

المحاضرة الثانية

المجموعات - تكملة

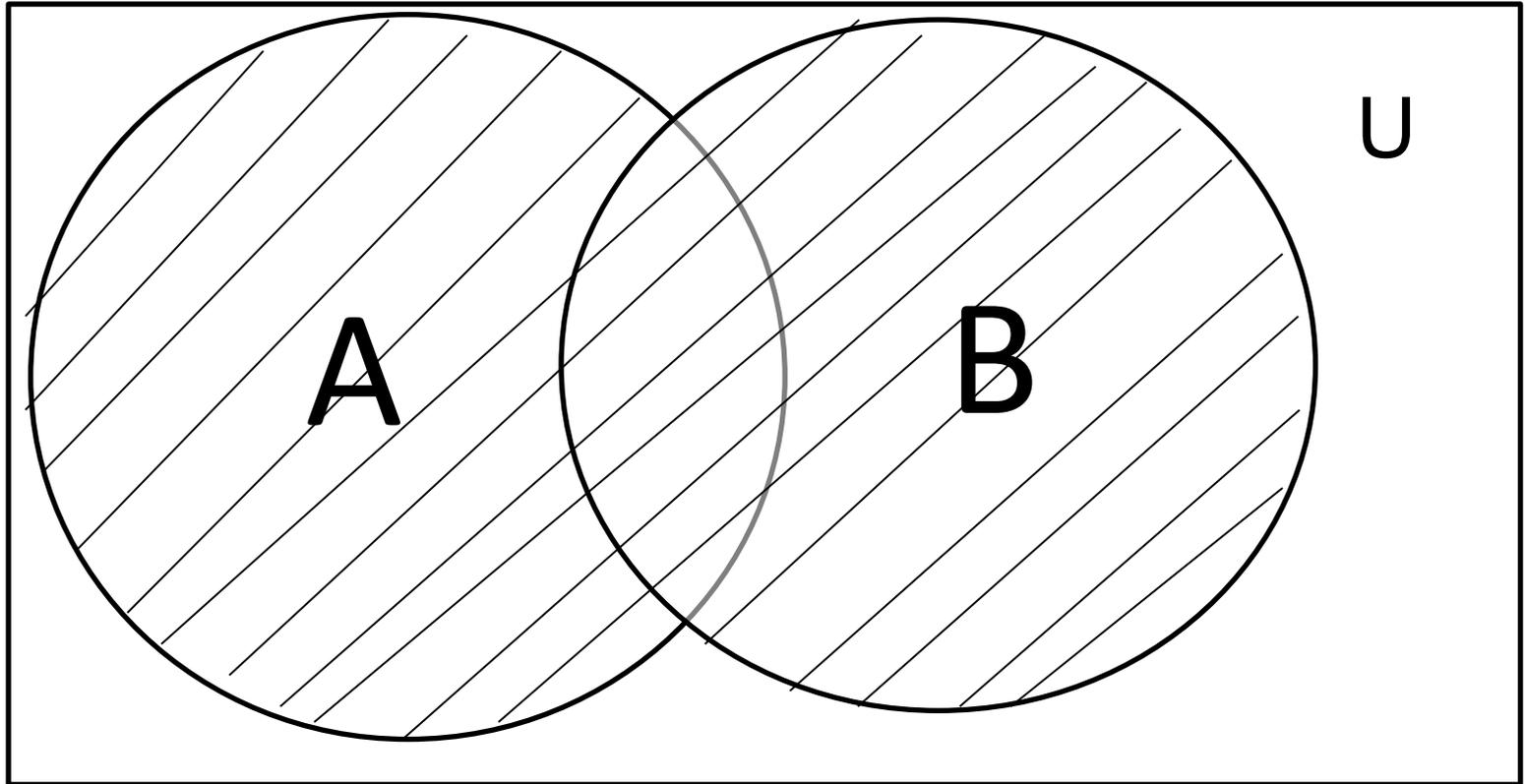


أشكال فين:

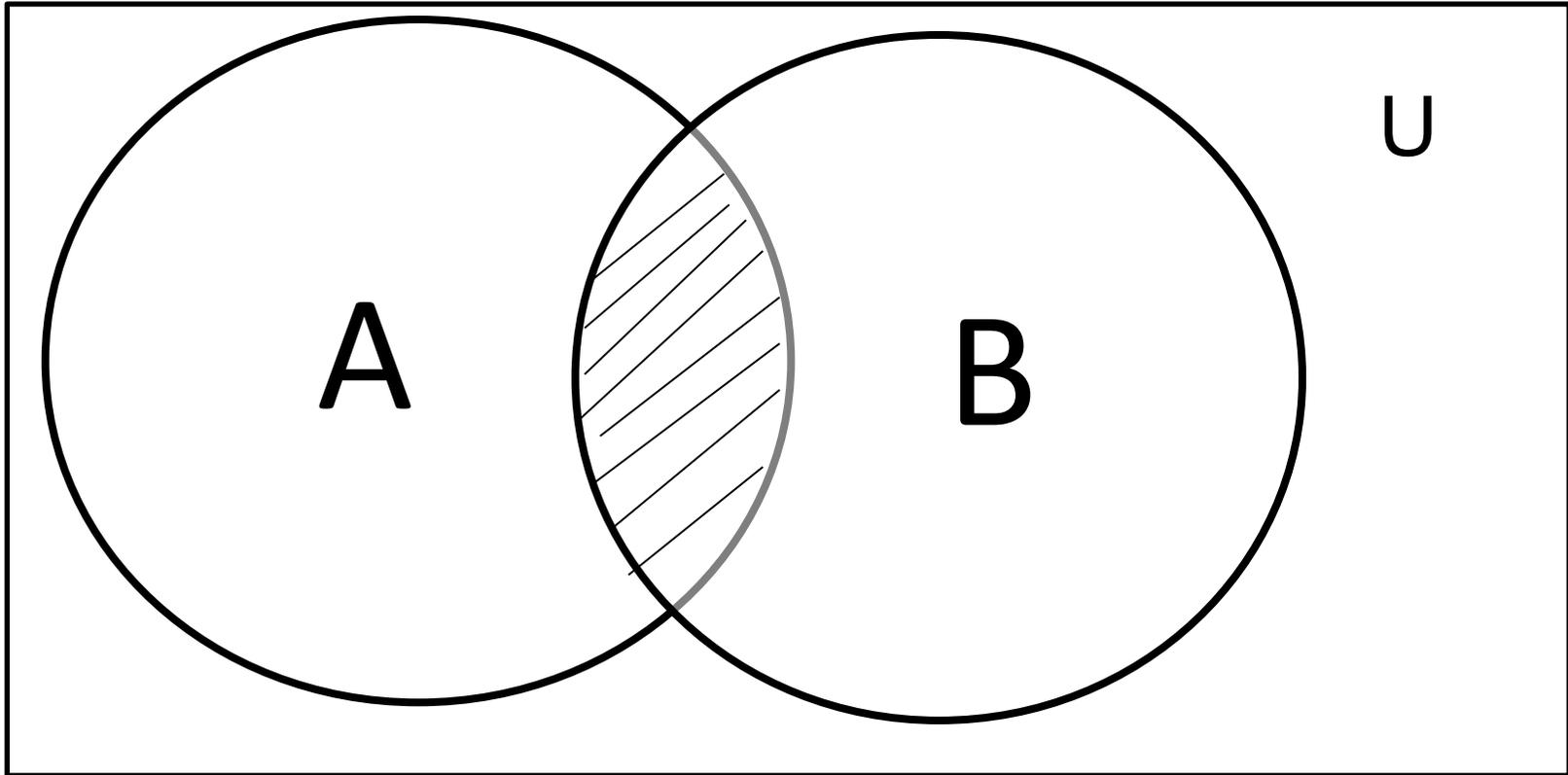
يمكن استخدام الأشكال الهندسية لتمثيل المجموعات والعمليات عليها، حيث يتم تمثيل المجموعة الكلية U بمستطيل ومن ثم أي مجموعة جزئية منها بشكل هندسي كالدائرة مثلاً، يرسم داخل المستطيل ، وتستخدم هذه الأشكال لتوضيح العمليات التي نجريها على المجموعات مثل الاتحاد ، التقاطع والمكملة والفرق وغيرها. كما في الأمثلة التالية:



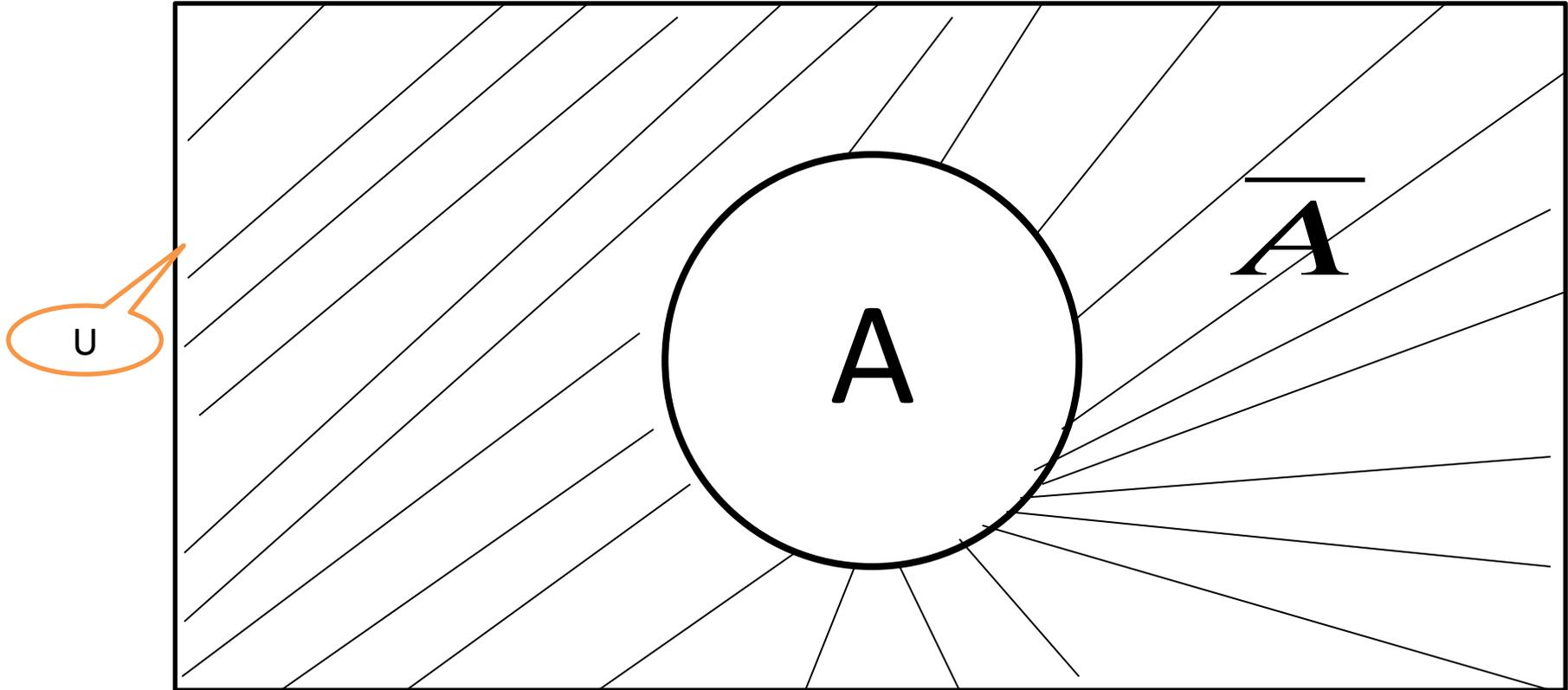
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل اتحاد مجموعتين A و B



