

$$,107 + ,26 + ,301 = ,668$$

1ـ احتمال إصابة الهدف مرتين على الأكثر:-

$$(2)\; P(X=1) = C^{10}_{1}\cdot(\tfrac{1}{5})^{1}\cdot(\tfrac{4}{5})^{9} = ,26$$

أي احتمال x = 0 or x = 1 or x = 2

$P(X \le 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$

$$= \binom{10}{0}(1/5)^0(4/5)^{10} + \binom{10}{1}(1/5)^1(4/5)^9 + \binom{10}{2}(1/5)^2(4/5)^8$$

$$= (0.8)^{10} + 2(0.8)^9 + 1.8(0.8)^8 = 0.6778$$

2ـ احتمال إصابة الهدف مرة واحدة

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(1/5)^1(4/5)^9$$

أي احتمال x = 1

مثال :- 2

ألقيت عملة ثلاث مرات. فإذا كان X يمثل عدد ظهور الصور فأوجد التوزيع الاحتمالى وكذلك التوقع والتباين

الحل

احتمال النجاح (ظهور صورة) p = 0.5

احتمال الفشل (ظهور كتابة) q = 0.5

عدد الرميات المستقلة n = 3

X متغير عشوائي يمثل عدد الصور يأخذ القيم 0, 1, 2, 3

ويكون له توزيع ذي الحدين

$$p(X=x) = \binom{3}{x}(0.5)^x(0.5)^{3-x}, \quad x = 0,1,2,3$$

$$p(X=0) = \binom{3}{0}(0.5)^0(0.5)^{3-0} = \frac{3!}{0!(3-0)!}(1)(1/8)$$

$$p(X=1) = \binom{3}{1}(0.5)^1(0.5)^{3-1} = \frac{3!}{1!(3-1)!}(1/2)(1/2)^2$$

$$p(X=2) = \binom{3}{2}(0.5)^2(0.5)^{3-2} = \frac{3!}{2!(3-2)!}(1/2)^2(1/2)^1$$

$$= \frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$p(X=3) = \binom{3}{3}(0.5)^3(0.5)^{3-3} = \frac{3!}{3!(3-3)!}(1/2)^3(1/2)^0$$

$$= \frac{3\times2\times1}{3\times2\times1\times0!}\times\frac{1}{8}\times1 = \frac{1}{8}$$

التوقع E(X) = np = 3(0.5)= 1.5

التباين Var(X) = npq = 3(0.5)(0.5) = 0.75

الموضوع: تابع ما سبق

مثال (2):

المعطيات

$p = ,5$

$q = ,5$

$n = 3$

$$p(x) = C^{n}_{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$$

أي احتمال لابد ان يتراوح $0 \le p \le 1$

مجموع الاحتمالات يجب = 1

المطلوب: (أ) التوزيع الاحتمالي

$x = 0 , x = 1 , x = 2 , x = 3$

$$p(x=0) = C^{3}_{0} \cdot ,5^{0} \cdot ,5^{3} = ,125$$

$$p(x=1) = C^{3}_{1} \cdot ,5^{1} \cdot ,5^{2} = ,375$$

$$p(x=2) = C^{3}_{2} \cdot ,5^{2} \cdot ,5^{1} = ,375$$

$$p(x=3) = C^{3}_{3} \cdot ,5^{3} \cdot ,5^{0} = ,125$$

مجموع الاحتمالات = 1 $\longrightarrow$ 1

(ب) أوجد التوقع

$$\mu = n \cdot p = 3 \cdot ,5 = 1,5$$

(ج) أوجد التباين

$$\sigma^{2} = n \cdot p \cdot q$$

$$= 3 \cdot ,5 \cdot ,5 = ,75$$

(د) الانحراف المعياري = جذر التباين

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{,75} = ,86$$

مثال:- ٣

وجد فى إنتاج أحد المصانع أنه من بين 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معيبة. أخذت عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية::

١ـ الوحدات المختارة كلها سليمة

٢ـ على الأكثر توجد واحدة معيبة ← نستخدم علامة أصغر من أو يساوي ١

٣ـ على الأقل توجد وحدتان معيبتان ← نستخدم علامة أكبر من أو يساوي ٢

٤ـ القيمة المتوقعة و التباين للوحدات المعيبة.

الحل

للأحداث النادرة

توزيع بواسون

يستخدم ← عندما n كبير

<u>توزيع بواسون</u> هو توزيع احتمالي منفصل آخر يستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحده الزمن، وذلك عندما تكون الأحداث أو "النجاحات" مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتا لوحدة الزمن. عندئذ :

حيث : **x** =العدد المعين من النجاحات.

***P*(x)** =احتمال عدد **x** من النجاحات.

e =أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي: $e = 2.718$ تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة.

$x!$ = مضروب العدد x " ويساوي: $x! = x(x-1)(x-2)...3\times 2\times 1$

μ = المتوسط

- **يشتق توزيع بواسون من توزيع ذي الحدين عندما يكون :-**
  - **عدد المحاولات n كبير جدا**
  - **بينما يكون احتمال النجاح p صغير بحيث تبقى np قيمة ثابتة معتدلة**

$x!$

- **يوصف متغيرات عشوائية متقطعة تعبر عن عدد كبير من الحوادث مثل:**
  - **عدد حوادث السيارات في الشهر داخل مدينة كبيرة**
  - **عدد الكرات الحمراء في عينة الدم**
  - **عدد الأخطاء المطبعية في الصفحات المختلفة للكتاب**
  - **عدد القطع التالفة في الإنتاج الكلى لسلعة معينة**

<u>إذا كان للمتغير X توزيع بواسون فإن</u>

الإحتمال : $$p(x) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^x}{x!}$$

التوقع $E(X) = \lambda = np$

التباين $Var(X) = \lambda$

الموضوع: تابع ص ٢٢

مثال ٣

المعطيات

الخاص $= q = \frac{150}{1000} = ,15$

المكمل $= p = 1 - ,15 = ,85$

$n = 5$

① $P(x=5) = C^{5}_{5} \cdot ,85^{5} \cdot ,15^{5-5} = ,44$

② $P(x \leq 1) = (x=0)$ أو $(x=1)$

$C^{5}_{0} \cdot ,85^{0} \cdot ,15^{5-0} + C^{5}_{1} \cdot ,85^{1} \cdot ,15^{5-1}$

$= ,0022$

علماً بأن عدم ذكر تستخدم علامة أصغر من أو يساوي

أما الأقل تستخدم علامة أكبر أو يساوي

③ $P(x \geq 2) = (x=2) , (x=3) , (x=4) , x=5)$

$= 1 - (x=0 , x=1)$

من أخر

$= 1 - ,0022 = ,9977$

← مجموع الاحتمالات = 1

المطلوب في السؤال 2 ، 3 ، 4 ، 5

الحل الصحيح ← $1 - [P(x=0) + P(x=1)]$

④ القيمة المتوقعة

$\mu = n \cdot p$

$= 5 \cdot ,85 = 4,25$

⑤ التباين

$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot ,85 \cdot ,15 = ,63$

⑥ الانحراف المعياري

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{,63} = ,79$

$p = .03$

مثال ٤

في كمية كبيرة من القطع المصنعة، وكان معلوما أن بها نسبة 0.3% من القطع المعيبة. أخذت منه عينة بإرجاع عشوائية حجمها 350 قطعة. احسب الاحتمالات الآتية:

$n = 350$ ← توزيع بواسون

١) وجود قطعة معيبة
٢) وجود قطعتان معيبتان
٣) عدم وجود أية قطع معيبة
٤) وجود على الأكثر وحدتان معيبتان

الحل

عملية سحب العينة تمثل سلسلة عددها n=350

واحتمال أن تكون القطعة معيبة (النجاح) p=0.003

واضح n كبيرة و p صغيرة

$\lambda = np = 350(0.003) = 1.05$

بفرض أن X يمثل عدد القطع المعيبة في العينة له توزيع بواسون

x = 0, 1, 2, ...

