جــــامعة الدمــــــــــام

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الرياضيات للإدارة

MATH 120

دكتور محمد تركي

أستاذ الرياضيات والاحصاء المساعد

الايميل الجامعي

mstorky@uod.edu.sa

الفصل الأول: الدوال (الازواج المرتبه – الضرب الديكارتي – العلاقة والدالة – الدوال – معادلات الخط المستقيم)

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (معدل الربح البسيط-معدل الربح المركب)

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (قوانين النهايات-الاتصال – تطبيقات اقتصادية

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) -مشتقات الدوال -التطبيقات الاقتصادية: (الإيراد الحدي، التكلفة الحدية، الربح الحدي)

الفصل الخامس: التكامل – التكامل الغير محدود – التكامل المحدود – تطبيقات اقتصادية – المعادلات التفاضلية

خطة توزيع الدرجات	
البنود	الدرجة
تحميل المحاضرات والمادة العلمية او مشاهدتها	10
الواجبات (4 واجبات)	10
الاختبار الفصلي	10
الاختبار النهائي	70
المجموع	100

اولا: المجموعات

$A = \{1, 2, 5, 7\} \quad \Longrightarrow \quad n(A) = 4$

$B = \{3, \ 8, \ 9, \ 11, \ 15\} \quad \Longrightarrow \quad n(B) = 5$

$\phi = \{\,\} \quad \Longrightarrow \quad n(\phi) = 0$

$X = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \quad \Longrightarrow$ مجموعة غير محدودة

$Y = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \Longrightarrow$ مجموعة محدودة

$\{5, 7\} = \{7, 5\} \quad \Longrightarrow$ الترتيب ليس له اهمية

الزوج المرتب

المسقط الأول ← (a, b) → المسقط الثاني

الاحداثي الأول ← $(2, 4)$ → الاحداثي الثاني

الاحداثي السيني ← $(6, 1)$ → الاحداثي الصادي

$(a, b) \neq (b, a) \quad \Longrightarrow$ الترتيب له اهمية

$(x, y) = (a, b) \quad \Longrightarrow \quad x = a, \quad y = b$

مقارنة بين المجموعة والزوج المرتب

	المجموعة	الزوج المرتب
الشكل	{ }	( )
الوجود	$\emptyset = \{\ \}$ يوجد مجموعة خالية	لا يوجد زوج مرتب خالي
عدد العناصر	$\emptyset, \{5\}, \{2,6,7\}, \{2,4,6,\ldots\}$ يوجد مجموع خالية او بها عنصر او عنصرين او ثلاثة او عدد لا نهائي	الزوج المرتب يتكون فقط من مسقطين المسقط الأول والمسقط الثاني او احداثيين الإحداثي الأول والاحداثي الثاني
ترتيب العناصر	{3,5} = { 5,3} الترتيب ليس له أهمية	$(3,5) \neq (5,3)$ الترتيب مهم

$(x, y) = (3, 7) \longrightarrow x = 3,\ \ y = 7$

$(a + 1, b - 2) = (3, 1) \longrightarrow a = 2,\ \ b = 3$

$(r - 1, 6) = (5, t + 2) \longrightarrow r = 6,\ \ t = 4$

$(a + 4, 5) = (9, b - 4) \longrightarrow a =..,\ \ b = \cdots$

الضرب الديكارتي لمجموعتين X و Y

هو عبارة عن كل الازواج المرتبة التي مسقطها الاول من X ومسقطها الثاني من Y

1-مثال إذا كان $y = \{a, b\}$, $x = \{1, 3, 5\}$ فأوجد حاصل الضرب الديكارتي

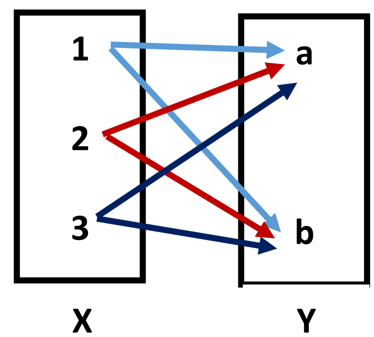
$X \times Y$ and $Y \times X$, $X \times X$, $Y \times Y$ ومثله بمخطط سهمي

الحـــــــــــــــــل

1) $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{a, b\}$,

$X \times Y = \{1, 3, 5\} \times \{a, b\}$,

$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b)\}$

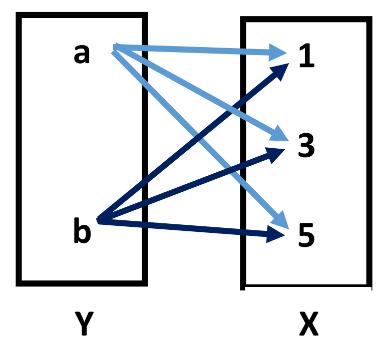


المخطط السهمي X × Y

2) $Y = \{a, b\}$, $X = \{1, 3, 5\}$,

$Y \times X = \{a, b\} \times \{1, 3, 5\}$,

$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (b, 5)\}$

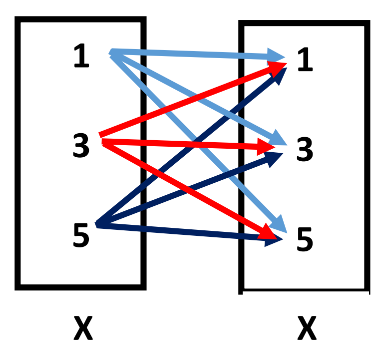


المخطط السهمي X × Y

3) $X = \{1, 3, 5\}$, $X = \{1, 3, 5\}$,

$X \times X = \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}$,

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \left\{ \begin{matrix} (1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), \\ (5,1), (5,3), (5,5), \end{matrix} \right\}$$

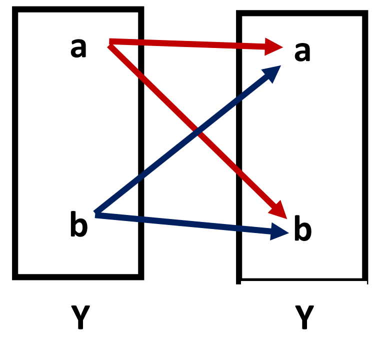


المخطط السهمي X × X

4) $Y = \{a, b\}, \quad Y = \{a, b\},$

$Y \times Y = \{a, b\} \times \{a, b\},$

$X \times Y = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$



المخطط السهمي Y × Y

ملاحظات على الضرب الديكارتي

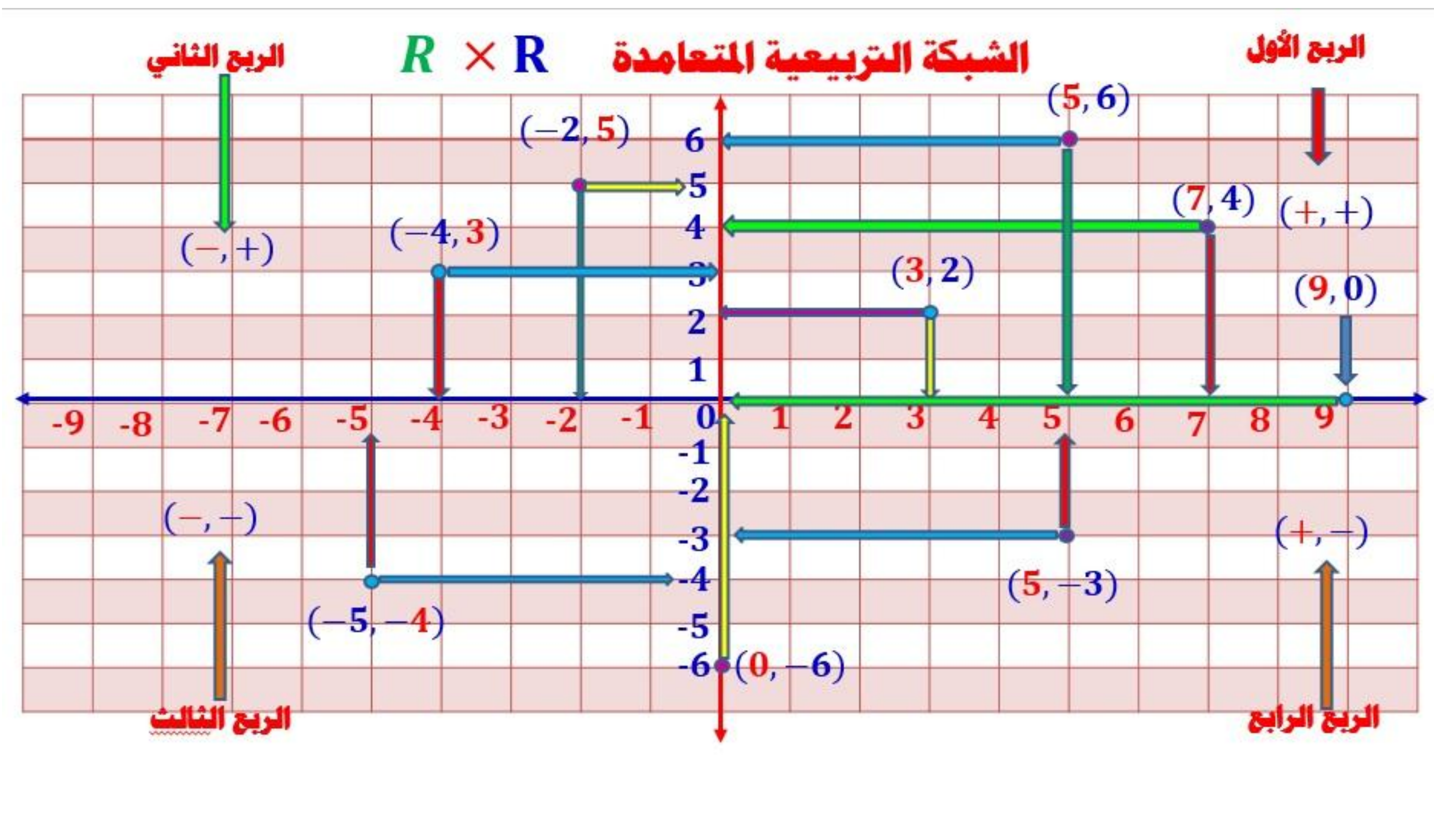
1) إذا كان المجموعة $A = \{2, 6, 9\}$ فانه يرمز لعدد عناصر المجموعة A $\quad n(A) = 3$

2) اذا كان المجموعة $B = \{4, 8\}$ فانه يرمز لعدد عناصر المجموعة B $\quad n(B) = 2$

3) فان عدد عناصر حاصل الضرب $A \times B$ يرمز له بالرمز $n(A \times B)$

$$n(A \times B) = 6, \quad n(B \times A) = 6 \quad \Rightarrow n(A \times B) = n(B \times A)$$

$$(3, 4) \neq (4, 3) \quad \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$



ملاحظات على الشبكة التربيعية

أي نقطة تقع في الربع الاول يكون احداثياتها موجبين معا $(+,+)$

أي نقطة تقع في الربع الثاني يكون احداثياتها $(-,+)$

أي نقطة تقع في الربع الثالث يكون احداثياتها سالبين معا $(-,-)$

أي نقطة تقع في الربع الرابع يكون احداثياتها $(+,-)$

أي نقطة تقع على محور السينات احداثها الصادي يساوي صفر $(\pm,0)$

أي نقطة تقع علي محور الصادات احداثها السيني يساوي صفر $(0,\pm)$

تمارين متنوعة

1) النقطة التي احداثياتها $(2,-5)$ تقع في الربع.......

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

2) النقطة (-1,-3) تقع في الربع ....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

3) النقطة (0,7) تقع في ....

أ) الربع الأول ب) محور السينات ج) الربع الثالث د) محور الصادات

4) اذا كانت النقطة (x ,x+3) تقع في الربع الثالث فان x يمكن ان تساوي ....

أ) -1 ب) 3 ج) -4 د) -2

5) اذا كان (a, b) = (3, 5) فان a+ b= ...

أ) 3 ب) 5 جـ) 8 د) 2

6) اذا كان $n(y^2)=25$ فان n(y)= ...

أ) 2 ب) 5 جـ) 10 د) 15

7) اذا كان $n(X\times Y)=24, n(X)=6$ فان n(y)= ...

أ) 2 ب) 8 جـ) 6 د) 4

8) اذا كان $X\times Y=\{(2,6),(2,a),(3,6),(3,a),(5,6),(5,a)\}$ كان فان x=........

أ) {2,3,5} ب) {2,3} جـ) {6,a} د) {5,6}

9) اذا كان $n(X^2) = 9$, $n(X\times Y)=12$ فان n(y) =.....

أ) 3 ب) 6 جـ) 4 د) 21

10) $\{0\} \times \{5\} = \cdots..$

أ) (0,5) ب) {(0,5)} جـ) 5 د) 0

11) اذا كان (3, 5) ϵ { 3, 7 } $\times$ { a , 6 } فان a= .....

أ) 3 ب) 7 جـ) 5 د) 6

12) اذا كان X × Z = Z × X, فان ....

أ) $X = Z$ ب) $X \neq Z$ جـ) $X \cap Z = X$ د) $X \cap Z = Z$

13) اذا كان X={2, 3} و Y={ 4, 5, 6} فان (6,3) $\in \cdots$

أ) $X \times Y$ ب) $Y \times X$ جـ) X^2 د) Y^2

....

العلاقة والدالة

العلاقة من مجموعة X الي مجموعة Y هي

هي علاقة تربط بعض او كل عناصر المجموعة X ببعض او كل عناصر المجموعة Y

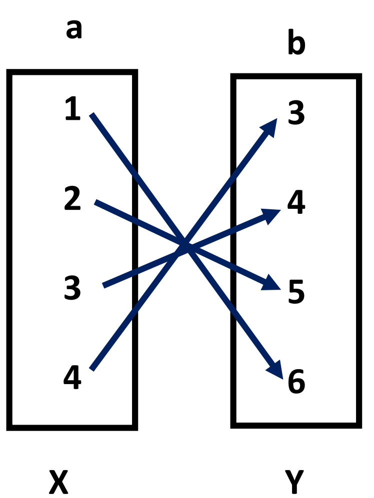
العلاقة من مجموعة X الي مجموعة Y هي

او هي بعض او كل الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من X ومسقطها الثاني من Y

مثال إذا كانت المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4\}$ والمجموعة $Y = \{3, 4, 5, 6\}$ وكانت R علاقة من X الي Y حيث aRb تعني ان $a + b = 7$ اكتب بيان العلاقة R ومثله بمخطط سهمي وبين هل العلاقة R دالة ام لا

الحـــــــــــــــــــــــــل

$$R = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3)\}$$



العلاقة دالة لان كل عنصر من عناصر x خرج منه سهم واحد فقط

مجال الدالة هو عناصر المجموعة x يساوي {1,2,3,4}

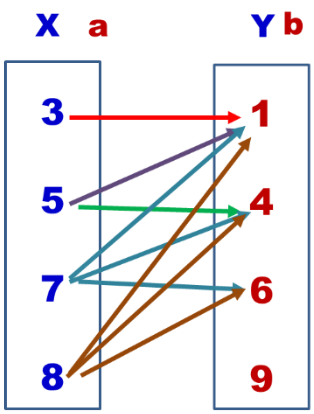
مدي الدالة هو ما وصلت اليه الأسهم في y يساوي { 3,4,5,6}

....

