المحاضرة العاشرة

الاشتقاق

الاشتقاق:

متوسط التغير:

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

أذا
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث $x_2 = x_1 + \Delta x$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من ١ إلى 1.5

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1.5$$

$$f(1)=1^2+2=1+2=3$$

$$f(1.5)=(1.5)^2+2=2.25+2=4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4.25-3}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تتغير x من ١ إلى 2

الحل:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

$$f(1) = 3\times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$f(2) = 3\times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من ٢ إلى 4

الحل:

$$x_1=2 \quad , \quad x_2=4$$

$$f(2)=2^2+2=4+2=6$$

$$f(4)=4^2+2=16+2=18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{18-6}{4-2}=\frac{12}{2}=6$$

تابع: الاشتقاق:

تعريف المشتقة الأولى:

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت) تسمى المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \text{ ، } f'(x) \text{ ، } y' \text{ ، } \frac{d}{dx} f(x)$$

إذاً

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل (المبادئ الأولية للتفاضل)

تابع: الاشتقاق:

مثال:

إذا كانت $f(x) = x^2$ أوجد $f'(x)$ من المبادئ الأولية .

الحل:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

تابع: الاشتقاق:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x.\Delta x+(\Delta x)^2-\cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

ملاحظة:

وعندما تكون للدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a تكون قيمتها $f'(a)$ ويقال أن الدالة قابلة للاشتقاق في a .

تابع: الاشتقاق:

جبر الاشتقاق:

١. إذا كانت $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = x^5$

II. $y = x^{-3}$

III. $y = x^{\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

II. $$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$$

III. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

تابع: الاشتقاق:

٢. إذا كانت $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 5$

II. $y = -10$

III. $y = \frac{3}{4}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $$\frac{dy}{dx} = 0$$

II. $$\frac{dy}{dx} = 0$$

III. $$\frac{dy}{dx} = 0$$

تابع: الاشتقاق:

٣. إذا كانت $y = cx^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = ncx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 3x^4$

II. $y = -2x^7$

III. $y = 16x^{\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $$\frac{dy}{dx} = 12x^3$$

II. $$\frac{dy}{dx} = -14x^6$$

III. $$\frac{dy}{dx} = 8x^{-\frac{1}{2}}$$

تابع: الاشتقاق:

٤. إذا كانت $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$
حيث $n \neq 0$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n-1)ax^{n-2} + na_n x^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$

تابع: الاشتقاق:

٥. إذا كانت $y=[f(x)]^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=n[f(x)]^{n-1}.\ f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=(2x^2+5)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=8(2x^2+5)^7.\ 4x=32x(2x^2+5)^7$$

تابع: الاشتقاق:

٦. إذا كانت $y=\left(f(x).g(x)\right)$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\left(x^2+1\right)\left(2x^3-2\right)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=2x(2x^3-2)+6x^2(x^2+1)$$

$$=4x^4-4x+6x^4+6x^2$$

$$=10x^4+6x^2-4x$$

تابع: الاشتقاق:

٧. إذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x))}{[g(x)]^2}$$

مثال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{2x+5}{3x-4}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x-4)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-4)^2}$$

$$=\frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2}$$

$$=\frac{-23}{(3x-4)^2}$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة: إذا كانت $y = \dfrac{c}{f(x)}$ حيث c ثابت فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \,.\, f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مثال: أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \dfrac{3}{x^2 - 2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{-6x}{(x^2-2)^2}$$

تابع: الاشتقاق:

٨. إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$ (قانون السلسلة)

مثال: إذا كانت $y = u^2 + 5u$ ، $u = x + 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{du} = 2u + 5$ ، $\frac{du}{dx} = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u+5)(1) = 2(x+3)+5 = 2x+11$$

تابع: الاشتقاق:

المشتقات العليا:

عندما نشتق الدالة للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,,\ f''(x)\,,\ y''$$

وعندما نشتق الدالة للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^3y}{dx^3}\,,\ f'''(x)\,,\ y'''$$

وهكذا

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$

تابع: الاشتقاق:

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 240x^2 + 72x - 48$$

$$\frac{dy^4}{dx^4} = 480x + 72$$

تمارين

١. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = 4x^2 - 3x^4$

ii. $y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$

iii. $y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right)$

iv. $y = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$

تمارين

v. $y = x + 1$

vi. $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$

vii. $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$

viii. $y = \dfrac{1}{2x + 3}$

ix. $y = (4x^2 + 5x - 2)^8$

تمارين

٢. أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

i. $y = u^3 - 2u \quad , \quad u = x^2 - 5x + 6$

ii. $y = u^2 - 2u^{-2} \quad , \quad u = x^2 + 2$

iii. $y = \dfrac{u^2 + 1}{u - 2} \quad , \quad u = 3x + 7$

تمارين

٣. أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

ii. $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

iii. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

iv. $y = \dfrac{1}{3x + 1}$

تمت
بحمد الله