١) وجود قطعة معيبة في العينة

$$p(X=1) = e^{-1.05}\frac{1.05^1}{1!} = (0.3499)(1.05) = 0.367$$

٢) وجود قطعتان معيبتان في العينة

$$p(X=2) = e^{-1.05}\frac{1.05^2}{2!} = (0.3499)(0.55125) = 0.193$$

٣) عدم وجود أي قطع معيبة في العينة

$$p(X=0) = e^{-1.05}\frac{1.05^0}{0!} = 0.350$$

٤) وجود على الأكثر وحدتان معيبتان

$$P(X\leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$$
$$= 0.350 + 0.367 + 0.193$$
$$= 0.91$$

التوزيع الإحصائي :-

وهو الشكل الذي تأخذه مجموعة البيانات، وشكل البيانات مهم جدا في تحليلها ووصفها وكخطوة تسبق قرار استخدام أي اسلوب احصائي.

ويرتبط التوزيع الاحصائي عادة بنوعين من البيانات المتصلة والمنفصلة، ويناسب النوع المنفصل المقاييس الاسمية والرتبية ، وهناك بعض المقياس المنفصلة ثنائية أي انه لا يوجد بها الا قيميتين، وهي لا تسمي توزيعات طبيعية وانما تسمى توزيعات ثنائية ، ومن أهم مقاييس التوزيعات المنفصلة مقياس ذو الحدين وذلك عائد لان الاجابة على المقياس الاسمي اما نعم أو لا ، ولذلك غالبا ما يرمز لها في الحاسب بصفر (غياب الصفة) (ذكور – لا) أو ١ (وجود الصفة) (اناث – نعم).

أما التوزيعات الاحصائية المتصلة فهي ذات أهمية كبيرة في العلوم الإحصائية وذلك لأن اغلب الاختبارات الاحصائية تتعامل مع هذا النوع من البيانات.

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة لها دوال كثافة احتمال محددة ومنها:

- التوزيع الطبيعي
- التوزيع الطبيعي (القياسي) المعياري
- توزيع t

وسنقوم في هذه المحاضرة بتناول هذه التوزيعات بشيء من التوضيح والتفصيل:

وكما أوضحنا أن المتغير العشوائي المتصل x هو ذلك المتغير الذي يمكن أن يأخذ عددا لا نهائيا من القيم المعلومة، واحتمال أن تقع x داخل أي فترة يمثلها مساحة التوزيع الاحتمالي (ويسمى أيضا دالة الكثافة) داخل هذه الفترة، والمساحة الكلية تحت المنحنى (الاحتمال) تساوى 1

الموضوع: مثال ٤ ص ٢٤

بواسون

اعتبرت نجاح لأنه جميع المطلوب معيب.

نستخدم توزيع بواسون لأن حجم العينة كبير.

$p = 0.003$

$n = 350$

$\lambda = n \cdot p$

$= 350 \cdot 0.003 = 1.05$

المطلوب: (1) وجود قطعة معيبة

[1] $p(X=1)$

$= e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^{x}}{X!}$

$\therefore p(X=1) = e^{-1.05} \cdot \dfrac{1.05^{1}}{1!} = 0.36$

[2] وجود قطعتان معيبتان

$p(X=2)$

$= e^{-1.05} \cdot \dfrac{1.05^{2}}{2!} = 0.19$

[3] $p(X=0) = e^{-1.05} \cdot \dfrac{1.05^{0}}{0!} = 0.34$

[4] $p(X \le 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$= 0.34 + 0.36 + 0.19 = 0.89$

[5] $p(X \ge 2)$ المطلوب وجود إثنين وحدتان معيبتان.

سؤال إضافي

$= 1 - [p(X=0) + p(X=1)]$

$1 - [0.34 + 0.36] = 0.3$

استخدام الآلة

shift ln $-1.05 \times \dfrac{1.05^{2}}{2 \text{ shift } x^{-1}} =$

التوزيع الطبيعي (للكميات المتصلة)

هو أفضل وأكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداما في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع .

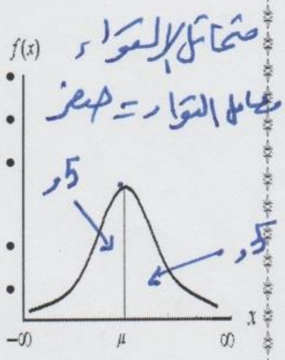
والتوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي متصل، وهو جرسي الشكل ومتماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد إلى مالا نهاية في الاتجاهين، ولكن معظم المساحة (الاحتمال) تتركز حول الوسط الحسابي .

خصائص التوزيع الطبيعي:

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم أنواع التوزيعات الاحصائية المتصلة ومن خصائصه انه:

- توزيع جرسي أي يشبه الجرس.
- توزيع متصل
- توزيع متماثل حول الوسط
- الالتواء (الاطراف) والتفلطح (القمة) يساوي صفر.
- يحوي منوال ووسط ووسيط واحد وذات قيم متساوية بمعنى أن الجزء الذي على يمين الوسط مطابق للجزء الايسر

متماثل الالتواء
معامل التواء = صفر



- الذيلين الايمن والايسر يقتربان من الخط الافقي ولكن لا تلامسه
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد صحيح
- منحنى دالة الاحتمال للتوزيع الطبيعي له خاصية شكل الجرس. ويتحدد شكل الجرس تماما لأي توزيع طبيعي خاصة إذا علمنا الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع.
- تدل قيمة على مكان مركز الجرس، كما تدل على كيفية الانتشار.
- القيمة الصغيرة لـ تعني أن لدينا جرس طويل مدبب، والقيمة الكبيرة لـ تعني أن الجرس قصير ومفرطح.

والشكل المقابل يوضح ذلك:

والتوزيع الطبيعي وتطبيقاته الاحصائية ليس موضوعا جديدا بل عرف منذ القرن السابع عشر الميلادي ومن ابرز الدراسات المعروفة تلك الدراسة البريطانية التي اخذت اطوال ٨٥٨٥ من الافراد البريطانيين في القرن التاسع عشر وعمل هذا المنحنى وبالتالي تم اعتبار هذه العينة تمثل التوزيع الطبيعي.

معالم هذا التوزيع:

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(x)=\mu$ والتباين : $\text{var}(x)=\sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير بالرموز : $(x \sim N(\mu,\sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2.

التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) :- مهم جدا بل حفظ

- احتمال وقوع أية مشاهدة على بعد انحراف معياري واحد من الوسط الحسابي هو 0.6827
- احتمال وقوع أي مفردة على بعد إنحرافين معياريين من الوسط الحسابي هو 0.9545
- احتمال وقوع أية مفردة على بعد ثلاثة انحرافات معيارية من الوسط الحسابي هو 0.9973

والشكل التالي يوضح ذلك:

العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي القياسي

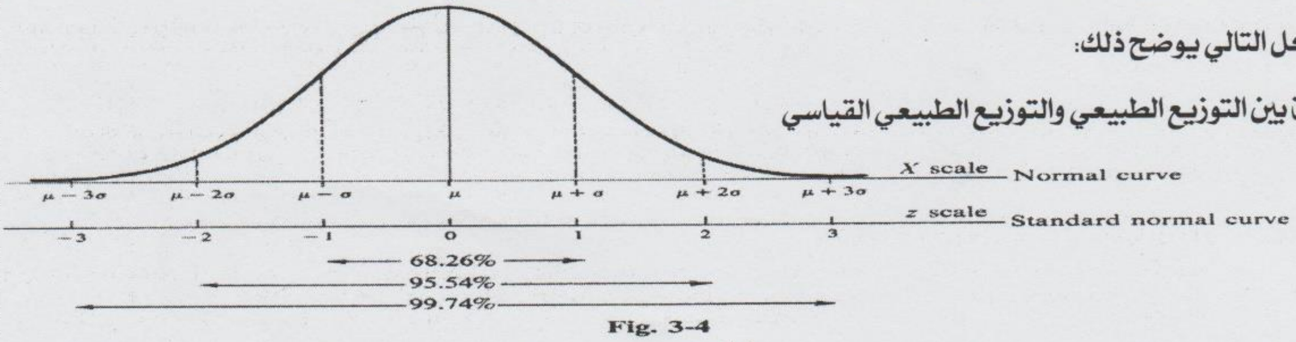


Fig. 3-4

الإنحراف المعياري	الإحتمال
١±	٠,٦٨٢٧
٢±	٠,٩٥٤٥
٣±	٠,٩٩٧٣

القانون المستخدم لتحويل التوزيع الطبيعي إلى قياسي :

القيم المراد تحويلها للتوزيع الطبيعي قياسي ← متوسط المجتمع

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

الانحراف المعياري

مثال :-

تم دراسة متوسط طول الطالب في كلية إدارة الأعمال هو ١٨٠ سم و ذلك بانحراف معياري ١٠ سم تم اختيار أحد الطلاب عشوائيا فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي فأوجد :-

١- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٧٠ سم و ١٩٠ سم (($p(170<x<190)$)).

٢- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٦٠ سم و ٢٠٠ سم (($p(160<x<200)$)).

٣- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٥٠ سم و ٢١٠ سم (($p(150<x<210)$)).

٤- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من ١٩٠ سم (($p(x<190)$)).

٥- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من ١٩٠ سم (($p(x>190)$)).

٦- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من ١٥٠ سم (($p(x>150)$)).

٧- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من ١٦٠ سم (($p(x<160)$)).

Tables of the Normal Distribution

Probability Content from -oo to Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

تابع (٢٧)

الموضوع: التوزيع الطبيعي

حل مثال ٢٧

المعطيات:

$\mu = 180$

$\sigma = 10$

المطلوب

(١)

$P(170 < X < 190)$

$Z_{170} = \frac{170-180}{10} = \frac{-10}{10} = -1$

$Z_{190} = \frac{190-180}{10} = \frac{10}{10} = 1$

$P(-1 < Z < 1) = ,68 = 68\%$

(٢)

$P(160 < X < 200)$

$Z_{160} = \frac{160-180}{10} = \frac{-20}{10} = -2$

$Z_{200} = \frac{200-180}{10} = \frac{20}{10} = 2$

$P(-2 < Z < 2) = ,95 = 95\%$

(٣)

$P(150 < X < 210)$

$Z_{150} = \frac{150-180}{10} = \frac{-30}{10} = -3$

$Z_{210} = \frac{210-180}{10} = \frac{30}{10} = 3$

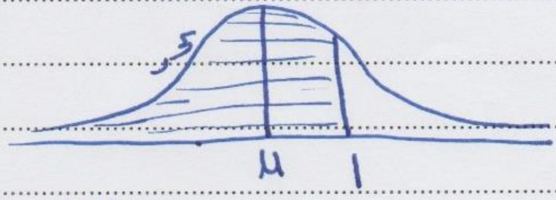
$P(-3 < Z < 3) = ,99 = 99\%$

الموضوع: تابع تمرين التوزيع الطبيعي

(د) احتمال أن يكون الطالب أقل من 190

$P(X < 190)$

$$Z_{190} = \frac{190 - 180}{10} = 1$$



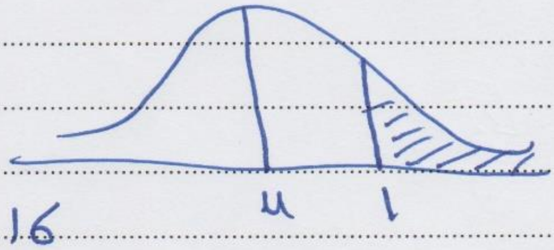
$P(Z < 1)$

$$= .5 + \frac{.68}{2} = .84$$

(هـ) احتمال أن يكون الطالب أكبر من 190

$P(X > 190)$

$$Z_{190} = \frac{190 - 180}{10} = 1$$



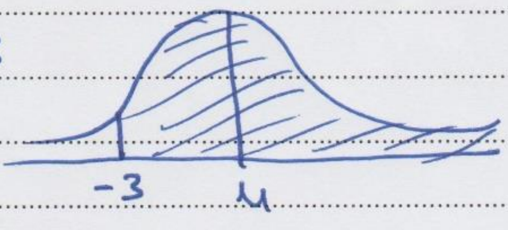
$P(Z > 1)$

$$= .5 - \frac{.68}{2} = .16$$

(و) احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 150 سم

$P(X > 150)$

$$Z_{150} = \frac{150 - 180}{10} = -3$$



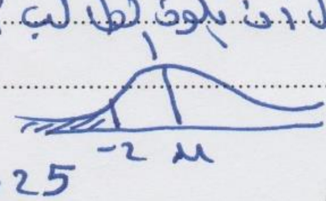
$P(Z > -3)$

$$= \frac{.99}{2} + .5 = .995$$

(ز) احتمال أن يكون الطالب أقل من 160

$P(X < 160)$

$$Z_{160} = \frac{160 - 180}{10} = -2$$



$$P(Z < -2) = .5 - \frac{.95}{2} = .025$$

استخدامات التوزيع الطبيعي القياسي:-

يستخدم التوزيع الطبيعي القياسي في التعامل مع الكثير من المشاكل العملية وإيجاد القيم الاحتمالية لها وإليك بعض الأمثلة على ذلك:

مثال:

افترض أن إدارة المرور بالأحساء وضعت جهازا للرادار على طريق الدمام عند مدخل المبرز وذلك لضبط السيارات المسرعة في فترة معينة من اليوم، افترض أن X تمثل السرعة في الساعة للسيارات التي تمر بمدخل المبرز في فترة عمل الرادار، إذا كانت X تتوزع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 60 ميلا وتباينه 25 ميلا، أوجد التالي:

- نسبة السيارات التي تقل سرعتها عن 50 ميلا في الساعة.
- نسبة السيارات التي تزيد سرعتها عن 65 ميلا في الساعة.
- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 60 ميلا و 70 ميلا في الساعة.
- عدد السيارات التي تكون سرعتها بين 60 ميلا و ~~77.45~~ 70 ميلا من بين 10000 سيارة.