مثال اذا كانت المجموعة $X = \{3, 5, 7, 8\}$ و المجموعة $Y = \{1, 4, 6, 9\}$ وكانت R علاقة من X الي Y حيث aRb تعني ان a > b اكتب بيان العلاقة R ومثله بمخطط سهمي وبين هل العلاقة R دالة ام لا

الحـــــــــــل

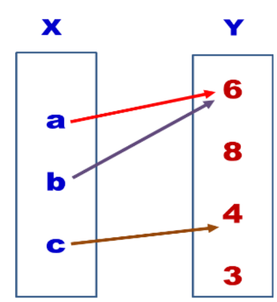
$R = \{(3,1), (5,1), (5,4), (7,1), (7,4), (7,6), (8,1), (8,4), (8,6)\}$



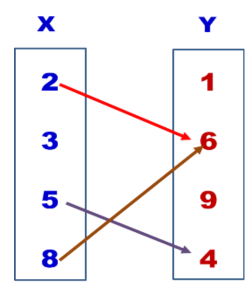
العلاقة ليست دالة لان العناصر 5 و 7 و 8 خرج منها اكثر من سهم

....

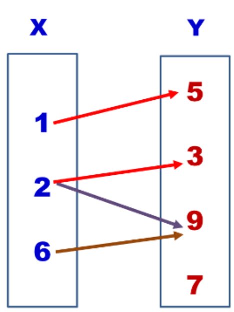
امثلة بين أي العلاقات التالية تمثل دالة مع ذكر السبب واذكر مجال ومدي الدالة في حالة العلاقة دالة



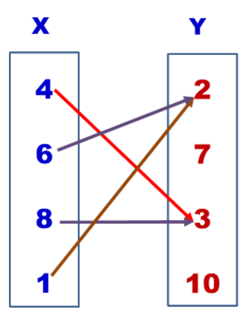
الشكل a



الشكل b



الشكل c



الشكل d

1) اذا كان $(a-2, 3) = (2, b)$ فان $a - b = \dots$

أ) 3 ب) 2 ج) 1 د) zero

2) اذا كانت $n(X) = 2$ ، $n(X \times Y) = 6,$ فان $n(Y^2) = \cdots \dots \dots$

أ) 9 ب) 3 ج) 2 د) 4

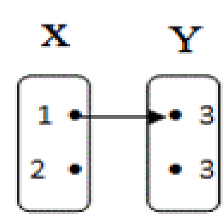
3) اذا كانت $(3,5) \in \{3,6\} \times \{x, 8\}$ فان x=..........

أ) 4 ب) 5 ج) 6 د) 8

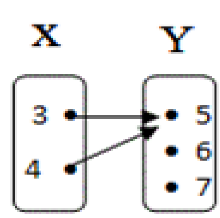
4) اذا كانت $X = \{3,4\}, Y = \{5, 6, 2\}$ فان $(4,3) \in \dots \dots$

أ) Y^2 ب) X^2 ج) Y× X د) X×Y

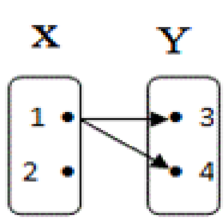
5) المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي ....



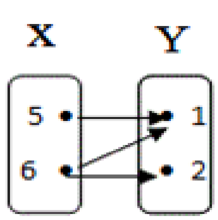
أ)



ب)

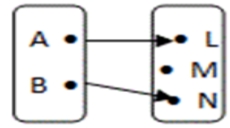


ج)

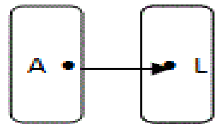


د)

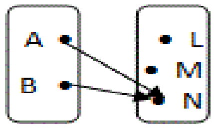
6) المخطط الذي لا يمثل دالة فيما يأتي ....



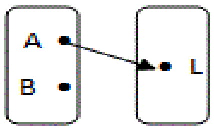
a



b



c



d

7) $\{1\} \times \{7\} = \cdots \ldots \ldots \ldots$

أ) (1, 7)   ب) {(1, 7)}   ج) 7   د) 1

8) اذا كانت العلاقة $R = \{(1,3)\,,(2,5)\,,(5,7),(4,9)\}$ تمثل دالة فان مداها يساوي

أ) {3, 5,7,9}   ب) {1,2,4,5}   ج) {2,3,4,5}   د) {3,4,6,7}

9) اذا كان $(a-3\,,4) = (1\,,b)$ فان $a - b = \ldots$

أ) 3   ب) 2   ج) 1   د) zero

10) اذا كانت $x = \{3,7,9\}$ ، $n\,(X \times Y) = 6,$ فان $n\,(Y^2) =$.........

أ) 9   ب) 3   ج) 2   د) 4

الدوال كثيرات الحدود

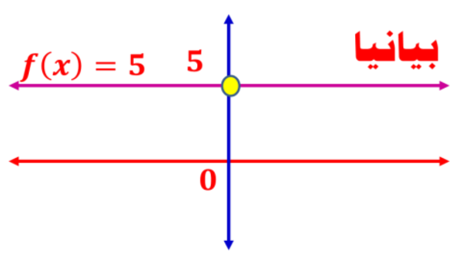
الدالة الثابتة هي دالة لها قيمة ثابتة مهما تغيرت قيمة المتغير x

$f(x) = 5,\qquad f(-5) = 5$

$f(\sqrt{5}) = 5,\qquad f(2) = 5$

$f(-2) = 5\,,\qquad f(-5) = 5$

بيانيا



الدالة F(x)= 5 يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (0,5) ومداها يساوي {5}

$\boxed{f(x) = -2}$

$f(5) = -2$

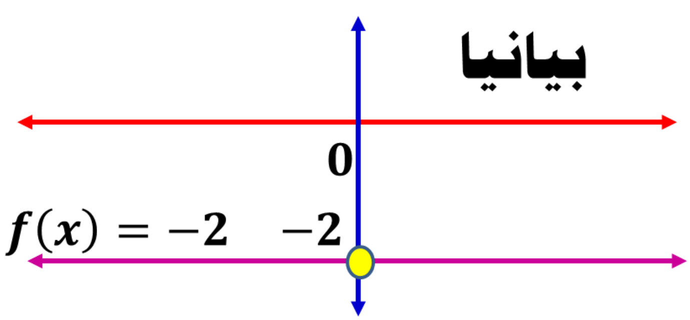
$f(4) = -2$

$f(2) = -2$

مجال الدالة = R

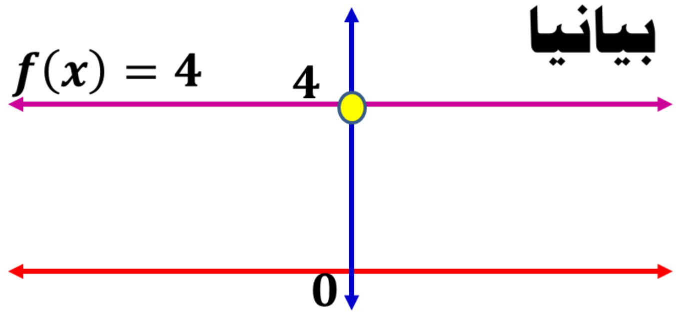
مدي الدالة ={-2}

بيانيا



الدالة F(x)= -2 يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (0,-2) ومداها يساوي {-2} الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية

بيانيا



$f(x) = 4$

$f(2) = 4$

$f(5) = 4$

$f(-7) = 4$

مجال الدالة = R

مدي الدالة ={4}

الدالة F(x)= 4 يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (0,4) ومداها يساوي {4} الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية

الدالة الخطية: هي دالة من الدرجة الاولي أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو واحد

$f(x) = 3x - 2$ $\quad$ $f(x) = 2x$

$f(x) = 5x + 1$ $\quad$ $f(x) = 5 - 4x$

الدالة الخطية من الدرجة الاولي

مجال الدالة = R $\quad$ **مدي الدالة** = R

الدالة التربيعية : هي دالة من الدرجة الثانية أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 2

$f(x) = 3x^2 + 5x + 6$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 2x - 1$

الدالة التربيعية من الدرجة الثانية

$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = 2 + 5x - 2x^2$

الدالة التكعيبية: هي دالة من الدرجة الثالثة أي أن أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 3

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 4$$

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 11$$

$$f(x) = 2 + 5x^2 - 5x^3$$

$$f(x) = x^3 + 4$$

الدالة التكعيبية من الدرجة الثالثة

تزايد وتناقص الدالة على فترة

في حالة دراسة تزايد وتناقص الدالة في فترة

اولا: نحدد قيمة اختيارية للمتغير x في الفترة ولتكن x_1

ثانيا: نوجد قيمة الدالة عند x_1 وهي $f(x_1)$

ثالثا: نحدد قيمة اختيارية اخري للمتغير x في الفترة ولتكن x_2 بحيث $x_2 > x_1$

رابعا: نوجد قيمة الدالة عند x_2 وهي $f(x_2)$

إذا كان $f(x_2) > f(x_1)$ فان الدالة تزايديه في الفترة

إذا كان $f(x_2) < f(x_1)$ فان الدالة تناقصية في الفترة

تمرين ابحث اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \qquad in\ [-2, 1]$$

الحـــــــــــــــل

$$x_1 = -1 \quad \in [-2, 1]$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 \ = 12$$

$$x_2 = 0 \in [-2, 1] \ , \quad x_2 > x_1$$

$$f(0) = (0)^2 - 5(0) + 6 = 0 + 0 + 6 \ = 6$$

الدالة تناقصية في الفترة $\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

تمرين ابحث اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \qquad in\ [1, 4]$$

الحـــــــــــــــل

$$x_1 = 2 \in \ [1, 4]$$

$$f(2) = (2)^2 + 3(2) + 2 \ = 4 + 6 + 2 = 12$$

$$x_2 = 3 \in \ [1, 4] \ , \quad x_2 > x_1$$

$f(3) = (3)^2 + 3(3) + 2 = 9 + 9 + 2 = 20$

الدالة تزايديه في الفترة $\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

تمرين ابحث اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5 \qquad in\ [0,5]$$

الحـــــــــــــــل

$x_1 = 1 \in\ [0,5]$

$f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 5 = 1 + 1 - 5 = -3$

$x_2 = 4 \in\ [0,5]\ , \quad x_2 > x_1$

$f(4) = (4)^3 + (4)^2 - 5 = 64 + 16 - 5 = 75$

الدالة تزايديه في الفترة $\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

تمرين ابحث اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = 2 + 5x^2 - x^3 \qquad in\ [-1,3]$$

الحـــــــــــــــل

$x_1 = 0 \in\ [-1,3]$

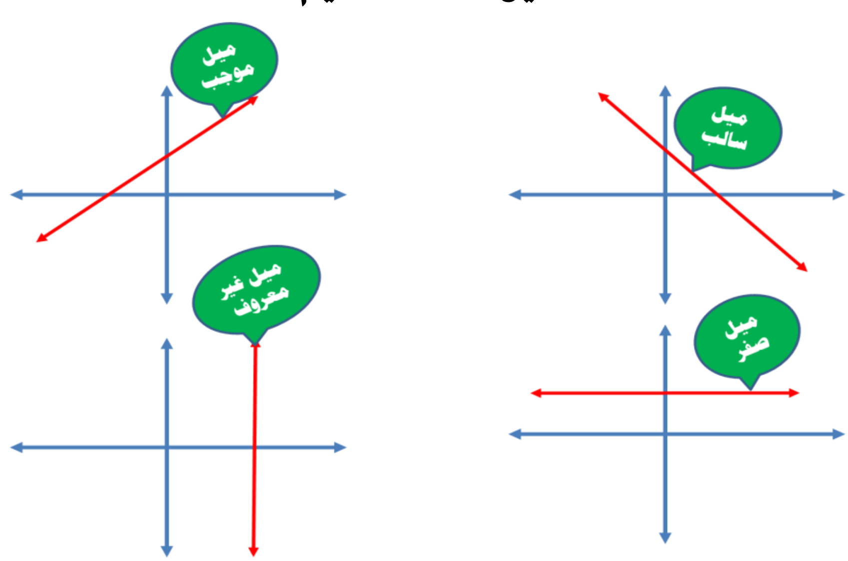
$f(1) = 2 + 5(0)^2 - (0)^3 = 2 + 0 - 0 = 2$

$x_2 = 1 \in\ [-1,3]\ , \quad x_2 > x_1$

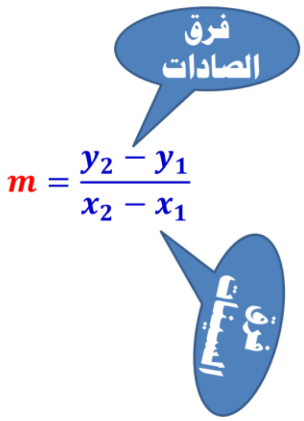
$f(1) = 2 + 5(1)^2 - (1)^3 = 2 + 5 - 1 = 6$

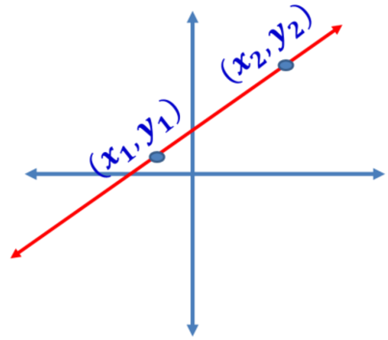
الدالة تزايديه في الفترة $\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

ميل الخط المستقيم



ميل الخط المستقيم المار بنقطتين





مثال اوجد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين $(2,5)$, $(1,3)$

الحـــــــــــــــــل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

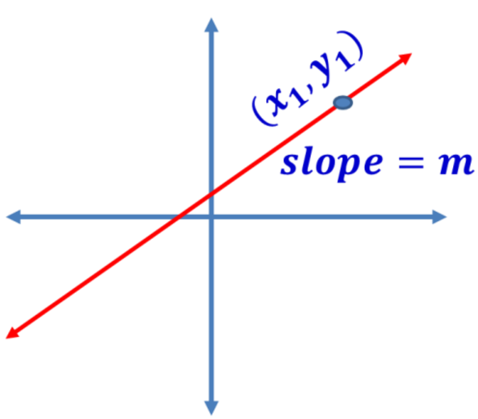
مثال اوجد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين $(6,3)$, $(-2,1)$

الحـــــــــــــــــل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{6-(-2)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