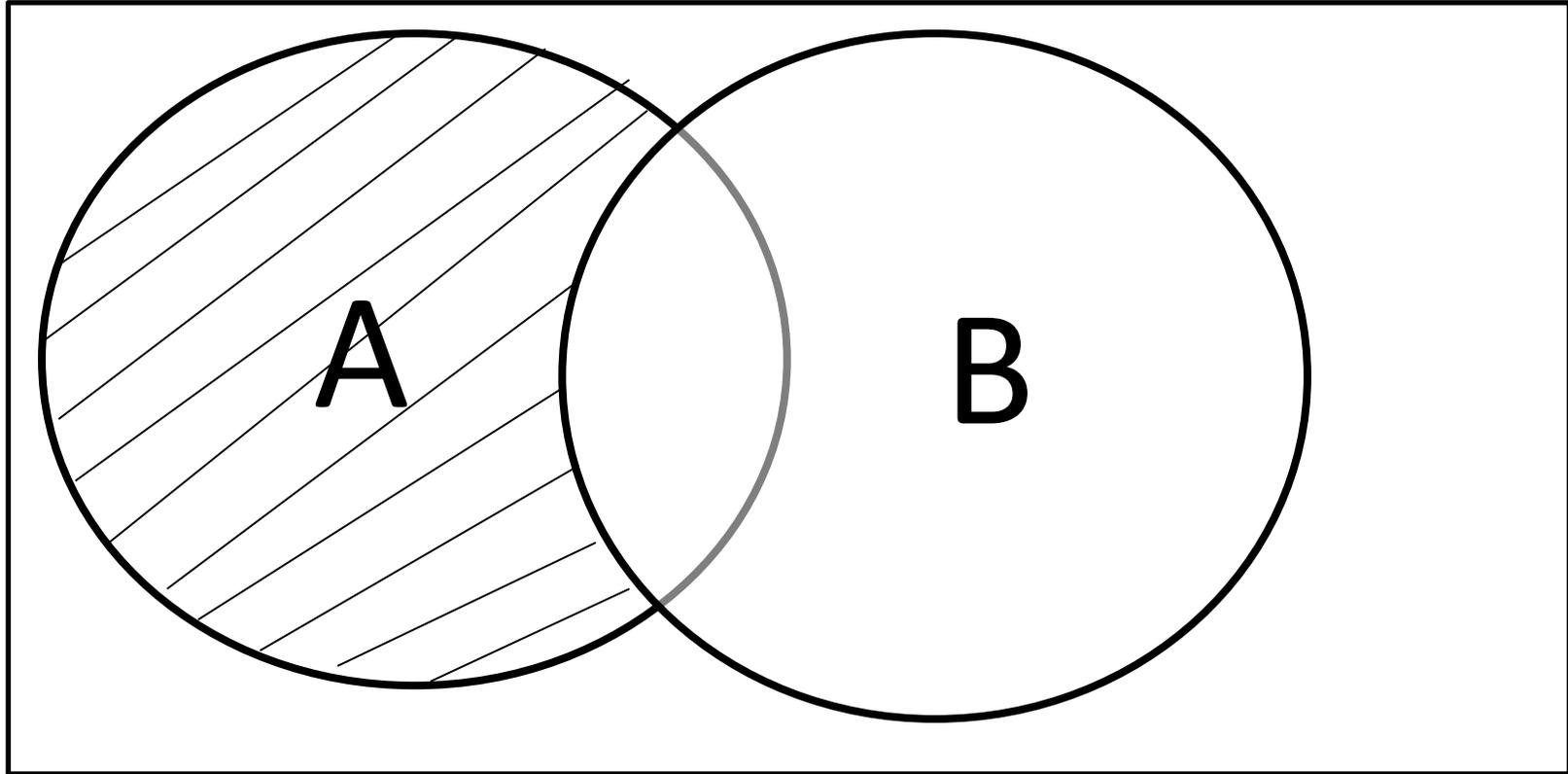
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل تقاطع مجموعتين A و B



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل \bar{A}



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل $A-B$



الضرب الديكارتي:

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ، B ($A \times B$) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x, y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .
بالرموز

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$



تابع : الضرب الديكارتي:

مثال:

إذا كانت $A = \{-2, 1\}$ و $B = \{-3, 1, 4\}$

فأوجد $A \times B$ و $B \times A$

الحل:

$$A \times B = \{(-2, -3), (-2, 1), (-2, 4), (1, -3), (1, 1), (1, 4)\}$$

$$B \times A = \{(-3, -2), (-3, 1), (1, -2), (1, 1), (4, -2), (4, 1)\}$$



تابع : الضرب الديكارتي:

مثال:

أنشئ $A \times B$ ، علما بان

$$B = \{w, x, y\} \text{ و } A = \{1, 2\}$$

الحل:

$$A \times B = \{(1, w), (1, x), (1, y), (2, w), (2, x), (2, y)\}$$



تابع : الضرب الديكارتي:

ملاحظات:

- لاحظ أن عدد عناصر A عنصران وعدد عناصر B ثلاثة عناصر، وان عدد عناصر $A \times B$ يساوي عدد عناصر $B \times A$ و يساوي ٦ عناصر (أزواج مرتبة) $= 2 \times 3 =$ عدد عناصر $A \times B$ عناصر B .
- أيضا يمكننا ملاحظة أن

$$A \times B \neq B \times A$$



تابع الضرب الديكارتي:

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1 = x_2)$ ، وكان المسقط الثاني في الزوج الأول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني،
 $(y_1 = y_2)$



تابع الضرب الديكارتي:

مثال:

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $\left(x + 1, y - \frac{1}{2}\right) = \left(4, \frac{3}{2}\right)$

الحل:

$$x + 1 = 4 \Rightarrow x = 4 - 1 = 3$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$



مجموعة المجموعات (مجموعة القوى):

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية ϕ والمجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز $P(S)$.