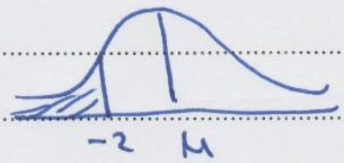
الموضوع: مثال ص ٣٠

المعطيات
$\mu = 60$
التباين $= 25$
الانحراف $\sigma = \sqrt{25} = 5$

[1] $P(X < 50)$

$$Z_{50} = \frac{50-60}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$P(Z < -2)$

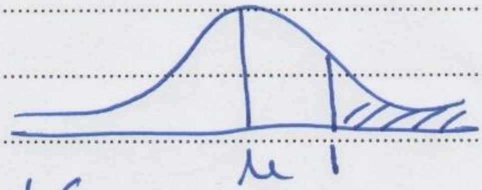


$$= .5 - \frac{.95}{2}$$
$$= .025$$

[2] $P(X > 65)$

$$Z_{65} = \frac{65-60}{5} = 1$$

$P(Z > 1)$

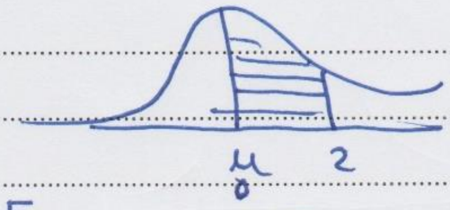


$$= .5 - \frac{.68}{2} = .16$$

[3] $P(60 < X < 70)$

$$Z_{60} = \frac{60-60}{5} = 0$$

$$Z_{70} = \frac{70-60}{5} = 2$$



$$P(0 < Z < 2) = \frac{.95}{2} = .475 = 47.5\%$$

[4] $P(60 < X < 70)$ المطلوب عدد

$$= .475 \times 10,000 = 4750$$

ناتج النسبة × العدد الكلي!

@m_zahb

المحاضرة (٥)
توزيعات المعاينة

الاستدلال الإحصائي :-

تهتم نظرية العينات بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه فيما يسمى بالاستدلال الإحصائي statistical inference

يعتبر الاستدلال الإحصائي من أهم الأدوات المساعدة على اتخاذ القرارات في الاقتصاد والأعمال والعلوم، ويشمل الاستدلال الإحصائي اختبار الفرضيات والتقدير.

ولكي يكون التقدير (واختبار الفروض) سليم، ينبغي أن يبنى على عينة ممثلة للمجتمع، ويمكن تحقيق ذلك بالمعاينة العشوائية، حيث يكون لكل مفردة في المجتمع فرصة متكافئة للدخول في العينة.

العينة العشوائية:-

وهناك عدة طرق لأخذ العينات من المجتمع لاستخدامها في الاستدلال الإحصائي ومن أشهر هذه الطرق هي العينة العشوائية وهي العينة التي تكون لكل مفرده من مفردات المجتمع نفس فرصة الاختيار في العينة.

فمثلا نستعين بعينه مسحوبة من المجتمع لتقدير معالم هذا المجتمع مثل متوسطة أو تباينه أو غير ذلك. أو أعطاء عينه من المرضى بارتفاع الضغط، مثلا دواء معين ثم قياس ضغطهم قبل وبعد تناولهم لهذا الدواء لمعرفة ما إذا كان هذا الدواء مفيد في خفض الضغط أم لا.

المجتمع Population

أي مجموعات من المفردات تشترك في صفه أو صفات وتكون موضوع دراسة أو بحث فإن هذه المجموعة يطلق عليها إحصائيا مجتمع الدراسة أو اختصارا المجتمع Population.

والمجتمع قد يكون مجموعة ما من البشر أو أشجار أنواع معينه من الفاكهة أو الحيوانات الزراعية أو إنتاج دولة ما لسلع معينه خلال فترة زمنية محدده...الخ.

والمجتمع قد يكون محدودا إذا كان يمكن حصر عدد أفراده مثل سكان مدينة ما أو طلاب مرحلة تعليمية معينة

وقد يكون المجتمع غير محدود (لانهائي) إذا كان لا يمكن حصر عدد أفراده مثل النجوم والكواكب أو الكائنات الحية بمياه المحيطات والأنهار

أساليب جمع البيانات :-

أولا: أسلوب الحصر الشامل (census): وفيه تجمع البيانات عن كل مفرده من مفردات المجتمع، وهذا الأسلوب لا يتبع عادة إلا في حالة التعدادات التي تجريها الدول وتدعمها بإمكانيات ضخمه مثل تعدادات السكان والتعدادات الصناعية والتعدادات الزراعية.

الثاني: أسلوب المعاينة (Sampling method): وفيه يتم جمع البيانات عن جزء من مفردات المجتمع يختار بطريقة أو بأخرى ويطلق عليه عينه (Sample) ثم بعد ذلك يتم تعميم نتائج الدراسة على المجتمع بأكمله.

بعض مزايا أسلوب المعاينة:-

يتميز أسلوب المعاينة عن أسلوب الحصر الشامل بمزايا عدديه منها:

١. يؤدي استخدام العينات العشوائية إلى خفض تكاليف الدراسات الميدانية بسبب صغر حجم العينة بالنسبة إلى حجم المجتمع وهو ما يؤدي إلى تخفيض الأعباء الإدارية والفنية التي تتطلبها أي دراسة ميدانية.
٢. يتحقق وفر واضح في الوقت الذي ينفق في دراسة ميدانية على أساس عينة بدلا من الحصر الشامل وتتضح أهمية الوقت عندما نقوم بدراسة ظاهرة تتغير بمرور الوقت، فتكون البيانات المجموعة والنتائج وقت ظهورها غير مطابقة لواقع المجتمع وتصبح النتائج ذات قيمه محدودة بعد أن فقدت عنصر المطابقة مع واقع الظاهرة وتوزيعها الحالي في المجتمع.
٣. في المجتمعات غير المحدودة (اللانهائية) مثل مجتمع الكائنات الحية في البحار والمحيطات لا يمكن أن تتم الدراسة على أساس الحصر الشامل ولكن لابد وأن تتم الدراسة بأسلوب المعاينة.
٤. أيضا هناك بعض الاختبارات لابد وأن تتم بأسلوب المعاينة لأن إجراء مثل هذه الاختبارات على أساس الحصر الشامل يؤدي إلى تلف المادة المختبرة أو هلاكها.. فاختبار صلاحية شحنه من المفرقعات مثلا لابد وأن يتم على أساس العينة وبالمثل تحليل دم المرضى يتم على أساس عينه.