الحالات المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

1-) معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله m ويمر بنقطة معلومة (x_1, y_1)



$$(y - y_1) = m.(x - x_1)$$

مثال1) اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(2,-1)$ وميله = 3

الحــــــــــــــــــل

$$(y-y_1)=m.(x-x_1)$$

$$(y-(-1))=3.(x-2)$$

$$y+1=3\,x-6$$

$$y=3.x-6-1$$

$$y=3x-7$$

مثال2 اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(-3,5)$ وميله = 1-

الحــــــــــــــــــل

$$(y-y_1)=m.(x-x_1)$$

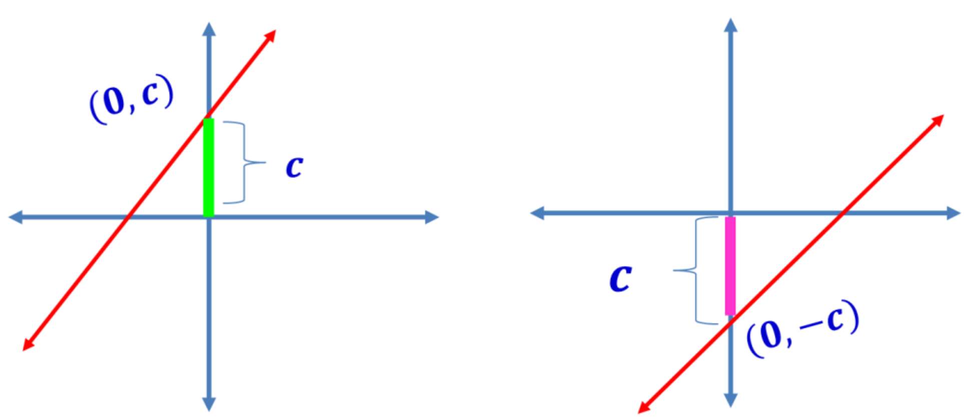
$$(y-5)=-1.(x+3)$$

$$y-5=-\,x-3$$

$$y=-x-3+5$$

$$y=-x+2$$

2-) معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله m وطول الجزء المقطوع من محور الصادات c



$$y=m\,x+c$$

مثال1) اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 وطول الجزء المقطوع من محور الصادات الموجب جزءا طوله 4 وحدات

الحـــــــــــــــــل

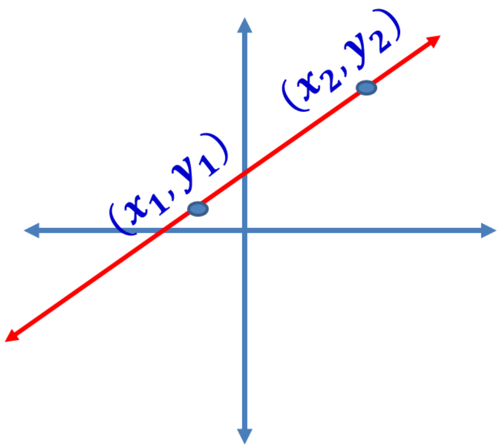
$$m = 2,\quad c = 4,\qquad y = m\,x + c\,,\qquad y = 2\,x + 4$$

مثال2) اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات السالب جزءا طوله 7 وحدات

الحـــــــــــــــــل

$$m = \frac{1}{3},\quad c = -7,\qquad y = m\,x + c\,,\qquad y = \frac{1}{3}x - 7$$

3-) معادلة الخط المستقيم يمر بنقطتين معلومتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2)



$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(5, 8)$ و $(1, 3)$

الحـــــــــــــــــل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{8 - 3}{5 - 1} \qquad \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4y - 12 = 5x - 5 \qquad \Rightarrow 4y = 5x - 5 + 12 \qquad \Rightarrow 4y = 5x + 7$$

مثال اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 6)$ و $(4, 5)$

الحـــــــــــــــــل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 4} = \frac{6 - 5}{-1 - 4} \qquad \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 4} = \frac{1}{-5}$$

$$\Rightarrow -5y + 25 = x - 4 \qquad \Rightarrow -5y = x - 4 - 25 \qquad \Rightarrow -5y = x - 29$$

تطبيقات اقتصادية وتجارية

مثال 1) حدد نقطة توازن السوق بالنسبة للقانوني الطلب والعرض التاليين:

قانون الطلب : $y = 25 - 2x$ ... (1)

قانون العرض : $y = 3x + 5$ ... (2)

الحـــــــــــــــل

عدد نقطة توازن السوق: الطلب = العرض

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

$$3x + 2x = 25 - 5$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

بالتعويض في معادلة : $y = 25 - 2(4)$

$$y = 25 - 8$$

$$y = 17$$

نقطة توازن السوق هي $(4, 17)$

تمارين متنوعة

1) إذا كانت $f(x) = 2$ فان $5 \times f(3) = \ldots$

أ) 3 ب) 10 ج) 15 د) 5

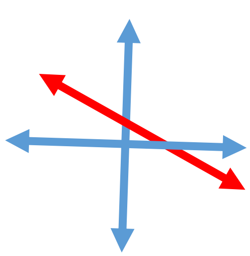
2) الدالة $f(x) = 2x^3 + 5x^5 + 4x - 11$ من الدرجة

أ) الاولي ب) الثانية ج) الثالثة د) الخامسة

3) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويقطع جزءا من محور الصادات السالب طوله 5 وحدات هي

أ) $y = -2x + 5$ ب) $y = 2x - 5$ ج) $y = 5x - 2$ د) $y = 2x + 2$.

4) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل



أ) موجب ب) غير معروف ج) سالب د) صفر

5) ميل المستقيم المار بالنقطتين $(4, 6)$, $(1, 3)$ يساوي ....

أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

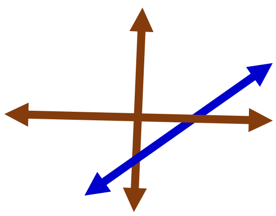
6) الدالة $f(x) = 7$ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

أ) $(7,0)$ ب) $(0,7)$ ج) $(7,7)$ د) $(0,0)$

7) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويمر بالنقطة $(1,2)$ هي

أ) $y = 3x + 1$ ب) $y = x - 3$ ج) $y = 3x - 1$ د) $y = x + 3$.

8) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل



أ) موجب ب) غير معروف ج) سالب د) صفر

9) اذا كان $(3,5) \in \{3,7\} \times \{a,6\}$ فان a= .....

أ) 3 ب) 7 جـ) 5 د) 6

10) اذا كان $X \times Z = Z \times X$ فان ....

أ) $X = Z$ ب) $X \neq Z$ جـ) $X \cap Z = X$ د) $X \cap Z = Z$

11) اذا كان $X=\{2,3\}$ و $Y=\{4,5,6\}$ فان $(6,3) \in \cdots$

أ) $X \times Y$ ب) $Y \times X$ جـ) X^2 د) Y^2

12) $\{1\} \times \{7\} =$............

أ) $(1, 7)$ ب) $\{(1, 7)\}$ ج) 7 د) 1

13) اذا كانت العلاقة $R=\{(1,3), (2,5), (5,7), (4,9)\}$ تمثل دالة فان مداها يساوي

أ) $\{3, 5,7,9\}$ ب) $\{1,2,4,5\}$ ج) $\{2,3,4,5\}$ د) $\{3,4,6,7\}$

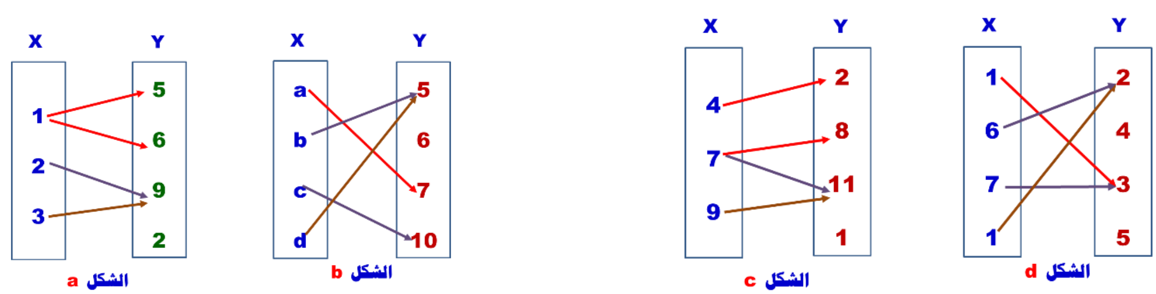
14) اذا كان $(a - 3, 4) = (1, b)$ فان $a - b = \ldots$

أ) 3 ب) 2 ج) 1 د) zero

15) اذا كانت $X= \{4, 11\}$ ، $n(X \times Y) = 6$, فان $n(Y^2) =$....

أ) 9 ب) 3 ج) 2 د) 4

تمرين) بين أي العلاقات التالية تمثل دالة مع ذكر السبب واذكر مجال ومدي الدالة في حالة العلاقة دالة



المحاضرة الثالثة: الرياضيات المالية

الفائدة

الفائدة البسيطة | **الفائدة المركبة**

<u>الفائدة البسيطة:</u> تحسب في نهاية كل سنة من قيمة أصل المبلغ المودع

مثال: اودع شخص في احد البنوك مبلغ 1000ريال بمعدل فائدة بسيطة 10% من اصل المبلغ

نهاية السنة الاولي: الفائدة البسيطة تساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100$

نهاية السنة الثانية: الفائدة البسيطة تساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100$

نهاية السنة الثالثة: الفائدة البسيطة تساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100$

مجموع الفوائد في ثلاث سنوات يساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} \times 3 = 300$

مجموع الفوائد في خمس سنوات يساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} \times 5 = 500$

الفائدة المركبة

مثال: اودع شخص في احد البنوك مبلغ 1000 ريال بمعدل فائدة بسيطة 10% من اصل المبلغ

نهاية السنة الاولي: فائدة السنة الاولي $I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100$

تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الاولي فيصبح أصل المبلغ = 1000+ 100 = 1100

نهاية السنة الثانية: فائدة السنة الثانية $I = 1100 \times \frac{10}{100} = 110$

تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الثانية فيصبح أصل المبلغ = 1100+ 110 = 1210

نهاية السنة الثالثة: فائدة السنة الثالثة $I = 1210 \times \frac{10}{100} = 121$

تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الثالثة فيصبح أصل المبلغ = 1210+ 121 = 1331

هنا تسمي الفائدة - الفائدة المركبة

<u>أولا: الفائدة البسيطة</u> الفائدة البسيطة = أصل المبلغ × معدل الفائدة × المدة بالسنوات

$$I = P \times R \times T$$

الفائدة ، اصل المبلغ ، معدل الفائدة ، المدة بالسنوات

P	Principal	R	Rate
T	Time	I	Simple Interest

الجـــمـــلـــة: جملة المبلغ = اصل المبلغ + الفائدة البسيطة

$$S = P + I \qquad S: \ Sum$$

$$S = P + (P \times R \times T)$$

$$S = P.(1 + R.T)$$

مثال 1) اودع شخص مبلغ 10000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة 10 % سنويا لمدة خمس سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحــــــــــــــــل

$$P = 10000, \quad R = 0.10, \quad T = 5$$

$$I = P \times R \times T = 10000 \times 0.10 \times 5 = 5000$$

$$S = P + I = 10000 + 5000 = 15000$$

مثال 2) اقترضت علا مبلغ 30000 ريال من احد البنوك بمعدل فائدة 12 % سنويا لمدة عشر سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ

الحــــــــــــــــل

$$P = 30000, \quad R = 0.12, \quad T = 10$$

$$I = P \times R \times T = 30000 \times 0.12 \times 10 = 36000$$

$$S = P + I = 30000 + 36000 = 66000$$

ملحوظة هامة: إذا لم يعطي معدل الفائدة معدل سنوي فيجب تحويله الي معدل سنوي لحساب قيمة الفائدة البسيطة سنويا

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل نصف سنوي	المعدل النصف سنوي × 2	المعدل السنوي

اذا كان معدل الفائدة البسيطة 5 ٪ معدل نصف سنوي فان المعدل السنوي -

%5 | %5

% 10 = 2 × %5

معدل سنوي 10 %

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل ثلث سنوي كل أربعة شهور	المعدل الثلث سنوي × 3	المعدل السنوي

اذا كان معدل الفائدة البسيطة 5 ٪ معدل ثلث سنوي فان المعدل السنوي -

%5 | %5 | %5

% 15 = 3 × %5

معدل سنوي 15 %

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل ربع سنوي كل 3 شهور	المعدل الربع سنوي × 4	المعدل السنوي

اذا كان معدل الفائدة البسيطة 3 ٪ معدل ربع سنوي فان المعدل السنوي - ....

%3 | %3 | %3 | %3

% 12 = 4 × %3

معدل سنوي 12 %

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل شهري	المعدل الشهري × 12	المعدل السنوي

اذا كان معدل الفائدة البسيطة 2 ٪ معدل شهري فان المعدل السنوي - ....

%2 | %2 | %2 | %2 | %2 | %2 | %2 | %2 | %2 | %2 | %2 | %2

% 24 = 12 × %2

معدل سنوي 24 %

مثال1) اقترضت احلام مبلغ 4000 ريال من احد البنوك بمعدل فائدة % 4 نصف سنوي لمدة 6 سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــل

$$P = 4000, \qquad R = 0.04 \times 2 = 0.08, \qquad T = 6$$

$$I = P \times R \times T = 4000 \times 0.08 \times 6 = 1920$$

$$S = P + I = 4000 + 1920 = 5920$$

مثال2) اودعت سهام مبلغ 8000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة % 3 ربع سنوي لمدة 4 سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ

الحـــــــــــــــل

$$P = 8000, \qquad R = 0.03 \times 4 = 0.12, \qquad T = 4$$

$$I = P \times R \times T = 8000 \times 0.12 \times 4 = 3840$$

$$S = P + I = 8000 + 3840 = 11840$$

ملحوظة هامة: اذا كانت المدة بالشهور فيجب تحويل هذه المدة الي سنوات وذلك بقسمة المدة بالشهور ÷ 12

مثال: إذا كانت مدة الاستثمار هي 15 شهر فان المدة بالسنوات هي $T = \frac{15}{12}$

إذا كانت مدة الاستثمار هي 18 شهر فان المدة بالسنوات هي $T = \frac{18}{12}$

إذا كانت مدة الاستثمار هي 30 شهر فان المدة بالسنوات هي $T = \frac{30}{12}$

مثال3) اودعت سهام مبلغ 2000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة % 7 سنوي لمدة 9 شهور . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــل

$$P = 2000, \qquad R = 0.07, \qquad T = \frac{9}{12}$$

$$I = P \times R \times T = 2000 \times 0.07 \times \frac{9}{12} = 105$$

$$S = P + I = 2000 + 105 = 2105$$

السنة البسيطة

الشهر	عدد الأيام
يناير	31
فبراير	28
مارس	31
ابريل	30
مايو	31
يونيه	30
يوليو	31
اغسطس	31
سبتمبر	30
أكتوبر	31
نوفمبر	30
ديسمبر	31
أيام السنة	365

السنة الكبيسة

الشهر	عدد الأيام
يناير	31
فبراير	29
مارس	31
ابريل	30
مايو	31
يونيه	30
يوليو	31
اغسطس	31
سبتمبر	30
أكتوبر	31
نوفمبر	30
ديسمبر	31
أيام السنة	366