مثال:

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a, b, c\}$



تابع : مجموعة المجموعات (مجموعة القوى):

الحل:

مجموعة المجموعات هي:

$$P(S) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

ملاحظة: إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فإن عدد عناصر $P(S)$ يساوي 2^n .

تمرين: أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{1, 2\}$



مجموعة الأعداد:

١. مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

٢. مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$



تابع: مجموعة الأعداد:

٣. مجموعة الأعداد النسبية:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in Z; b \neq 0 \right\}$$

٤. مجموعة الأعداد غير النسبية :

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة الأعداد النسبية مثل $\sqrt{2}$ والنسبة التقريبية π والعدد النايبييري e غيرها.



تابع: مجموعة الأعداد:

٥. مجموعة الأعداد الحقيقية:

وهي المجموعة التي تحتوي على كافة الأنواع السابقة ويرمز لها بالرمز \mathbb{R} وتمثل هندسياً بخط الأعداد.

$$N \subset Z \subset Q \subset R \quad \text{ملاحظة:}$$

تمارين:

١. افرض أن $A = \{3, 4, 5, x, y\}$ و $B = \{4, x, y, z\}$ ضع الرمز \in أو \notin في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .

(i) 3 _____ A

(ii) 3 _____ B

(iii) x _____ A

(iv) x _____ B



تابع: تمارين:

$$(v) z \text{ ————— } A$$

$$(vi) z \text{ ————— } B$$

$$(vii) 1 \text{ ————— } A$$

$$(viii) 1 \text{ ————— } B$$

$$(ix) A \text{ ————— } A$$

$$(x) B \text{ ————— } B$$

٢. اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية . يمكن استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر

- i. $A = \{x: x \text{ عدد طبيعي اصغر من } 7\}$
- ii. $B = \{x: x \text{ عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على } 2\}$
- iii. $C = \{y: y \text{ حرف من حروف الهجاء المحصور بين } c \text{ و } h\}$
- iv. $D = \{x: x \text{ عدد طبيعي فردي اصغر من } 17\}$



تابع: تمارين:

٣. ضع الرمز = أو \neq في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

(i) $\{a, b, c\}$ ————— $\{b, c, a\}$

(ii) $\{0, 1, 2, 3\}$ ————— $\{0, 1, 2, 3, 3\}$

(iii) $\{x, y, z\}$ ————— $\{x, y, z, w\}$



تابع: تمارين:

٤. افرض أن $X = \{1,2,3,4\}$ و $Y = \{4,6,8,10\}$ ضع الرمز \subset أو $\not\subset$ أو \subseteq في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

(i) X _____ Y

(ii) Y _____ X

(iii) X _____ $X \cup Y$

(iv) ϕ _____ X

(v) ϕ _____ Y



تابع: تمارين:

٥. إذا كانت المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ١٠ ، افرض ان $A = \{1,3,5\}$ و $B = \{2,4,6\}$ كون المجموعات الآتية:

(i) $A \cup B$

(ii) $A \cap B$

(iii) \bar{A}

(iv) \bar{B}



تابع: تمارين:

$$(v) \overline{A \cup B}$$

$$(vi) \overline{A \cap B}$$

$$(vii) \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(viii) \overline{A \cap U}$$

$$(ix) A \cap A$$



تابع: تمارين:

٦. لتكن المجموعة الكلية $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ولتكن $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$, $C = \{2, 4, 6\}$

فأوجد

(i) $A \times B$

(ii) $B \times A$

(iii) $B \times B$

(iv) $A \times (B \cap C)$

(v) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(vi) $\overline{C} \times B$



تابع: تمارين:

٧. إذا كانت

$$A = \{x: \text{عدد طبيعي اصغر من } 5\}$$

$$B = \{y: \text{عدد طبيعي اصغر من } 3\}$$

هل $A \times B = B \times A$

٨. أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x, y^2) = (2x - 2, 1)$

بِسْمِ اللَّهِ
بِحَمْدِ اللَّهِ