أقسام العينات:-

تنقسم العينات عادة إلى قسمين رئيسين وهما عينات عشوائية وعينات غير عشوائية، وفيما يلي تفصيل لكل قسم منها:

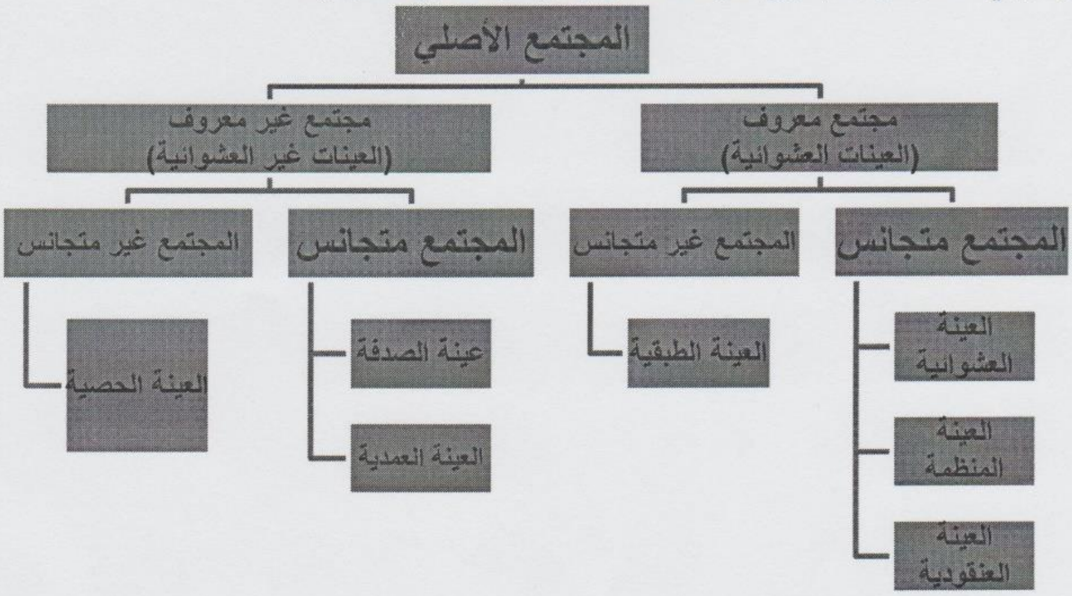
١. العينات العشوائية:

وهي تلك العينات التي يتم اختيار مفرداتها حسب خطه إحصائية لا يكون فيها للباحث أو لمفردات العينة دخل في اختيار أي مفرده فيها ، حيث يتم الاختيار باستخدام أساليب معينة تلعب الصدفة خلالها الدور الأول في اختيار المفردة ولكن بشرط أن يتحقق لجميع المفردات احتمال ثابت ومحدد للاختيار. والعينات العشوائية إذا ما تم اختيارها بالطريقة العلمية السليمة والمناسبة يمكن أن تكفل درجه عالية من دقة التمثيل للمجتمعات المسحوبة منها لذلك فهي الوسيلة الأساسية في حالة البحوث العلمية الدقيقة

٢. العينات غير العشوائية:

وهي تلك العينات التي لا تكفل لجميع مفردات المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، وغالبا يتدخل الباحث في عملية الاختيار بصورة أو بأخرى.

وسيتم فيما يلي استعراض لأهم أنواع العينات العشوائية والعينات غير العشوائية.



أ- العينات الاحتمالية:

العينة العشوائية	جميع عناصر المجتمع لها نفس الفرصة في الظهور في العينة
العينة الطبقية	يقسم المجتمع إلى طبقتين على الأقل ثم نختار العينة من كل منهما
العينة المنتظمة	نختار نقطة بداية من المجتمع ثم نختار العنصر الموجود على بعد ثابت من هذه النقطة
العينة العنقودية	يقسم المجتمع إلى مساحات أو أجزاء ثم نختار عشوائيا بعض هذه المساحات، ثم نختار جميع عناصرها بالعينة.

ب- العينات غير الاحتمالية:

عينة الصدفة	يتم اختيارها عن طريق الصدفة
العينة العمدية (القصدية)	يتم اختيار أفراد العينة تحت شروط معينة لتحقيق الهدف من التجربة
العينة الحصية	يقسم المجتمع إلى أجزاء ثم نختار العينة من كل جزء من أجزاء المجتمع وفقا للنسب المحددة

@m_zahb

هام جداً

أخطاء البيانات الإحصائية:-

تتعرض البيانات الإحصائية التي يتم جمعها إلى نوعين من الأخطاء:

1. **خطأ التميز أو التحيز:** وهو ذلك الخطأ الناتج عن مصادر متعددة، منها أخطاء في تصميم البحث أو التجربة أو أخطاء فنيه أثناء جمع البيانات أو خلال العمليات الحسابية التي تتم على البيانات المتجمعة. أخطاء التميز تزداد بازدياد الفروق بين الإمكانيات (المادية والفنية) اللازم توافرها لضمان أقصى درجة دقة ممكنه وبين الإمكانيات الفعلية المتاحة للباحث.
2. **خطأ المعاينة العشوائية أو خطأ الصدفة:** وهو الخطأ الناتج عن فروق الصدفة بين مفردات المجتمع التي دخلت العينة وبين تلك المفردات التي لم تشأ الصدفة أن تدخل العينة.

وفيما يلي شرح لهذين الخطأين:

1- خطأ التميز أو التحيز:

اذا سحبنا عدة عينات من مجتمع ما وحسبنا المتوسط الحسابي لكل عينة من هذه العينات ثم حسبنا المتوسط الحسابي لهذه المتوسطات فهذا المتوسط يجب أن يساوي المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع المسحوبة منه هذه العينات، وفي حال وجود فرق بين المتوسطين فإن هذا الفرق يسمى بخطأ التميز أو التحيز

أسباب خطأ التميز أوالتحيز:

- الاختيار غير العشوائي للعينة: تعتمد بعض طرق الاختيار للعينة على خاصية معينة كالاعتماد على دليل الهاتف (عند دراسة الدخل والانفاق).
- التحيز المقصود (تعمد إدخال بعض الوحدات)
- استبدال وحدة بوحدة أخرى غير مدرجة ضمن الإطار العام للدراسة

2- خطأ المعاينة العشوائية Random Sampling Error

عند اختيار العينة العشوائية هناك خطأ ينتج عن الاختلاف أو التشتت Variation بين قيم الوحدات التي تتكون منها العينة وتلك الوحدات التي لم تشأ الصدفة أن تدخلها في العينة وهذا الخطأ يسمى بخطأ المعاينة العشوائي

كيف نقلل من خطأ المعاينة العشوائي:

- زيادة حجم العينة
- طريقة الاختيار المناسب التي تقلل من اختلاف قيم الوحدات الإحصائية (كالأسلوب الطبقي أو العينة المنتظمة...الخ).

المعالم والإحصاءات:-

اعتاد البعض على معاملة القيم التي يحصل عليها من العينة وكأنها قيم مجتمعها، وهذا خطأ فادح. فلكي يستدل على خصائص مجتمع الدراسة تعتمد معادلات عديدة، ومتنوعة حسب نوع العينة.

فالمقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات مجتمع الدراسة بأكمله يطلق عليها معالم المجتمع أما المقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات عينه مسحوبة من مجتمع الدراسة فيطلق عليها إحصاءات (Statistics)

وللتفرقة بين المعالم والإحصاءات يجب أن نرمز لكل منها برموز تختلف عن رموز الأخرى، على سبيل المثال يرمز للمتوسط الحسابي للمجتمع بالرمز μ بينما يرمز للمتوسط الحسابي للعينة بالرمز $\bar{x}$، أيضا للانحراف المعياري للمجتمع بالرمز S بينما يرمز للانحراف المعياري للعينة بالرمز σ وهكذا.