السنة التجارية

الشهر	عدد الأيام
يناير	30
فبراير	30
مارس	30
ابريل	30
مايو	30
يونيه	30
يوليو	30
اغسطس	30
سبتمبر	30
أكتوبر	30
نوفمبر	30
ديسمبر	30
أيام السنة	360

الفائدة البسيطة في حالة المدة بالأيام

الفائدة الصحيحة

$$I = P \times R \times \frac{d}{365}$$

الفائدة التجارية

$$I = P \times R \times \frac{d}{360}$$

:1) **اذا لم يذكر نوع الفائدة تحتسب فائدة تجارية**

:2) **اذا لم يذكر تاريخ السنة تحتسب سنة بسيطة**

مثال4) اودعت مي مبلغ 3000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة 6 % سنوي لمدة 120 يوم . اوجد الفائدة الصحيحة والفائدة التجارية المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحــــــــــــل

أولا: الفائدة الصحيحة:

$$P = 3000, \qquad R = 0.06, \qquad T = \frac{120}{365}$$

$$I = P \times R \times T = 3000 \times 0.06 \times \frac{120}{365} = 59.1$$

$$S = P + I = 3000 + 59.1 = 3059.1$$

ثانيا: الفائدة التجارية:

$$P = 3000, \qquad R = 0.06, \qquad T = \frac{120}{360}$$

$$I = P \times R \times T = 3000 \times 0.06 \times \frac{120}{360} = 60$$

$$S = P + I = 3000 + 60 = 3060$$

الفائدة المركبة

جملة المبلغ ← $S = p.\left(1 + \frac{R}{n}\right)^{n \times T}$

الفائدة المركبة ← $I = S - P,$

n → عدد مرات اخذ الفائدة في السنة

ملاحظات علي حساب الفائدة المركبة

1) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب سنويا فإنها تعطي مرة واحدة خلال السنة n = 1

فاذا كانت الفائدة سنويا والمدة 5 سنوات فان عدد الفترات n = 5 x 1= 5

2) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب نصف سنوي فإنها تعطي مرتين خلال السنة n = 2

فيجب تقسيم كل سنة الي فترتين وذلك بضرب المدة بالسنوات في 2

3) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب ربع سنوي فتعطي أربع مرات خلال السنة n = 4

فيجب تقسيم كل سنة الي أربع فترات ن وذلك بضرب المدة بالسنوات في 4

4) اذا كانت الفائدة المركبة تحسب ثلث سنوي فإنها تعطي ثلاث مرات خلال السنة **n = 3**

فيجب تقسيم كل سنة الي ثلاث فترات وذلك بضرب المدة بالسنوات في 3

5) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب شهري فإنها تعطي 12 مرات خلال السنة **n =12**

فيجب تقسيم كل سنة الي 12 فترات وذلك بضرب المدة بالسنوات في 12

مثال) اودعت مرام مبلغ 5000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة % 8 سنوي لمدة 3 سنوات . اوجد الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــل

$$P = 5000, \quad R = 0.08, \quad T = 3, \quad n = 1$$

$$S = P \times \left(1 + \frac{R}{n}\right)^{n \times T} = 5000 \times \left(1 + \frac{0.08}{1}\right)^{1 \times 3} = 6298.5$$

$$I = S - P = 6298.5 - 5000 = 1298.5$$

مثال) علياء اودعت مبلغ 7000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة % 10 نصف سنوي لمدة 5 سنوات . اوجد الفائدة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــل

$$P = 7000, \quad R = 0.1, \quad T = 5, \quad n = 2$$

$$S = P \times \left(1 + \frac{R}{n}\right)^{n \times T} = 7000 \times \left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^{2 \times 5} = 11402$$

$$I = S - P = 11402 - 7000 = 4402$$

مثال) علياء اودعت مبلغ 12000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة % 12 ربع سنوي لمدة 6 سنوات . اوجد الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــل

$$P = 12000, \quad R = 0.12, \quad T = 6, \quad n = 4$$

$$S = P \times \left(1 + \frac{R}{n}\right)^{n \times T} = 12000 \times \left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4 \times 5} = 24393.5$$

$$I = S - P = 24393.5 - 12000 = 12393.5$$

تمارين على حساب الفائدة المركبة:

1) الفائدة المركبة لمبلغ 1000 ريال تم إيداعه في أحد البنوك بفائدة مركبة 6% سنويا لمدة 3 سنوات يساوي..........

2) اقترض شخص لمبلغ 6000 ريال من أحد البنوك بفائدة مركبة 8% ربع سنوي لمدة 5 سنوات فان الفائدة ....

3) أودع باسم مبلغ 4000 ريال في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% نصف سنوي لمدة 6 سنوات فان الفائدة ....

4) جملة مبلغ 9000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% ثلث سنوي لمدة 8 سنوات هو ....

المحاضرة الرابعة: التـفـاضــــل وتطبيقاته

الدوال كثيرات الحدود

الدالة الثابتة هي دالة لها قيمة ثابتة مهما تغيرت قيمة المتغير x

$\boxed{f(x)=5} \Rightarrow f(2)=5 \quad \Rightarrow f(-5)=5 \quad \Rightarrow f(-2)=5 \quad \Rightarrow f(9)=5$

$f(x)=4$

$f(2)=4$

$f(5)=4$

$f(-7)=4$

مجال الدالة = R

مدي الدالة ={4}

$\boxed{f(x)=-2}$

$f(5)=-2$

$f(4)=-2$

$f(2)=-2$

مجال الدالة = R

مدي الدالة ={-2}

الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية

الدالة الخطية: هي دالة من الدرجة الاولي أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو واحد

$f(x)=3x-2$

$f(x)=5x+1$

$f(x)=2x$,

$f(x)=5-4x$,

مجال الدالة الخطية = R

مدي الدالة الخطية = R

الدالة الخطية من الدرجة الاولي

الدالة التربيعية: هي دالة من الدرجة الثانية أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 2

$f(x)=3x^2+5x+6$

$f(x)=x^2+2x-1$,

$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = 2 + 5x - 2x^2,$$

<u>الدالة التربيعية من الدرجة الثانية</u>

<u>الدالة التكعيبية:</u> هي دالة من الدرجة الثالثة أي أن أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 3

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 11 \qquad f(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 4,$$

$$f(x) = x^3 + 4 \qquad f(x) = 2 + 5x^2 - 5x^3,$$

<u>الدالة التكعيبية من الدرجة الثالثة</u>

قواعد الاشتقاق (التفاضل) للدوال كثيرات الحدود

الدالة	المشتقة الاولي للدالة
F(x)	F'(x)
Y(x)	Y'(x)
$Y(x)$	$\frac{dY}{dx}$

<u>القاعدة الاولي:</u> المشتقة الاولي لأي عدد ثابت يساوي صفر

الدالة	المشتقة الاولي للدالة
F(x)=5	F'(x)= 0
Y(x)= -7	Y'(x)=0
$Y(x) = \sqrt{6}$	$\frac{dY}{dx} = 0$

القاعدة الثانية

$$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = 2x \longrightarrow f'(x) = 2$$

$$f(x) = -5x \longrightarrow f'(x) = -5$$

$$y = \frac{2}{3}x + 5 \longrightarrow y' = \frac{2}{3}$$

القاعدة الثالثة

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$f(x) = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = 2x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 \times 2x^{3-1} = 6x^2$$

$$y = \frac{3}{5}x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4 \times \frac{3}{5}x^{4-1} = \frac{12}{5}x^3$$

$$y = \frac{2}{x^6} = 2x^{-6} \Rightarrow y' = -6 \times 2x^{-6-1} = -12x^{-7}$$

1- إذا كان $y = 2x^3 + 4x + 6$ فأوجد المشتقة الاولي للدالة

الحـــــــــــــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 4$$

2- إذا كان $y = 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 7x + 11$ فأوجد المشتقة الاولي للدالة؟

الحـــــــــــــــــــل

$$y' = 15x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 7$$

3- اذا كان $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3} + 5x^2$ فأوجد المشتقة الاولي للدالة؟

الحـــــــــــــــــــل

$$y = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-3} + 5x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-4} + 10\,x$$

4-إذا كان $y = 2x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 8x + 31$ فأوجد المشتقة الاولي للدالة؟

الحـــــــــــــــل

$$y' = 12x^5 - 20x^4 + 12x^3 - 8$$

القاعدة الرابعة

$$y = f(x)^n \Longrightarrow y' = nf(x)^{n-1} \times f'(x)$$

$1 - y = (2x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2$

$2 - y = (5-6x)^7 \quad \Rightarrow \quad y' = 7(5-6x)^6 \times (-6) = -42\ (5-6x)^6$

$3)\ y = (x^2+3x-5)^4 \quad \Rightarrow \quad y' = 4(x^2+3x-5)^3 \times (2x+3)$

$\Rightarrow \quad y' = 4(2x+3)(x^2+3x-5)^3$

$\Rightarrow \quad y' = (8x+12)(x^2+3x-5)^3$

القاعدة الخامسة

مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الدالة الاولي x الثانية + مشتقة الدالة الثانية x الاولي

$$if\ y = f(x) \times g(x) \to \quad y' = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

$ex: y = (2x+3)(5x-2) \quad find\ y' \ ? \qquad \to y' = (2)(5x-2) + (5)(2x+3)$

$\to y' = 10x - 4 + 10x + 15 = 20\,x + 11$

$ex2 \quad y = (x^2+3x+4)(4x-1) \quad find\ y' \ ?$

$\to y' = (2x+3)(4x-1) + (4)(x^2+3x+4)$

$\to y' = 8x^2 - 2x + 12x - 3 + 4x^2 + 12x + 16$

$\to y' = 12x^2 - 22x + 13$

$ex3 \quad y = (2x-5)(2x+5) \quad find\ y' \ ?$

$\to y' = (2)(2x-5) + (2)(2x+5)$

$\to y' = 4x - 10 + 4x + 10 = 8x$

القاعدة السادسة

مشتقة خارج قسمة دالتين = $\dfrac{\text{مشتقة البسط x المقام - مشتقة المقام x البسط}}{\text{مربع المقام}}$

$$if\ y=\frac{f(x)}{g(x)}\ \rightarrow\ y'=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{[g(x)]^2}$$

$ex1)\ \ y=\dfrac{3x-1}{2x+5},\qquad find\ y'\ ?$

$$y'=\frac{(3)(2x+5)-(2)(3x-1)}{(2x+5)^2}$$

$$y'=\frac{6x+15-6x+2}{(2x+5)^2}=\frac{17}{(2x+5)^2}$$

$ex2)\ \ y=\dfrac{4x+3}{x^2-5x+1},\qquad find\ y'\ ?$

$$y'=\frac{(4)(x^2-5x+1)-(2x-5)(4x+3)}{(x^2-5x+1)^2}$$

$$y'=\frac{4x^2-20x+4-8x^2-6x+20x+15}{(x^2-5x+1)^2}$$

$$y'=\frac{-4x^2-6x+19}{(x^2-5x+1)^2}$$

القاعدة السابعة: مشتقة الدالة الاسية

مشتقة الدالة الاسية= مشتقة اس الدالة x الدالة نفسها

$$\text{If}\quad y=e^{f(x)}\qquad\Rightarrow\qquad y'=f'(x).e^{f(x)}$$

$ex1)\quad If\ y=e^{2x}\qquad\Rightarrow\qquad y'=2.e^{2x}$

$ex2)\quad If\quad y=e^{2x}\qquad\Rightarrow\qquad y'=2.e^{2x}$

$ex3)\ \ If\quad y=e^{5x+3}\qquad\Rightarrow\qquad y'=5.e^{5x+3}$

$ex4)\ \ If\quad y=e^{x^2-3x+1}\ \Rightarrow\ y'=(2x-3).e^{x^2-3x+1}$

القاعدة الثامنة: مشتقة الدالة اللوغاريتمية

$$If \quad y = ln\ f(x) \Rightarrow \qquad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$ex1)\ y = ln\ \ x \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{x}$$

$$ex2)\ y = ln\left(2\,x - 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{2}{2x - 1}$$

$$ex3)\ y = ln\left(x^3 + 5\,x^2 - 1\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2 + 10x}{x^3 + 5\,x^2 - 1}$$

$$ex4)\ y = ln\left(x^2 - 2\,x + 3\right) + ln\left(6 + 7\,x - 3x^2\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2\,x + 3} + \frac{7 - 6x}{6 + 7\,x - 3x^2}$$

المشتقات من الرتب العليا

الدالة	المشتقة الثانية	المشتقة الاولي	المشتقة الثالثة
f(x)	f''(x)	f'(x)	f'''(x)
y(x)	y''(x)	y'(x)	y'''(x)
y(x)	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$

1) $if \quad y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + 12 \quad find\ \ y', y'', y'''$

$$y' = x^2 - 8x + 5$$

$$y'' = 2x - 8$$

$$y''' = 2$$

2) $if \quad y = x^6 + 4x^5 - 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6\ , \quad find\ \ y', y'', y'''$

$$y' = 6x^5 + 20x^4 - 6x^2 + 10x + 7, \qquad \Rightarrow \quad y'' = 30x^4 + 80x^3 - 12x + 10$$

$$y''' = 120x^3 + 240x^2 - 12$$

تطبيقات التفاضل

أولا: إيجاد ميل المماس (m)

ميل المماس لمنحني الدالة عند أي نقطة احداثيتها (x , y) يساوي قيمة المشتقة الاولي للدالة عند هذه النقطة

مثال 1) اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ عند النقطة (1, 0) ؟

الحــــــــــل

أولا: نوجد المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = 6x - 2$

ثانيا: نعوض بقيمة المتغير x $f'(1) = 6(1) - 2 = 6 - 2 = 4$

ثالثا: ميل المماس يساوي المشتقة الاولي $m = f'(1) = 4$

مثال 2) اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ عند النقطة (2,3) ؟

الحــــــــــل

أولا: نوجد المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

ثانيا: نعوض بقيمة المتغير x $f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$

ثالثا: ميل المماس يساوي المشتقة الاولي $m = f'(2) = -3$

مثال 3 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ عندما x=1 ؟

الحــــــــــل

أولا: نوجد المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

ثانيا: نعوض بقيمة المتغير x $f'(1) = 3(1)^2 - 18(1) + 24 = 3 - 18 + 24 = 9$

ثالثا: ميل المماس يساوي المشتقة الاولي $m = f'(1) = 9$

تمارين

تمرين 1 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 1$ *عندما* $x = -1$؟

تمرين 2 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3$ عند النقطة (2,4) ؟

تمرين 3 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ *عند النقطة* (3,-8)؟

ثانيا: إيجاد النهاية العظمي والصغرى للدالة

الخطوة الاولي: نوجد المشتقة الاولي للدالة

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة الاولي بالصفر وإيجاد قيم x

الخطوة الثالثة: نوجد المشتقة الثانية للدالة

الخطوة الرابعة: نعوض بكل قيمة x في المشتقة الثانية

الخطوة الخامسة: إذا كانت قيمة المشتقة الثانية سالبة كان للدالة نهاية عظمي وان كانت موجبة فلها قيمة صغري

....

مثال 1) اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ ؟

الحـــــــــــــــل

$f''(2) = 6 > 0$ للدالة قيمة صغري عند $x = 2$ لإيجاد هذه القيمة الصغرى للدالة $f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 1$ $f(2) = 12 - 24 + 1 = -11$	$f'(x) = 6x - 12$ $6x - 12 = 0$ $6x = 12$ $x = \frac{12}{6} = 2$ $f''(x) = 6$

مثال 2) اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ؟

الحـــــــــــــــل

$f''(1) = 6(1) - 12 = -6$ $f''(3) = 6(3) - 12 = 6$ للدالة قيمة عظمي عند $x = 1$ للدالة قيمة صغري عند $x = 3$ $f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 1 = 5$ $f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 1 = 1$	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $3x^2 - 12x + 9 = 0$ $3(x^2 - 4x + 3) = 0$ $3(x - 1)(x - 3) = 0$ $x = 1, \quad x = 3$ $f''(x) = 6x - 12$

تمارين

تمرين 1 اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 1$ ؟

تمرين 2 اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x) = 3x^2 - x^3$ ؟

تمرين 3 اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ ؟

بعض التطبيقات الاقتصادية على التفاضل

التكاليف الثابتة *Fixed Costs* : هي التكاليف التي لا تتغير بتغير الإنتاج.

التكاليف المتغيرة *Variable Costs* : وهي التكاليف التي تتغير بتغير الإنتاج.

التكاليف الكلية *Total Costs* : وتتكون من جميع التكاليف الثابتة الكلية والتكاليف المتغيرة الكلية للإنتاج معاً

التكاليف الحدية *Marginal Costs* : وهي التكلفة المضافة من أجل إنتاج وحدة واحدة زيادة في الناتج. ويمكن الحصول على التكلفة الحدية عن طريق تفاضل التكلفة الكلية

دالة الايراد الكلي *Total Revenue* : وهو الايراد او العائد من بيع وحدات المنتج

دالة الايراد= عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الحدة

الايراد الحدي *Marginal Revenue* : وهي الايراد او العائد من بيع وحدة انتاج إضافية. ويمكن الحصول على الإيراد الحدي عن طريق تفاضل دالة الايراد الكلي

دالة الربح الكلي *Total Profit* : دالة الربح= الايراد الكلي – التكاليف الكلية

الربح الحدي *Marginal Profit* : ويمكن الحصول على الربح الحدي عن طريق تفاضل دالة الربح الكلي

دالة التكاليف ← تفاضل دالة التكاليف ← دالة التكاليف الحدية

دالة الايراد ← تفاضل دالة الايراد ← دالة الايراد الحدي

دالة الربح ← تفاضل دالة الربح ← دالة الربح الحدي

أولا : إيجاد دالة التكاليف الحدية

دالة التكاليف الحدية: هي المشتقة الاولي لدالة التكاليف

مثال: اذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطى بالعلاقة حيث x عدد الوحدات المنتجة

$$C(x) = x^3 + 3x^2 - 50x + 300$$

فأوجد دالة التكاليف الحدية ثم اوجد التكاليف الحدية عند انتاج 10 وحدات

الحـــــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد الايراد الحدي بإيجاد المشتقة الاولي لدالة الايراد $R'(x) = 2x + 6$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الايراد الحدي التعويض بقيمة x (عدد الوحدات)

$$R'(100) = 2(100) + 6 = 200 + 6 = 206$$

مثال: اذا كانت دالة الايراد تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة)

$$R(x) = 5 + 10x - 2\,x^2 + x^3$$

فأوجد دالة الايراد الحدي ثم اوجد الايراد الحدي عند انتاج 50 وحدات؟

الحـــــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد الايراد الحدي بإيجاد المشتقة الاولي لدالة الايراد $R'(x) = 10 - 4\,x + 3x^2$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الايراد الحدي التعويض بقيمة x (عدد الوحدات)

$$R'(50) = 10 - 4\,(50) + 3(50)^2 = 10 - 200 + 7500 = 7310$$

ثانيا: إيجاد دالة الربح الحدي

دالة الربح الحدي: هي المشتقة الاولي لدالة الربح

مثال: اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة) $P(x) = 3x^2 + 100x - 30$

فأوجد دالة الربح الحدي ثم اوجد الايراد الحدي عند انتاج 40 وحدات ؟

الحـــــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد الربح الحدي بإيجاد المشتقة الاولي لدالة الربح $P'(x) = 6x + 100$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الربح الحدي التعويض بقيمة x (عدد الوحدات)

$$P'(40) = 6(40) + 100 = 240 + 100 = 340$$

مثال: اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة) $P(x) = 10x^2 - 300x - 500$

فأوجد دالة الربح الحدي ثم اوجد الايراد الحدي عند انتاج 80 وحدة ؟

الحـــــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد الربح الحدي بإيجاد المشتقة الاولي لدالة الربح $P'(x) = 20x - 300$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الربح الحدي التعويض بقيمة x (عدد الوحدات)

$$P'(80) = 20(80) - 300 = 1600 - 300 = 1300$$

القيمة العظمى او الصغرى لدالة الايراد او لدالة الربح

لإيجاد القيمة العظمي او الصغرى لدالة الايراد او لدالة الربح:

1) نوجد المشتقة الاولي لدالة الايراد او دالة الربح (الايراد الحدي او الربح الحدي)

2) نساوي المشتقة الاولي بالصفر ونوجد قيمة المتغير x

3) نوجد المشتقة الثانية ثم نعوض بقيمة x في المشتقة الثانية

4) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة تكون للدالة نهاية صغري -سالبة تكون للدالة نهاية عظمي

5) إذا نعوض في الدالة نفسها لإيجاد القيمة إذا كانت عظمي او صغري

مثال: اذا كانت دالة الايراد تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة) $\mathrm{R(x)} = \mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + 20$

فأوجد القيمة العظمي او الصغرى للإيراد؟ الحــــــــــــــــــل

<u>الخطوة الاولي</u> نوجد المشتقة الاولي لدالة الايراد

$$R'(x) = 2x - 6 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 6 \quad \Longrightarrow x = 3$$

قيمة المشتقة الثانية موجبة $R''(x) = 2 \quad \Longrightarrow R''(3) = 2$

دالة الايراد لها قيمة صغري عند $\mathrm{x} = 3$ نوجد القيمة الصغرى بالتعويض في الدالة

$$R(3) = (3)^2 - 6(3) + 20 \quad = 9 - 18 + 20 = 11$$

مثال: اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة) $R(x) = 5 + 8x - 2x^2$

فأوجد القيمة العظمي او الصغرى للإيراد؟ الحــــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد المشتقة الاولي لدالة الايراد

$$R'(x) = 8 - 4x, \quad \Longrightarrow \quad 8 - 4x = 0, \quad \Longrightarrow \quad 8 = 4\,x$$

قيمة المشتقة الثانية سالبة $R''(x) = -4\,, \quad \Longrightarrow R''(2) = -4$

دالة الربح لها قيمة عظمي عند $\mathrm{x} = 2$ نوجد القيمة الصغرى بالتعويض في الدالة

$$R(2) = 5 + 8(2) - 2\,(2)^2 = 5 + 16 - 8 = 13$$

<u>مرونة الطلب</u>

يستخدم الاقتصاديون المرونة لدراسة مدى تأثير تغير السعر p على الكمية المطلوبة q وتُعرف على أنها معدل التغير النسبي في الكمية المطلوبة على معدل التغير النسبي في السعر.

ونعرفها رياضياً كما يلي: -

إذا كانت الكمية المطلوبة من الوحدات هي (q) ، وسعر الوحدة هو (p)، فإن مرونة الطلب E_p تعطى بالعلاقة الآتية:

$$E_p = \frac{p.\,q'}{q}$$

ويقال أن الطلب مرن إذا كان (القيمة المطلقة للمرونة) $|E_p| > 1$

ويقال إن الطلب غير مرن إذا كان (القيمة المطلقة للمرونة) $|E_p| < 1$

مثال إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p) تعطى بالمعادلة الآتية : $q = 500 - 3p^2$

فأوجد: (1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عندما $p=5$, $p=10$

الحـــــــــــــــــل

$$q = 500 - 3p^2 \quad \Rightarrow q' = -6p \quad \Rightarrow E_p = \frac{p.\ q'}{q} = \frac{p.\ (-6p)}{500 - 3p^2} \quad \frac{-6p^2}{500 - 3p^2}$$

1)- إيجاد المرونة عند p=5

$$E_p = \frac{-6(5)^2}{500 - 3(5)^2} = \frac{-150}{425} = -0.353$$

$|E_p| = 0.353 < 1 \quad \Rightarrow$ الطلب غير مرن

2)- إيجاد المرونة عند p=10

$$E_p = \frac{-6(10)^2}{500 - 3(10)^2} = \frac{-600}{200} = -3$$

$|E_p| = 3 > 1 \quad \Rightarrow$ الطلب مرن

مثال2) إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p) تعطى بالمعادلة الآتية: $q = 4000 - 100p$

فأوجد: (1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عندم p = 15 , p=25 ?

الحـــــــــــــــــل

$$q = 4000 - 100p \quad \Rightarrow \quad q' = -100 \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{p.\ q'}{q} \Rightarrow E_p = \frac{p.\ (-100)}{4000 - 100p}$$

$$E_p = \frac{-100p}{4000 - 100p}$$

1)- إيجاد المرونة عند p= 15

$$E_p = \frac{-100(15)}{4000 - 100(15)} = \frac{-1500}{2500} = -0.6$$

$|E_p| = 0.6 < 1 \quad \Rightarrow$ *الطلب غير مرن*

2-) إيجاد المرونة عند p= 25

$$E_p=\frac{-100(25)}{4000-100\,(25)}=\frac{-2500}{1500}=-1.67$$

$$|E_p|=1.67>1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{الطلب مرن}$$

....

تمرين: إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p) تعطى بالمعادلة الآتية:

$$q=200-7\,p^2$$

فأوجد:(1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عندما p=5 , p =10

....

التكامل وتطبيقاته

التـكامــل: التكامل هو العملية العكسية للتفاضل

إذا كانت تتم عملية التفاضل لأي حد من دوال كثيرات الحدود بان نضرب اس المتغير في معامله ثم نطرح من هذا الاس 1

فان التكامل هو العملية العكسية للتفاضل فيتم تكامل أي حد من دوال كثيرات الحدود بان نزود اس المتغير بمقدار واحد ثم نقسم معامل الحد على قيمة الاس الجديد

وينقسم التكامل الي

التكامل الغير محدود — **التكامل المحدود**

القاعدة الاولي

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

تكامل أي حد من دوال كثيرات الحدود نزود اس المتغير بمقدار واحد ثم نقسم معامل الحد على قيمة الاس الجديد + مقدار ثابت

$$\int x^5\,dx=\frac{x^6}{6}+c$$

c مقدار ثابت

$$\int x^9\,dx=\frac{x^{10}}{10}+c$$

1) $\int x^2 + 3\,x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \quad c$

2) $\int 2x^4 + x^3\,dx = \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \quad c$

3) $\int 5x^6 + 7x^8\,dx = \frac{5x^7}{7} + \frac{7x^9}{9} + \quad c$

4) $\int x^{-2} + 6x\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{6x^2}{2} + \quad c$

5) $\int 5x^{-5} + 3x^{-3}\,dx = \frac{5x^{-4}}{-4} + \frac{3x^{-2}}{-2} + \quad c$

6) $\int 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-9}\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{4x^{-8}}{-8} + \quad c$

$$= \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^{-8}}{2} + \quad c$$

القاعدة الثانية: تكامل أي عدد ثابت يساوي هذ العدد مضروب في x

$$\int a\,dx = a\,x\ + c,$$

1) $\int 6\,dx = 6\,x\ + c$

2) $\int 3\,dx = 3\,x\ + c,$

3) $\int \frac{3}{5}\,dx = \frac{3}{5}x\ + c$

4) $\int -7\,dx = -7\,x\ + c,$

5) $\int \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}x\ + c$

6) $\int 4\,dx = 4\,x\ + c,$

7) $\int 11\,dx = 11x\ + c$

القاعدة الثالثة: *تكامل المقدار $(ax+b)^n$ هو نفس المقدار بزيادة الاس بمقدار واحد مقسوما علي الاس الجديد ومقسوما علي معامل المتغير x*

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\times a} + c$$

1) $\int (2x+3)^4\,dx = \frac{(2x+3)^5}{5\times 2} + c$

2) $\int (5x-11)^6\,dx = \frac{(5x-11)^7}{7\times 5} + c$

3) $\int (8-6\,x)^{10}\,dx = \frac{(8-6\,x)^{11}}{11\times -6} + c$

4) $\int \sqrt{3x-4}\,dx = \int (3\,x-4)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 3} + c = \frac{2}{9}(3x-4)^{\frac{3}{2}} + c$

القاعدة الرابعة: إذا كانت الدالة مضروبة في تفاضلها فان تكاملها هو زيادة الاس بمقدار واحد ونقسم على الاس الجديد

$$\int [f(x)]^n \,.\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$1)\ \int (x^3+2x+6)^5 \,.\, (3x^2+2)\,dx = \frac{(x^3+2x+6)^6}{6} + c$$

$$2)\ \int (x^2+2x+10)^{11} \,.\, (2x+2)\,dx = \frac{(x^2+2x+10)^{12}}{12} + c$$

$$3)\ \int \sqrt{x^2+3x+2}\,.\,(2x+3)\,dx = \int (x^2+3x+2)^{\frac{1}{2}}\,.\,(2x+3)\,dx = \frac{2(x^2+3x+2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

....

القاعدة الخامسة:

إذا كانت البسط تفاضل المقام فان التكامل في هذه الحالة يساوى اللوغاريتم الطبيعي للمقام

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = ln\,[f(x)] + c \qquad\qquad 1)\ \int \frac{1}{x}\,dx = ln\,[x] + c$$

$$2)\ \int \frac{4x+3}{2x^2+3x-11}\,dx = ln\,\left[2x^2+3x-11\right] + c$$

$$3)\ \int \frac{8x-2}{4x^2-2x-11}\,dx = ln\,\left[4x^2-2x-11\right] + c$$

$$4)\ \int \frac{5x^4+6x^2}{x^5+2x^3-4}\,dx = ln\,\left[x^5+2x^3-4\right] + c$$

....