الخطأ المعياري:

بمعرفة قيمة الانحراف المعياري لقيم العينة يمكن تقدير

- قيمة الخطأ المعياري في الانحراف المعياري للعينة مع معرفة حجم المجتمع:

$$SE = \left[\frac{S}{\sqrt{n}}\right]\left[\sqrt{1-(\frac{n}{N})}\right]$$

دقّاً صباعه

حيث ان: (N) = حجم مجتمع العينة و (n) = حجم العينة

وفق هذه المعادلة تؤخذ نسبة العينة إلى مجتمعها، وكلما كبرت هذه النسبة تحسن تمثيلها لمجتمع الدراسة،

- أما عندما يكون حجم مجتمع العينة مجهولا، حينها تعتمد المعادلة الآتية:-

$$SE = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

- أما عندما يكون حجم العينة أكثر من (100) فتعتمد المعادلة المقابلة:-

$$SE = \frac{S}{\sqrt{n^2}}$$

مستوى الثقة وحدودها:

إذا أخذت جميع العينات المحتملة من مجتمعها فيتوقع أن تكون متوسطات العينات موزعة بالتساوي حول متوسط مجتمع الدراسة. بعبارة أخرى، إن متوسط متوسطات العينات يساوي متوسط مجتمعها.

وتتوزع متوسطات العينات دائما بصورة متماثلة Normal Distribution ، والذي يمتاز رياضيا بالابتعاد بنسب ثابتة عن المتوسط مع كل درجة معيارية، وبالتالي تباينت متوسطات العينات المأخوذة منه فانه يتوقع أن يقع متوسطه وباحتمالية قدرها كالتالي:

قيمة الخطأ = ١ - ٦٨ = ٣٢

الخطأ ٣٢

- مستوى ثقة إحصائية قدره (٦٨.٢٦٪) أو باحتمالية قدرها (٠.٦٨٢٧) يقع متوسط مجتمع الدراسة بين قيمة متوسط متوسطات العينات و (+ و-) درجة واحدة من الخطأ المعياري.

٠.٠٥

- مستوى ثقة إحصائية قدرها (٩٥٪)، أو باحتمالية (٠.٩٥) يقع متوسط مجتمع الدراسة بين متوسط متوسطات العينات و (+ و –) درجتان من الخطأ المعياري تقريبا.

٠.٠١

- مستوى ثقة إحصائية قدرها (٩٩٪) أو باحتمالية قدرها (٠.٩٩) يقع متوسط مجتمع الدراسة بين قيمة متوسط متوسطات العينات و (+ و –) ثلاث درجات من قيمة الخطأ المعياري تقريبا.
- وتسمى هذه بمستويات الثقة Confidence Level و يعبر عنها بإشارة النسبة المئوية (٪) بان تكون التقديرات صحيحة أو باحتمالية (٠.٠١) أو (٠.٠٥) أن تكون خاطئة.

حجم العينة:

إن لحجم العينة أهمية كبيرة في تحديد الثقة بالنتائج، لذا من الضروري أن يسلط الضوء عليه بشيء من التفصيل وحسب التوزيعات المعروفة للقيم، وسيتم هنا تناول نوعين من التوزيعات وهي:

١. التوزيع الطبيعي للقيم
٢. توزيع (ت) للقيم

سيتم استخدام هذا لاحقا

القانون المستخدم : $n = \dfrac{Z^2\sigma^2}{(e)^2}$

(أ) التوزيع الطبيعي للقيم:

حجم العينة ٣٠ فأكثر نستخدم التوزيع الطبيعي

كلما كبر حجم العينة ازدادت دقة تمثيلها لمجتمعها واقترب توزيع القيم فيها من التوزيع الطبيعي (المتماثل الجانبين) وأصبحت عملية الاستدلال أكثر دقة. وللتوضيح نورد مثالا. إذا أريد معرفة نسبة طلبة قسم الإدارة إلى مجموع طلبة الكلية فان عينة من عشرة طلبة قد لا تفي بالغرض، ولكن عينة من مائة طالب تفي بالغرض حتما. بعبارة أخرى، إن حجم العينة أساسي لإعطاء صورة عن مجتمع الدراسة وليس النسبة المئوية للعينة قياسا بحجم مجتمعها. فكلما ازداد حجم العينة ازدادت الثقة بتقديرات خصائص المجتمع وصغرت معه حدود الثقة.

(ب) توزيع (ت) للقيم :

من الضروري اخذ الحذر عندما يكون حجم العينة صغيرا اقل من (٣٠) وذلك لأنها تتطلب إجراءات خاصة عند التحليل لهذا يستخدم في الدراسة توزيع (ت) . فعندما يكون حجم العينة أكثر من (٣٠) يتجه توزيع قيمها نحو التوزيع الطبيعي وبغض النظر عن التوزيع الحقيقي لقيم مجتمع الدراسة. وبالنسبة للعينات الصغيرة الحجم فان توزيع قيمها يتأثر بطبيعة توزيع قيم المجتمع المأخوذة منه. وعندما يكون توزيع قيم المجتمع معروفا أو متوقعا أن لا يكون طبيعي حينها يجب اعتماد حجم كبير للعينة. أما إذا كان توزيع قيم المجتمع طبيعيا عندها يمكن اخذ عينات بحجم صغير ويعتمد توزيع (ت) (T) في التحليل و المقارنة.

حيث يتشابه توزيع قيم (ت) مع شكل الجرس بزيادة الحجم للعينة حتى يتطابق مع التوزيع الطبيعي عندما يتعدى العدد (٣٠) فشكل توزيع (ت) للقيم لا يختلف كثيرا عن التوزيع الطبيعي إلا في الأعداد القليلة، وكلاهما متماثل النصفين لذا يعتمد كبديل له في القيم القليلة العدد أي مع حجم العينة أقل من ٣٠ .

ولتوزيع (ت) جداول للقيم الحرجة منظمة على شكل اسطر اعتمادا على درجة الحرية التي تقاس بـ (حجم العينة ـ ١).
أما الأعمدة فتمثل درجة الاحتمالية Probability، وتتناقص القيم الحرجة بتزايد درجة الحرية (حجم العينة).
ودرجة الحرية تفضل على حجم العينة في الأحجام الصغيرة للعينة لأنها تقلل من الانحياز في تقدير خصائص مجتمع الدراسة.