القاعدة السادسة:

تفاضل الدالة الاسية لأساس اللوغاريتم الطبيعي = الدالة نفسها على تفاضل الاس

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

$$1)\ \int e^{5x}\,dx = \frac{e^{5x}}{5} + c, \qquad\qquad 2)\ \int e^{3x-2}\,dx = \frac{e^{3x-2}}{3} + c$$

$$3)\ \int e^{5-6x}\,dx = \frac{e^{5-6x}}{-6} + c\ , \qquad\qquad 4)\ \int e^{11-\sqrt{7}x}\,dx = \frac{e^{11-\sqrt{7}x}}{-\sqrt{7}} + c$$

$$5)\int e^{8x-1}\,dx=\frac{e^{8x-1}}{8}+c\,,\qquad 6)\int \frac{1}{e^{2x-5}}\,dx=\int e^{-2x+5}\,dx=\frac{e^{-2x+5}}{-2}+c$$

ملاحظة:

اذا كان المتغير موجود في المقام فيجب رفعه الي البسط بتغير إشارة الاس قبل عملية التكامل

$$\int \frac{a}{x^n}dx=\int a\,x^{-n}\,dx=\frac{a\,x^{-n+1}}{-n+1}+c$$

$$1)\int \frac{3}{x^5}dx=\int 3\,x^{-5}\,dx=\frac{3\,x^{-4}}{-4}+c\qquad 2)\int \frac{-5}{x^6}dx=\int -5\,x^{-6}\,dx=\frac{-5\,x^{-5}}{-5}+c$$

التكامل المحدود

الحد العلوي

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left.F(x)\right|_a^b=F(b)-F(a)$$

الحد السفلي

الحد العلوي — الحد العلوي

$$1)\quad \int_1^3 (2x+5)\,dx=\left.\frac{2\,x^2}{2}+5x\right|_1^3=\left.x^2+5x\right|_1^3$$

الحد السفلي — الحد السفلي

$$=[(3)^2+5(3)]-[(1)^2+5(1)]=[24]-[6]=18$$

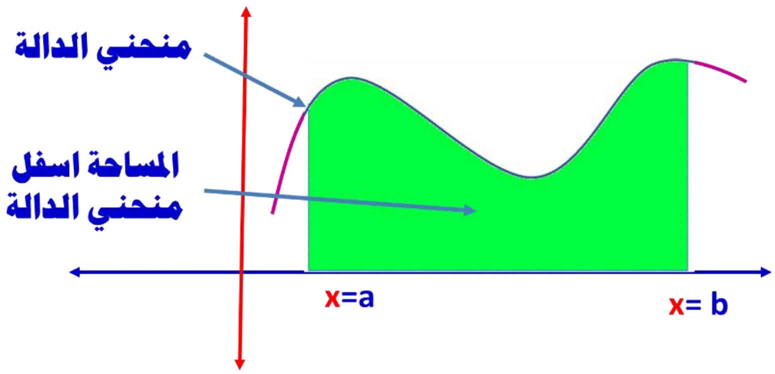
$$2)\int_0^2 (x^2+3x+1)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x\right|_0^2=\left[\frac{2^3}{3}+\frac{3(2)^2}{2}+2\right]-\left[\frac{0^3}{3}+\frac{3(0)^2}{2}+0\right]$$

$$=\left[\frac{8}{3}+\frac{12}{2}+2\right]-[0]=\frac{32}{3}$$

تطبيقات على التكامل

أولا:إيجاد المساحة أسفل منحنى الدالة

المساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ *ومحور السينات والمحصورة بين المستقيمين* $x = a$ *و* $x = b$



$$Area = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b$$

مثال 1) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية $y = 4x^3$ وبين $x=3$, $x=2$ ؟

الحـــــــــــــــل

$$Area = \int_2^3 y\,dx = \int_2^3 4x^3\,dx = \frac{4x^4}{4}\Big|_2^3 = x^4|_2^3 = (3)^4 - (2)^4 = 81 - 16 = 65$$

مثال 2) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية: $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ وبين المستقيمين $x=4$, $x=1$

الحـــــــــــــــل

$$Area = \int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 3x^2 + 2x + 5\;dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 5x\Big|_1^4$$

$$= x^3 + x^2 + 5x|_1^4 = [(4)^3 + (4)^2 + 5(4)] - = x^3 + x^2 + 5x|_1^4$$

$$= [(4)^3 + (4)^2 + 5(4)] - [(1)^3 + (1)^2 + 5(1)]$$

$$= [64 + 16 + 20] - [1 + 1 + 5] = 100 - 7 = 93$$

تمارين

1) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية: $f(x) = x^4 + 3x^2 + 6$ وبين $x=0, x=3$ ؟

2) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية: $f(x) = x^3 - 6x + 8$ وبين $x=2, x=3$ ؟

3) *أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية:* $f(x) = x^2 - 7x + 11$ *وبين* $x=0,\ x=2$ ؟

ثانيا: تطبيقات تجارية

دالة التكاليف الحدية	← تكامل دالة التكاليف الحدية	← دالة التكاليف
دالة الايراد الحدي	← تكامل دالة الايراد الحدي	← دالة الايراد
دالة الربح الحدي	← تكامل دالة الربح الحدي	← دالة الربح

مثال 1) إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة $C'(x) = 30x^2 + 54x - 30$

علما بان التكاليف الثابتة هي 200؟

الحـــــــــــــــل

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int 30x^2 + 54x - 30\,dx = \frac{30x^3}{3} + \frac{54x^2}{2} - 30x + c$$

$$C(x) = 10\,x^3 + 27\,x^2 - 30x + c$$

وحيث ان التكاليف الثابتة تساوي 200 فان $c = 200$

$$C(x) = 10\,x^3 + 27\,x^2 - 30x + 200$$

مثال 2) إذا كانت دالة الايراد الحدي لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة $R'(x) = 60x^3 + 18x^2 + 36$

علما بان الايراد يساوي صفر في حالة عدم بيع أي وحدة. فأوجد دالة الايراد الكلي؟

الحـــــــــــــــل

$$R(x) = \int R'(x)\,dx = \int 60x^3 + 18x^2 + 36\,dx$$

$$R(x) = \frac{60x^4}{4} + \frac{18x^3}{3} + 36x + c = 15x^4 + 6x^3 + 36x + c$$

وحيث ان الايراد يساوي صفر في عدم بيع أي وحدة $c = 0$

$$R(x) = 15x^4 + 6x^3 + 36\,x$$

مثال 3) إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة $p'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 24x^3$

علما بان الربح يساوي صفر في حالة عدم بيع أي وحدة. فأوجد دالة الربح الكلي؟

الحـــــــــــــــل

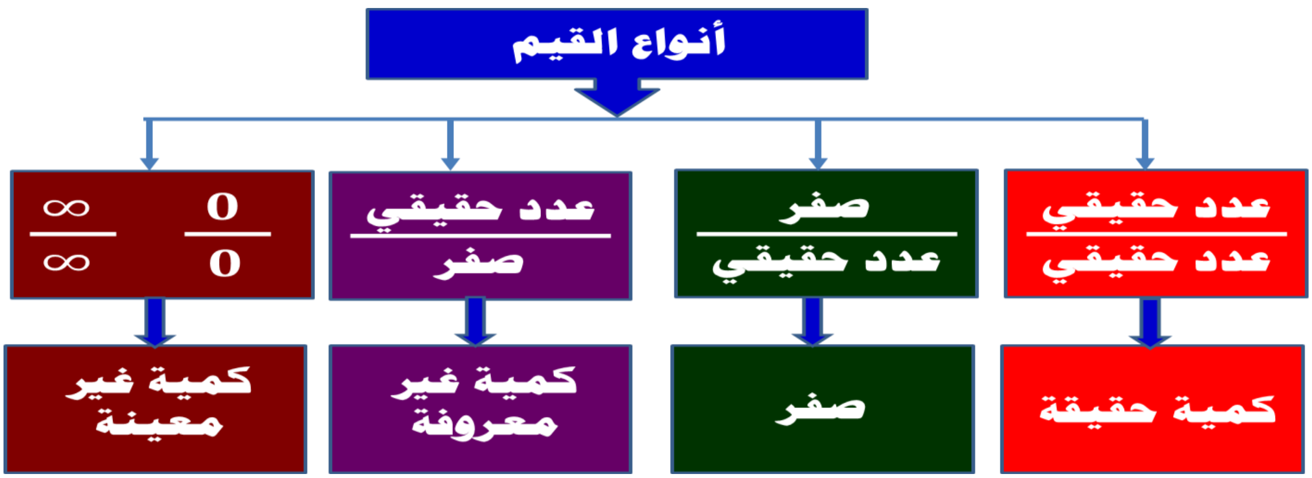
$$P(x) = \int P'(x)\,dx = \int 12x^5 + 15x^4 + 24x^3 dx$$

$$P(x) = \frac{12x^6}{6} + \frac{15x^5}{5} + \frac{24x^4}{4} + c = 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + c$$

وحيث ان الربح يساوي صفر في عدم بيع أي وحدة $c = 0$

$$P(x) = 2x^6 + 3x^5 + 6x^4$$

نهاية الدوال



$1)\ f(x) = 2x + 1 \qquad if\ x = 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$ عدد حقيقي

$2)\ f(x) = \dfrac{x-1}{3x+2}, \qquad if\ x = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = \dfrac{2-1}{3(2)+2} = \dfrac{1}{6+2} = \dfrac{1}{8}$

$3)\ f(x) = \dfrac{2x-6}{x+4}, \qquad if\ x = 3\,, \Rightarrow f(3) = \dfrac{2(3)-6}{3+4} = \dfrac{6-6}{7} = \dfrac{0}{7} = 0$

$4)\ f(x) = \dfrac{6x-1}{x^2-4}, \qquad if\ x = 2\,, \Rightarrow f(2) = \dfrac{6(2)-1}{2^2-4} = \dfrac{12-1}{4-4} = \dfrac{11}{0}$

كمية غير معرفة (عدد غير حقيقي) – والدالة ليس لها قيمة – أي قيمة الدالة ليس لها وجود عند x=2

$5)\ f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+1}, \qquad if\ x = 1\,, \Rightarrow f(1) = \dfrac{1-1}{1^2-2(1)+1} = \dfrac{0}{0}$

كمية غير معينة – لم يستطيع التعويض المباشر الحصول على قيمة الدالة – ولكن هناك قيمة للدالة

القيمة العددية

- $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$: $\frac{3}{5}, \; 7, \; 9 \;, \; \frac{7}{11} \;\rightarrow$ عدد حقيقي
- $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$: $\frac{0}{7}, \; \frac{0}{9}, \; \frac{0}{11} \;\rightarrow 0$
- $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$: $\frac{4}{0}, \; \frac{6}{0}, \; \frac{5}{0} \;\rightarrow$ كمية غير معروفة- لا يوجد قيمة للدالة
- $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$: $\frac{0}{0}, \; \frac{\infty}{\infty} \;\rightarrow$ كمية غير معينة

$$6)\; f(x) = \frac{3x-6}{x^2-4}, \qquad if\; x = 2 \,, \Rightarrow f(2) \;= \frac{3(2)-6}{2^2-4} = \frac{6-6}{4-4} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة – لم يستطيع التعويض المباشر الحصول على قيمة الدالة – ولكن هناك قيمة للدالة

$x = 2 \Rightarrow \quad x - 2 = 0$ *عامل صفري*

$x = 1 \Rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow, \; x - 1 = 0$ *عامل صفري*

$x = 3 \Rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow , \;\; x - 3 = 0$ *عامل صفري*

أي دالة تعوض بقيمة $x = a$ *يكون الناتج* $\frac{0}{0}$ *هناك عامل صفري هو* $x - a = 0$

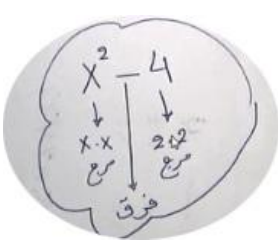
<u>التخلص من العامل الصفري</u>

الفكرة: اذا تم التعويض بقيمة $x = a$ *في أي دالة وكان الناتج* $\frac{0}{0}$ (كمية غير معينة)

السبب هو وجود العامل الصفري $x - a = 0 \quad x = a \Rightarrow$ *فالدالة لها قيمة لم احصل عليها حتي الان*

<u>الحل هو التخلص من العامل الصفري: اذا تم التعويض بقيمة ما فى الدالة وكان الناتج</u> $\frac{0}{0}$ ***<u>فالتخلص من العامل الصفري</u>***

<u>أولا: التحليل</u>



<u>مراجعة عامة على التحليل</u>

<u>أولا: تحليل الفرق بين مربعين</u>

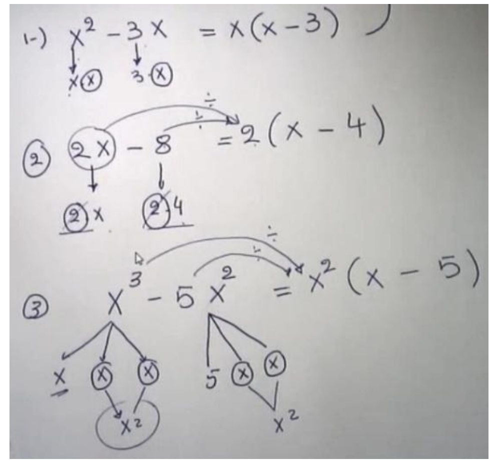
$1)\; x^2 - 4 = (x+2)(x-2),$ $\qquad 2)\; x^2 - 9 = (x+3)(x-3),$

$3)\; x^2 - 25 = (x-5)(x+5),$ $\qquad 4)\; x^2 - 16 = (x-4)(x+4),$

4) $x^2-49=(x-7)(x+7)$,

5) $x^2-1=(x-1)(x+1)$,

ثانيا: التحليل بإخراج العامل المشترك

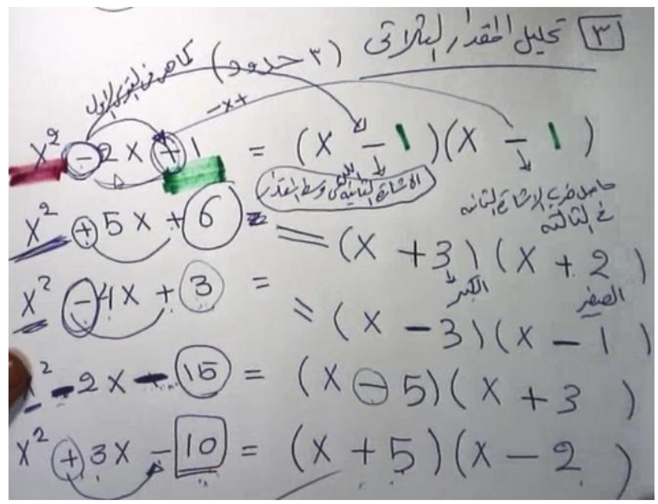


1) $x^2-3x=x(x-3)$,

2) $2x-8=2(x-4)$,

3) $x^3-5x^2=x^2(x-5)$,

ثالثا: تحليل المقدار الثلاثي (مكون من ثلاثة حدود)



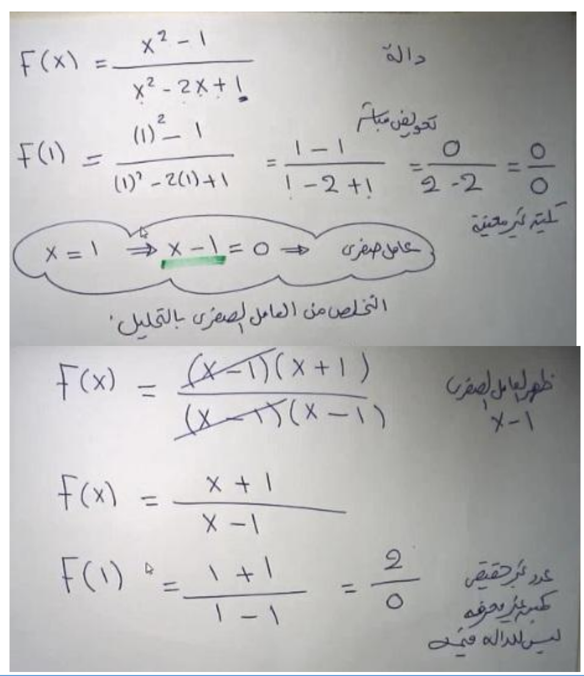
1) $x^2-2x+1=(x-1)(x-1)$,

2) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$,

4) $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$,

5) $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$,

مثال:



1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

$$f(x)=\frac{(1)^2-1}{(1)^2-2(1)+1}=\frac{1-1}{1-2+1}=\frac{0}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$x=1,\quad\Rightarrow\quad x-1=0\ \Rightarrow$ العامل الصفري

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)}{(x-1)}$$

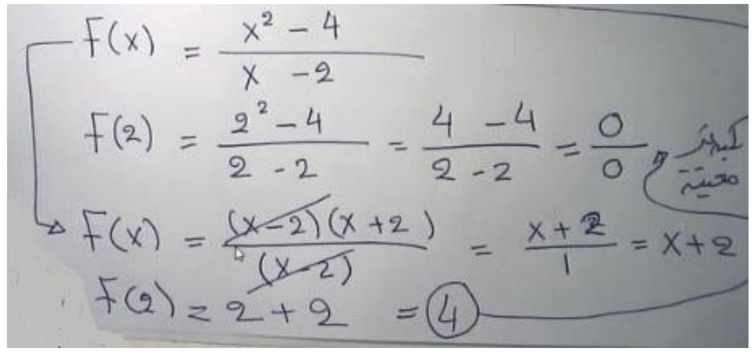
$$f(x)=\frac{(1+1)}{(1-1)}=\frac{2}{0}$$

$$2)\ f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$f(2)=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\frac{x+2}{1}=x+2$$

$$f(2)=2+2=4$$



....

النهايات

نهاية الدالة عند نقطة

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

تؤول أي تقترب

$$1)\quad \lim_{x\to 2} 2x+3=\lim_{x\to 2} 2x+3=2(2)+3=7$$

$$2)\quad \lim_{x\to 1} 5-4x=f(1)=5-4(1)=1$$

$$3)\quad \lim_{x\to 3}\frac{x+1}{5x-4}=f(3)=\frac{3+1}{5(3)-4}=\frac{4}{11}$$

$$4)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{3x-1}=f(2)=\frac{2-2}{3(2)-1}=\frac{0}{5}=0$$

$$5)\quad \lim_{x\to 4}\frac{3x+5}{2x-8}=f(4)=\frac{3(4)+5}{2(4)-8}=\frac{17}{0}$$

في هذه الحالة ليس للدالة نهاية

$$6)\quad \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=f(3)=\frac{3-3}{(3)^2-9}=\frac{3-3}{9-9}=\frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

$x\to 3$ عامل صفري $x-3\to 0$

$$f(x)=\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+3}\qquad\Longrightarrow\qquad f(3)=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

....

$$7)\quad \lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{3x+15}=f(-5)=\frac{(-5)^2-25}{3(-5)+15}=\frac{25-25}{-15+15}=\frac{0}{0}$$

$x \to -5$ عامل صفري $x + 5 \to 0$

$$f(x) = \frac{(x-5)(x+5)}{3(x+5)} = \frac{(x-5)}{3} \quad \Rightarrow \quad f(-5) = \frac{-5-5}{3} = \frac{-10}{3}$$

---

8) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{2^2-5(2)+6}{2^2-4} = \frac{4-10+6}{4-4} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-3)}{(x+2)} \quad \Rightarrow \quad f(2) = \frac{2-3}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

في حالة ان يكن ناتج التعويض (صفر علي صفر) فإننا يمكن استخدام قاعدة <u>لوبيتال</u>

والتي تنص على انه في حالة كان ناتج التعويض (صفر علي صفر) يمكن إيجاد مشتقة البسط ثم إيجاد مشتقة المقام ثم التعويض مرة اخري

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{2x} = f(2) = \frac{2(2)-5}{2(2)} = \frac{4-5}{4} = \frac{-1}{4}$$

خطوات إيجاد النهاية

*تعويض مباشر $\leftarrow \frac{0}{0}$ * تحليل واختصار * تعويض مرة تانية $\leftarrow$ نحصل على النهاية

خواص النهايات

1) $$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

سؤال:

1) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 3$ فان $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)] = \cdots\ldots\ldots$

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = 5+3 = 8$$

---

2) $$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

سؤال:

2) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = 7$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 4$ فان $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \cdots\ldots\ldots$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = 7-4 = 2$$

---

3) $$\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$$

سؤال:

3) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = 4$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 5$ فان $\lim_{x\to 2}[f(x)\times g(x)] = \cdots \ldots \ldots$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = 4\times 5 = 20$$

....

4) $\lim_{x\to a}[f(x)\div g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \div \lim_{x\to a} g(x)$

سؤال:

4) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = 18$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 6$ فان $\lim_{x\to a}[f(x)\div g(x)] = \cdots \ldots \ldots$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\div g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = 18\div 6 = 3$$

إيجاد النهاية باستخدام القانون

إيجاد النهاية باستخدام القانون

$$\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n}\times a^{m-n}$$

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^3-8} = \lim_{x\to 2} \frac{x^5-2^5}{x^3-2^3} = \frac{5}{3}\times 2^{5-3} = \frac{5}{3}\times 4 = \frac{20}{3}$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-15}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x^4-2^4}{x^2-2^2} = \frac{4}{2}\times 2^{4-2} = \frac{4}{2}\times 4 = 8$

3) $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x^3-27} = \lim_{x\to 3} \frac{x^4-3^4}{x^3-3^3} = \frac{4}{3}\times 3^{4-3} = \frac{4}{3}\times 3^1 = 4$

4) $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-125}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{x^3-5^3}{x^2-5^2} = \frac{3}{2}\times 5^{3-2} = \frac{3}{2}\times 5^1 = \frac{15}{2}$

5) $\lim_{x\to -1} \frac{x^8-1}{x^5+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^8-(-1)^8}{x^5-(-1)^5} = \frac{8}{5}\times (-1)^{8-5} = \frac{8}{5}\times (-1)^3 = -\frac{8}{5}$

....

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

$\frac{\infty}{\infty}$, كمية غير معينة

$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty,\quad \frac{\infty}{6} = \infty,\quad \frac{\infty}{24} = \infty\quad - \quad - - - - -\quad \infty \pm \text{عدد} = \infty,\quad \infty + 6 = \infty, \infty - 5 = \infty$

$\infty \times \text{عدد} = \infty,\quad \infty\times 7 = \infty,\quad \infty \times 5 = \infty,\quad - - - - - - - \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0,\quad \frac{5}{\infty} = 0,\quad \frac{11}{\infty} = 0$

$$1)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-5}{4-2x+3x^2} = \frac{2(\infty)^2+3(\infty)-5}{4-2(\infty)+3(\infty)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على x بأكبر اس فى المقام

$$2)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}+4} == \frac{2+\frac{3}{\infty}-\frac{5}{(\infty)^2}}{\frac{4}{(\infty)^2}-\frac{2}{\infty}+4} = \frac{2+0-0}{0-0+4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+4\,x^2+8}{6\,x^3+14} = \frac{5(\infty)^3+4(\infty)^2-5}{6(\infty)^3+14} = \frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على x بأكبر اس فى المقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{8}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{14}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}}{6+\frac{14}{x^3}} == \frac{5+\frac{4}{\infty}+\frac{8}{(\infty)^3}}{6+\frac{14}{(\infty)^3}} = \frac{5+0+0}{6+0} = \frac{5}{6}$$

اوجد نهاية الدوال الاتية

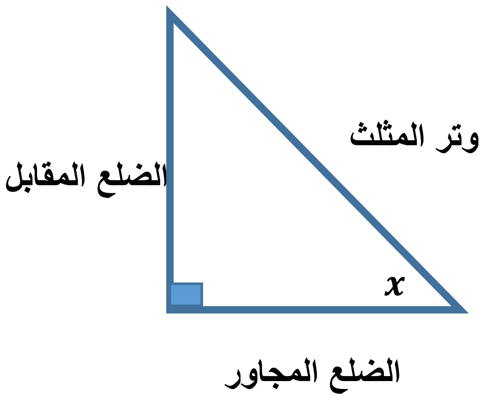
$$1)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{3x-3} \qquad\qquad 2)\quad \lim_{x\to 6} \frac{x^2-36}{2x-12}$$

$$3)\quad \lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7} \qquad\qquad 4)\quad \lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^3-8}$$

$$5)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+2\,x^2+1}{3\,x^3-5} \qquad\qquad 6)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x-7}{3-8x+4x^2} =$$

$$7)\quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-7x+10} \qquad\qquad 8)\quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-9}{x-3}$$

الدوال المثلثية



المثلث القائم

هو المثلث الذي يحتوي على زاوية قائمة

الوتر: هو الضلع المقابل للزاوية القائمة

الدوال المثلثية الأساسية:

1) دالة جيب الزاوية (جا) (sin)

$$\sin x = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$$

2) دالة جيب تمام الزاوية (جتا) (cos)

$$\cos x = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$$

3) دالة ظل الزاوية (ظا) (tan)

$$\tan x = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المقابل}}$$

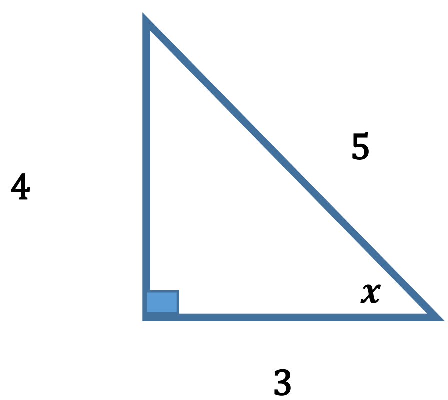
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

مثال في الشكل المقابل

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

$$\cos x = \frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{4}{3}$$



سؤال: إذا كانت $\sin x = 0.2$ و $\cos x = 0.5$ *فان:*

1) $\tan x = \cdots \ldots \ldots ..$ [أ) 0.2 ب) 0.5 ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{2}{5}$]

2) $\cot x = \cdots \ldots \ldots ..$ [أ) 0.2 ب) 0.5 ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{2}{5}$]

مقلوبات الدوال المثلثية

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}\ , \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}\ , \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

سؤال: إذا كانت $\sin x = 0.3$ و $\cos x = 0.7$ فإن:

1) $\tan x = \cdots\ldots\ldots$] أ) 0.3 ب) 0.7 ج) $\frac{7}{3}$ د) $\frac{3}{7}$ [

2) $\cot x = \cdots\ldots\ldots$] أ) 0.3 ب) 0.7 ج) $\frac{7}{3}$ د) $\frac{3}{7}$ [

3) $\csc x = \cdots\ldots\ldots$] أ) 0.3 ب) 0.5 ج) $\frac{10}{7}$ د) $\frac{10}{3}$ [

4) $\sec x = \cdots\ldots\ldots$] أ) 0.3 ب) 0.5 ج) $\frac{10}{7}$ د) $\frac{10}{3}$ [

نهاية الدوال المثلثية

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$, 2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ a\,x}{x}\right) = a$, 3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{bx}\right) = \frac{1}{b}$, 4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{bx}\right) = \frac{a}{b}$

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$, 2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan\ a\,x}{x}\right) = a$, 3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{bx}\right) = \frac{1}{b}$, 4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{bx}\right) = \frac{a}{b}$

تمارين

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 3\,x}{x}\right) = 3$

2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ x}{2\,x}\right) = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 7\,x}{2x}\right) = \frac{7}{2}$

4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ x}{-3\,x}\right) = \frac{1}{-3}$

5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 2\,x}{5x}\right) = \frac{2}{5}$

6) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 2x}{11\,x}\right) = \frac{2}{11}$

بقسمة حدود البسط والمقام على x

7) $\lim_{x\to 0}\frac{3x\ +\ \sin\ 2\,x}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x}{x} + \frac{\sin\ 2\,x}{x}}{\frac{7x}{x}} = \frac{3\ +\ 2}{7} = \frac{5}{7}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{6x - \ \tan\ 2\,x}{\sin 5x\ \ + 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{x} - \frac{\tan\ 2\,x}{x}}{\frac{\sin\ 5\,x}{x} + \frac{4x}{x}} = \frac{6\ -\ 2}{5+4} = \frac{4}{9}$

تمارين

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 2\,x}{3x}\right) = \cdots$] أ) 2 ب) 3 ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{2}{3}$ [

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan\ x}{7x}=\cdots$ [أ) 1 ب) 7 ج) $\frac{1}{7}$ د) $\frac{2}{7}$]

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan\ 3x}{5x}=\cdots$ [أ) $\frac{3}{5}$ ب) 5 ج) 3 د) $\frac{5}{3}$]

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan\ 2x}{\sin 3x}=\cdots$ [أ) $\frac{3}{2}$ ب) 2 ج) 3 د) $\frac{2}{3}$]

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\tan\ 2\,x}{\sin 3x+2x}=\cdots$ [أ) $\frac{1}{5}$ ب) 5 ج) 3 د) 1]

تفاضل الدوال المثلثية

$$1)\ y=\sin ax \quad\Rightarrow\quad y'=a.\cos ax$$

1) $y=\sin 3x \quad\Rightarrow\quad y'=3.\cos 3x$ 2) $y=\sin\frac{1}{2}x \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{2}.\cos\frac{1}{2}x$

3) $y=\sin 7x \quad\Rightarrow\quad y'=7.\cos 7x$ 4) $y=\sin(-3x) \quad\Rightarrow\quad y'=-3.\cos(-3x)$

سؤال

1) اذا كانت $y=\sin 4x$ فان: $y'=\cdots$

أ) $\cos 4x$ ب) $4\sin 4x$ ج) $4\cos 4x$ د) $4+\cos 4x$

$$2)\ y=\cos ax \quad\Rightarrow\quad y'=-a.\sin ax$$

1) $y=\cos 5x \quad\Rightarrow\quad y'=-5.\sin 5x$ 2) $y=\cos 2x \quad\Rightarrow\quad y'=-2.\sin 2x$

3) $y=\cos 6x \quad\Rightarrow\quad y'=-6.\sin 6x$ 4) $y=\cos(-4x) \quad\Rightarrow\quad y'=4.\sin(-4x)$