العوامل المحددة لحجم العينة:

- **درجة التباين في خصائص مجتمع الدراسة**: يلعب التباين في خصائص مجتمع الدراسة دورا مهما في تحديد درجة دقة نتائج العينة، فكلما كان التباين كبيرا تطلب الأمر زيادة حجم العينة ليكون تمثيلها للتباين في المجتمع صحيحا.
- **طريقة التحليل المعتمدة**: عند إقرار حجم العينة، من الضروري تحديد الحجم الأصغر المقبول للعينة في المجاميع الثانوية ضمن مجتمع الدراسة ، إذ أن بعض الاختبارات الإحصائية تتطلب عددا معينا كحد أدنى لكل فئة أو صنف لتكون النتائج ذات معنى.
- **حجم المعلومات المطلوبة**: فكلما كانت المعلومات المطلوبة من العينة (الواحدة) كثيرة وتفصيلية كان حجم العينة صغيرا، ما لم يكن المشروع البحثي كبيرا وتتوفر له المصادر البشرية والمادية اللازمة. إن الدقة في المعلومات المطلوبة من العينة أهم بكثير من حجم العينة ، فحجم العينة لا يتحدد بحجم مجتمع الدراسة فقط، بل وبالدقة المتوخاة والتفاصيل المطلوبة
- **المصادر المالية والبشرية المتوفرة**: تتطلب الدراسة الميدانية توفر مصادر مالية وبشرية لتغطية تكاليفها التي تكون في الغالب باهظة لتأثيراتها على تحديد حجم منطقة الدراسة، مجتمع الدراسة وبالتالي حجم العينة. إن مضاعفة حجم العينة يتطلب زيادة في كمية المصادر المالية والجهد البشري
- **حدود الثقة في تقديرات خصائص مجتمع الدراسة**: لزيادة الدقة في النتائج يعمد البعض إلى تقليص حدود الثقة (المدى الذي يفترض أن يقع ضمنه المعدل المتوقع للمجتمع). إن إنقاص حدود الثقة من (٦٪) إلى (٤٪) يتطلب زيادة حجم العينة بنسبة (٢٢٥٪)، وكلما كان المدى كبيرا كان حجم العينة صغيرا، والعكس صحيح.
- **حالات الإخفاق وعدم الاستجابة**: العامل الآخر الذي يحدد حجم العينة هي حالات الإخفاق في الحصول على المعلومات وعدم الاستجابة أو المعلومات غير الوافية

@m_zahb

المحاضرة (٦)

التقدير الإحصائي

التقدير:-

التقدير هو عملية استنتاج أو تقدير أحد معالم المجتمع (مثل الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري) بناء على بيانات عينة مسحوبة من المجتمع.

الانحراف المعياري للمجتمع

١) التقدير بنقطة :-

حجم العينة

التقدير بنقطة يعني أن نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة. بحساب الخطأ المعياري = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

فمثلا لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة. وكمثال آخر لو أخذنا نسبة الناخبين في العينة الذين يؤيدون مرشحا معينا كتقدير لهذه النسبة في المجتمع نكون حصلنا على تقدير نقطة للنسبة في مجتمع الناخبين.

٢) التقدير بفترة:-

أما التقدير بفترة فنحصل من خلاله على مدى Range أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) . نحصل عليهما من العينة. ونلاحظ هنا أن فترة التقدير (أو تقدير الفترة) تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائيا في كثير من الحالات.

مثلا:

إذا قدرنا أن الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح بين (6 - 40) و (6 + 40) سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و 46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير فترة للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع . ونلاحظ أن هذه الفترة (34, 46) تحتوي على عدد لا نهائي من الأعمار، بمعنى أن العدد لا يقتصر فقط على الأعداد الصحيحة والتي تشمل السنوات، ولكنها تشمل أيضا كسور السنوات، والأيام والشهور، والساعات.. الخ

تقدير الوسط الحسابي للمجتمع :-

$$\mu = \bar{x} \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} \pm Z\frac{S}{\sqrt{n}}$$

مع ملاحظة أنه إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع غير معروف . وهو غالبا ما يحدث في الواقع – فيمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة S بدلا منه طالما كان حجم العينة كبيرا بدرجة كافية وتصبح فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع كما يلي :
ولإيضاح هذه النقطة بشيء من التفصيل نأخذ المثال التالي :

معامل الثقة Z	درجة الثقة
1	68.26%
1.65	90%
1.96	95 %
2	95.44%
2.58	99%

مثال :- 1

لو أردنا معرفة متوسط الدخل اليومي لمجموعة من الناخبين في دولة ما، فإن ذلك يبدو أمرا صعبا من الناحية العملية نظرا لكبر حجم مجتمع الناخبين، إضافة إلى طول الوقت والتكاليف. لذا فإن الأسلوب العلمي المتبع في حالة كهذه هو اختيار عينة عشوائية نستطيع من خلال معرفة نتائجها لتقدير متوسط دخول الناخبين في هذه الدولة. فلو سحبت عينة عشوائية من مجموع مجتمع الناخبين في دولة ما حجمها 100 ناخب، فإذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للدخل السنوي للناخبين بالعينة هما على الترتيب 90 ألف ريال و 25 ألف ريال.

المطلوب:

أوجد فترة تقدير للوسط الحسابي للدخل السنوي لمجموع الناخبين في هذه الدولة بدرجة ثقة 95% ؟

الحل :-

$$\hat{\mu} = \bar{X} \pm Z \frac{S}{\sqrt{n}}$$

المعطيات

$n = 100$

$\bar{X} = 90$

$S = 25$

$Z = 1{,}96$

$\mu = 90 \pm 1{,}96 \cdot \frac{25}{\sqrt{100}}$

$90 \pm 4{,}9$

الحد الأعلى للتقدير

$90 + 4{,}9$

$= 94{,}9$

الحد الأدنى للتقدير

$90 - 4{,}9$

$= 85{,}1$

من الجدول

مثال :- 2

أخذت عينة عشوائية حجمها 144 بوسط مقداره 100 وانحراف معياري مقداره 60 وبالتالي فإن فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع بدرجة ثقة ٩٥٪ هي : ثم أوجد حجم العينة عندما يكون الخطأ المسموح به = ٥

المعطيات

$n = 144$

$\bar{X} = 100$

$S = 60$

$Z = 1{,}96$

$\mu = \bar{X} \pm Z \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$= 100 \pm 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{144}}$

$100 \pm 9{,}8$

$90{,}2$ = الأدنى

$109{,}8$ = الأعلى

$$n = \frac{Z^2 \sigma^2}{e^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 60^2}{5^2} = 553{,}19$$

الخطأ

مثال :- 3

إذا كانت دخول الأفراد اليومية في إحدى دول العالم النامية تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 15$ دولارا، فما هو حجم العينة المناسب لتقدير متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير متوسط الدخل اليومي 5 دولارات، وذلك بدرجة ثقة 99 %؟

الحل :-

$\sigma = 15$

$n = ??$

$e = 5$

$Z = 2{,}58$

$$n = \frac{Z^2 \cdot \sigma^2}{e^2} = \frac{2{,}58^2 \cdot 15^2}{5^2} = 59{,}9$$

مثال :-

يرغب أحد مدراء إحدى المصانع في تقدير متوسط عدد الدقائق التي يأخذها العمال لإنجاز عملية صناعية معينة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير متوسط الأداء في حدود ± 3 دقيقة وبدرجة ثقة 90% . ويعلم المدير من خبرته الماضية أن الانحراف المعياري σ هو 15 دقيقة.

$$n = \frac{Z^2 . \sigma^2}{(e)^2}$$

الحل :-

$e = \pm 3$
$Z = 1,68$
$\sigma = 15$

$$n = \frac{1,68^2 . 15^2}{3^2} = 70,56$$

فترات الثقة للمتوسط باستخدام توزيع t :-

تناولنا فيما سبق التقدير الإحصائي للوسط الحسابي للمجتمع في الحالات التي يكون فيها الانحراف المعياري للمجتمع معلوما، و (أو) أن العينة كبيرة بدرجة كافية.

ولكن إذا كانت العينة صغيرة بمعنى أن حجمها أقل من (30) مفردة، والانحراف المعياري للمجتمع الطبيعي غير معلوم، فإن التوزيع الإحصائي المتبع في مثل هذه الحالات هو ما يطلق عليه "توزيع t".

ولعل الاختلاف الأساسي بين توزيع t والتوزيع الطبيعي هو أن الانحراف المعياري للعينة هو المستخدم في الأول بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع في الثاني، وفيما عدا ذلك فالتوزيعان متماثلان وكلما زادت قيمة n كلما اقترب توزيع t من توزيع z ويعتمد توزيع t على ما يعرف بدرجات الحرية DEGREES OF FREEDOM .

درجات الحرية :

تعرف درجات الحرية بأنها عدد المشاهدات المستقلة في العينة والتي تساوي حجم العينة مطروحا منه عدد القيود أو معالم المجتمع التي يتم تقديرها من بيانات العينة.

وكمثال مبسط لشرح فكرة درجات الحرية نفترض أن لدينا 3 قيم واشترطنا أن مجموع القيم يساوي 10 فإن لدى الباحث في هذه الحالة حرية في اختيار الرقم الأول (وليكن 2) والثاني (وليكن 3) لذلك فإن قيمة الثالثة لابد وأن تكون (5) بالتالي نستطيع القول بأن درجة الحرية المتاحة لدى الباحث هي (2) أي 1 - 3 = 2 أي أن درجات الحرية في هذه الحالة هي : n - 1 حيث n تساوي حجم العينة (والتي تساوي في المثال السابق 3) والرقم (1) والذي طرحناه يعني الشرط الذي يحتم أن مجموع القيم = 10 وبصفة عامة إذا كان عدد القيود k فإن درجات الحرية تساوي n - k

وفترة الثقة 95% لوسط المجتمع غير المعلوم عند استخدام توزيع t هي:

$$P(\overline{X} - t\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t\frac{s}{\sqrt{n}}) = 0.95 \qquad (4.7)$$

حيث تشير t الى قيمة t التى تقع عندها 2.5% من المساحة الكلية للمنحنى عند كل طرف (عند درجات الحرية المستخدمة)، وتستخدم $s/\sqrt{n}$ بدلا من $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$

شروط توزيع t :

ويمكن تحديد الشروط الثلاثة لاستخدام توزيع t كما يلي:

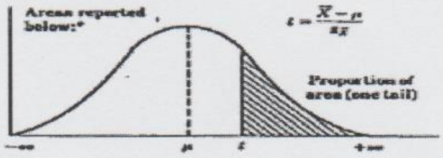
١. أن يكون المجتمع المسحوبة منه العينة له توزيع طبيعي.
٢. والانحراف المعياري للمجتمع غير معروف (أو مجهول).
٣. والعينة صغيرة (حجمها أقل من 30 مفردة).

جدول توزيع t:

الجدول أدناه يعطي قيمة t ∝

المقابلة للمساحة المظللة وقيمتها ∝

Proportions of Area for the t Distributions



df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898

df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

df —

مثال :-

العينة أقل من ٣٠ والمجتمع يتبع التوزيع الطبيعي :

سحبت عينة عشوائية من n=10 بطارية فلاش متوسطها ٥ ساعات، والانحراف المعياري للعينة s=1 ساعة من خط إنتاج من المعروف أنه ينتج بطاريات عمرها موزع طبقا للتوزيع الطبيعي.

المطلوب :

إيجاد فترة الـ 95% ثقة للمتوسط غير المعلوم لعمر البطاريات في المجتمع كله.

الحل:

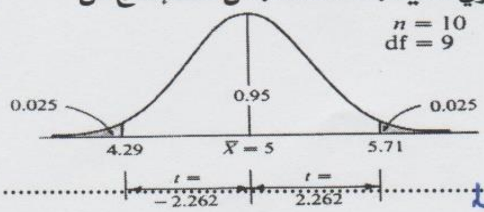


Fig. 4-4

$\mu = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$= 5 \pm 2,28 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$

n = 10

$\bar{x} = 5$

s = 1

مستوى المعنوية = .05

df = 10 − 1 = 9

t = 2,28

أدنى

5 − ,72

= 4, 28

أعلى

5 + ,72

= 5,72

تقدير فترة النسبة للمجتمع

(فترة الثقة للنسبة)

إن تقدير النسبة في المجتمع تعتبر من الحالات المهمة لقياس الظواهر السياسية، وبالذات الوصفية منها كقياس اتجاهات الرأي العام، وقياس نسبة قتلى الحروب، ونسبة الدول التي أوفت بالتزاماتها في المنظمات الدولية أو الإقليمية... وغيرها

ونظرا لأنه من الصعوبة بمكان في كثير من الأحيان حساب هذه النسبة مباشرة من المجتمع، فإننا غالبا ما نلجأ لتقدير هذه النسبة من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع.

خطوات تقدير النسبة في المجتمع:

فلو افترضنا أن نسبة المؤيدين للسياسة الاقتصادية التي تنتهجها دولة ما هي P وأن العينة العشوائية كبيرة بدرجة كافية وأن نسبة مؤيدي هذه السياسة في العينة هي فتقدير النسبة في المجتمع تكون كما يلي:

$$P = \hat{P} \pm Z\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

مثال :-

عينة عشوائية حجمها 144 ناخبا سحبت من إحدى المدن فوجد أن عدد المؤيدين في العينة لمرشح معين هو 60 ناخبا، أنشئ فترة تقدير لنسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة كلها بدرجة ثقة 95 %.

الحل:

$$P = \bar{P} \pm Z \cdot \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

$n = 144$

$\bar{P} = \frac{60}{144} = .41$

$Z = 1.96$

$$P = .41 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{.41(1-.41)}{144}}$$

$$= .41 \pm .08$$

الأدنى: $.33$

الأعلى: $.49$

ملاحظات:

* عند التقدير لفترة وكان حجم العينة أكبر من ٣٠ نستخدم تقدير ب Z

$$\mu = \bar{x} \pm Z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

* عند التقدير لفترة وكان حجم العينة أقل من ٣٠ نستخدم t

$$\mu = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

* عند التقدير بنسبة نستخدم القانون

$$P = \bar{P} \pm Z \cdot \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

الموضوع: التقدير الإحصائي

التقدير بفترة

1) إذا كان حجم العينة أكبر من ٣٠

وسط المجتمع

الانحراف المعياري

$$\mu = \bar{x} \pm Z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

حجم العينة

وسط العينة

الجدول

* قانون حساب حجم العينة (مثال ٣)

الجدول

الانحراف المعياري

$$n = \frac{Z^2 \cdot \sigma^2}{e^2}$$

الخطأ المسموح به

2) إذا كان حجم العينة أصغر من ٣٠

$$\mu = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

مستوى المعنوية

هو الشيء المكمل لدرجة الثقة إلى ١٠٠

$df = n - 1$

درجة الحرية