سؤال

1) اذا كانت $y=\cos 5x$ فان: $y'=\cdots$

أ) $\sin 5x$ ب) $-5\sin 5x$ ج) $5\sin 5x$ د) $5\sin 5x$

$$3)\ y=\tan ax \quad\Rightarrow\quad y'=a.\sec^2 ax$$

1) $y=\tan 3x \quad\Rightarrow\quad y'=3.\sec^2 3x$ 2) $y=\tan\sqrt{5}x \quad\Rightarrow\quad y'=\sqrt{5}.\sec^2\sqrt{5}x$

3) $y=\tan 9x \quad\Rightarrow\quad y'=9.\sec^2 9x$ 4) $y=\tan 7x \quad\Rightarrow\quad y'=7.\sec^2 7x$

سؤال

1) اذا كانت $y=\tan 2x$ فان: $y'=\cdots$

أ) $\sec^2 2x$ ب) $-\sec^2 2x$ ج) $2\sec^2 2x$ د) $-2\sec^2 2x$

$$3)\ y=\cot ax \quad\Rightarrow\quad y'=-a.\csc^2 ax$$

1) $y=\cot 2x \quad\Rightarrow\quad y'=-2.\csc^2 2x$ 2) $y=\cot 7x \quad\Rightarrow\quad y'=-7.\csc^2 7x$

3) $y=\cot 6x \quad\Rightarrow\quad y'=-6.\csc^2 6x$ 4) $y=\tan 7x \quad\Rightarrow\quad y'=7.\sec^2 7x$

سؤال (1 اذا كانت $y = \tan 3x$ فان: $y' = \cdots$

(2 اذا كانت $y = \cot 5x$ فان: $y' = \cdots$

تكامل الدوال المثلثية

$$\boxed{\int \sin ax\, dx = \frac{-\cos ax}{a} + c}$$

1) $\int \sin 2x\, dx = \frac{-\cos 2x}{2} + c$

2) $\int \sin 7x\, dx = \frac{-\cos 7x}{7} + c$

3) $\int \sin 3x\, dx = \frac{-\cos 3x}{3} + c$

4) $\int \sin 9x\, dx = \frac{-\cos 9x}{9} + c$

$$\boxed{\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + c}$$

1) $\int \cos 4x\, dx = \frac{\sin 4x}{4} + c$

2) $\int \cos \frac{1}{4}x\, dx = \frac{\sin \frac{1}{4}x}{\frac{1}{4}} + c = 4\sin \frac{1}{4}x + c$

3) $\int \cos 5x\, dx = \frac{\sin 5x}{5} + c$

4) $\int \cos 6x\, dx = \frac{\sin 6x}{6} + c$

$$\boxed{\int \sec^2 ax\, dx = \frac{\tan ax}{a} + c}$$

1) $\int \sec^2 3x\, dx = \frac{\tan 3x}{3} + c$

2) $\int \sec^2 5x\, dx = \frac{\tan 5x}{5} + c$

3) $\int \sec^2 7x\, dx = \frac{\tan 7x}{7} + c$

4) $\int \sec^2 9x\, dx = \frac{\tan 9x}{9} + c$

$$\boxed{\int \csc^2 ax\, dx = \frac{-\cot ax}{a} + c}$$

1) $\int \csc^2 8x\, dx = \frac{-\cot 8x}{8} + c$

2) $\int \csc^2 3x\, dx = \frac{-\cot 3x}{3} + c$

3) $\int \csc^2 7x\, dx = \frac{-\cot 7x}{7} + c$

4) $\int \csc^2 4x\, dx = \frac{-\cot 4x}{4} + c$

تمارين: (1 اذا كانت $y = \sin 5x$ فان: $y' = \cdots$

أ) $5\cos 5x$ ب) $-5\cos 5x$ ج) $\frac{\cos 5x}{5}$ د) $-\frac{\cos 5x}{5}$

2) $\int \sin 3x\, dx = \cdots$

أ) $3\cos 3x$ ب) $-3\cos 3x$ ج) $\frac{\cos 3x}{3}$ د) $-\frac{\cos 3x}{3}$

3) اذا كانت $y = \sin 2x + \cos 3x$ فان: $y' = \cdots$

أ) $\cos 2x + \sin 3x$ ب) $\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$

ج) $2\cos 2x - 3\sin 3x$ د) $-2\cos 2x + 3\sin 3x$

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

يكون للدالة المعرفة قاعدتين علي يمين ويسار نقطة معينة نهاية إذا كانت: <u>النهاية اليمنى = النهاية اليسرى</u>

الدالة المعرفة قاعدتين علي يمين ويسار نقطة معينة ليس لها نهاية عندها إذا كانت: <u>النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى</u>

مثال1) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 2 \\ 5x - 4, & x > 2 \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim_{x\to 2} f(x)$ ؟

الحـــــــــــــــل

$f(x) = x^2 - 2$ $f(x) = 5x - 4$

$x < 2$ 2 $x > 2$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(2^+) = \lim_{x\to 2^+} 5x - 4 = 5(2) - 4 = 10 - 4 = 6$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(2^-) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - 2 = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

النهاية اليمني ≠ النهاية اليسرى ⟵⟵ وبالتالي: <u>الدالة ليس لها نهاية عند</u> $x \to 2$

مثال2) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} + 1, & x < 3 \\ \frac{5-x}{2}, & x > 3 \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim_{x\to 3} f(x)$ ؟

الحـــــــــــــــل

$f(x) = \frac{3}{x} + 1$ $f(x) = \frac{5 - x}{2}$

$x < 3$ 3 $x > 3$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(3^+) = \lim_{x\to 3^+} \frac{5-x}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(3^-) = \lim\limits_{x\to3^-} \frac{3}{x} + 1 = \frac{3}{3} + 1 = 1 + 1 = 2$

النهاية اليمني ≠ النهاية اليسرى ←—← وبالتالي: <u>الدالة ليس لها نهاية عند</u> $x \to 3$

....

مثال3) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x > 1 \\ 5 - x, & x < 1 \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ ؟

الحـــــــــــــــل

$f(x) = 5 - x$ $f(x) = 3x + 1$

$x < 1$ 1 $x > 1$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+} 3x + 1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(1^-) = \lim\limits_{x\to1^-} 5 - x = 5 - 1 = 4$

النهاية اليمني = النهاية اليسرى ←—← وبالتالي: <u>نهاية الدالة =4</u> $x \to 1$

....

مثال3) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x > 1 \\ 5 - x, & x < 1 \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ ؟

الحـــــــــــــــل

$f(x) = 5 - x$ $f(x) = 3x + 1$

$x < 1$ 1 $x > 1$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+} 3x + 1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(1^-) = \lim\limits_{x\to1^-} 5 - x = 5 - 1 = 4$

النهاية اليمني = النهاية اليسرى ←—← وبالتالي: <u>نهاية الدالة =4</u> $x \to 1$

....

سؤال) إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} x^3+3, & x > 1 \\ 5x - 1, & x < 1 \end{cases}$ فان: $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \cdots$

أ) 3   ب) 4   ج) 5   د) ليس لها نهاية

الحـــــــــــــــل

$f(x) = 5x - 1$ $f(x) = x^3 + 3$

$x < 1$ 1 $x > 1$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+} x^3 + 3 = (1)^3 + 3 = 1 + 3 = 4$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(1^-) = \lim\limits_{x\to1^-} 5x - 1 = 5(1) - 1 = 5 - 1 = 4$

النهاية اليمني = النهاية اليسرى ←—← وبالتالي: <u>نهاية الدالة =4</u> $x \to 1$

سؤال) إذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x>0\\ 2\cos 3x, & x<0\end{cases}$ فان: $\lim_{x\to 1} f(x)=\cdots$

أ) 2 ب) 3 ج) -2 د) ليس لها نهاية

الحـــــــــــــــل

$f(x)=2\cos 3x$ $\quad$ $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$

$x<0$ $\quad$ 0 $\quad$ $x>0$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=2$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(0^-)=\lim_{x\to 1^-} 2\cos 3x = 2\cos 3(0) = 2(1)=2$

النهاية اليمني = النهاية اليسرى ⟵⟵ وبالتالي: نهاية الدالة =2 $x\to 0$

سؤال) إذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{\tan 3x}{x}, & x>0\\ \cos 3x, & x<0\end{cases}$ فان: $\lim_{x\to 1} f(x)=\cdots$

أ) 3 ب) 2 ج) 9 د) ليس لها نهاية

الحـــــــــــــــل

$f(x)=\cos 3x$ $\quad$ $f(x)=\frac{\tan 3x}{x}$

$x<0$ $\quad$ 0 $\quad$ $x>0$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 3x}{x}=3$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(0^-)=\lim_{x\to 1^-} \cos 3x = \cos 3(0) = 1$

النهاية اليمني ≠ النهاية اليسرى ⟵⟵ وبالتالي: ليس للدالة نهاية $x\to 0$

تمارين :

1) $f(x)=\begin{cases}3x^2+8, & x>1\\ 2x+9, & x<1\end{cases}$ $\quad find \lim_{x\to 1} f(x)?$

2) $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x>3\\ x^2+3, & x<3\end{cases}$ $\quad find \lim_{x\to 3} f(x)?$

3) $f(x)=\begin{cases}2x, & x>1\\ x^2+1, & x<1\end{cases}$ $\quad find \lim_{x\to 1} f(x)?$

4) $f(x)=\begin{cases}3x+5, & x>2\\ x^2+7, & x<2\end{cases}$ $\quad find \lim_{x\to 2} f(x)?$

اتصال الدالة عند نقطة

اتصال الدالة عند نقطة $x=a$

1) الدالة معرفة عن $x=a$ أي قيمة الدالة $f(a)$ موجودة $\quad$ 2) نهاية الدالة موجودة عند $x\to a$

3) قيمة الدالة = نهاية الدالة

مثال 1) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2}, & x\neq 2\\ 11, & x=2\end{cases}$ عند $x=2$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(2)=11$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2}{1}=3(2)^2=3\times 4=12$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة ≠ نهاية الدالة ∴الدالة غير متصلة عند $x=2$

مثال 2) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$ عند $x=2$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(2)=1$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-1}{1}=\frac{2(1)-1}{1}=2-1=1$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة = نهاية الدالة ∴الدالة متصلة عند $x=2$

مثال 3) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3\\ 6, & x=3\end{cases}$ عند $x=3$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(3)=6$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{1}=\frac{2(3)}{1}=6$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة = نهاية الدالة ∴الدالة متصلة عند $x=2$

مثال 4) اذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x^2-1}, & x\neq 1\\ k, & x=1\end{cases}$ متصلة عند $x=1$ فان: $k=\cdots$

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(1)=k$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2(1)}=\frac{1}{2}$

ثالثا: الدالة متصلة قيمة الدالة = نهاية الدالة $k=\frac{1}{2}$

مثال 5) اذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}, & x\neq 2\\ k, & x=2\end{cases}$ متصلة عند $x=2$ فان: $k=\cdots$

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(2)=k$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{2x-3}=\frac{2(2)}{2(2)-3}=\frac{4}{1}=4$

ثالثا: الدالة متصلة قيمة الدالة = نهاية الدالة $k=4$

مثال 6) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$ عند $x=0$ ؟

الحـــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(0)=3$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3$

ثالثا: بحث اتصال الدالة: قيمة الدالة = نهاية الدالة ∴الدالة متصلة عند $x=0$

مثال 7) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 4, & x=2\end{cases}$ عند $x=2$ ؟

الحـــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(2)=4$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{1}=2(2)=4$

ثالثا: بحث الاتصال: قيمة الدالة = نهاية الدالة =4 ∴الدالة متصلة عند $x=2$

مثال 8) إذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-27}{x^2-9}, & x\neq 3\\ k, & x=3\end{cases}$ متصلة عند $x=3$ فأوجد قيمة k؟

الحـــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(3)=k$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3(3)^2}{2(3)}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

ثالثا: الدالة متصلة: قيمة الدالة = نهاية الدالة = $\frac{9}{2}$ ∴ $k=\frac{9}{2}$

اتصال الدالة المعرفة بقاعدتين

تكون الدالة المعرفة بقاعدتين متصلة عند نقطة $x=a$ اذا كان:

قيمة الدالة $f(a)$ = النهاية اليمني $f(a^+)$ = النهاية اليسري $f(a^-)$

مثال 1) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\geq 2\\ 4x-3, & x<2\end{cases}$ عند $x=2$ ؟

الحـــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x=2$ $f(2)=2^2+2=4+2=6$	ثانيا: إيجاد النهاية اليمني $f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}x^2+2$ $=2^2+2=4+2=6$	ثانيا: إيجاد النهاية اليسري $f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}4x-3$ $=4(2)-3=8-3=5$

قيمة الدالة = النهاية اليمني ≠ النهاية اليسري لذلك الدالة غير متصلة عند $x=2$

مثال 2) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x>1\\ x+1, & x\le 1\end{cases}$ **عند** $x=1$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x=1$ $f(1)=1+1=2$	ثانيا: إيجاد النهاية اليمني $f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} 3x-1$ $=3(1)-1=3-1=2$	ثانيا: إيجاد النهاية اليسري $f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+1$ $=1+1=2$

قيمة الدالة = النهاية اليمني = النهاية اليسرى =2 لذلك الدالة متصلة عند $x=1$

مثال 3) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}5-2x, & x\ge 2\\ x-3, & x<2\end{cases}$ **عند** $x=2$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x=2$ $f(2)=5-2(2)=5-4=1$	ثانيا: إيجاد النهاية اليمني $f(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} 5-2x$ $=5-2(2)=5-4=1$	ثانيا: إيجاد النهاية اليسري $f(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} x-3$ $=2-3=-1$

قيمة الدالة = النهاية اليمني ≠ النهاية اليسرى لذلك الدالة غير متصلة عند $x=2$

....

مثال 4) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}3x^2-5, & x\ge 2\\ 2x+3, & x<2\end{cases}$ **عند** $x=2$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x=2$ $f(2)=3(2)^2-5=12-5$ $=7$	ثانيا: إيجاد النهاية اليمني $f(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} 3x^2-5$ $=(2)^2-5=12-5=7$	ثانيا: إيجاد النهاية اليسري $f(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2x+3$ $=2(2)+3=7$

قيمة الدالة = النهاية اليمني = النهاية اليسرى =7 لذلك الدالة متصلة عند $x=2$

....

مثال 5) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 5x}{3x}, & x\ne 0\\ 5\cos 3x, & x=0\end{cases}$ **عند** $x=0$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x=0$ $f(0)=5\cos 3(0)=5\times 1=5$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة عند $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\frac{5}{3}$

قيمة الدالة ≠نهاية الدالة لذلك الدالة متصلة عند $x=0$

....

فترات التزايد والتناقص للدالة

الخطوات:

1) إيجاد المشتقة الاولي للدالة 2) مساواة المشتقة الاولي بالصفر وحل المعادلة وايجاد قيم x الحرجة

3) نضع قيم xعلي خط الاعداد وتقسيمه فترات 4) من كل فترة نأخذ قيمة اختيارية لـ x ونعوض في المشتقة الاولي

5) إذا كانت قيم المشتقة موجبة كانت الدالة تزايديه في الفترة وإذا كانت قيمة المشتقة سالبة كانت الدالة تناقصية في الفترة

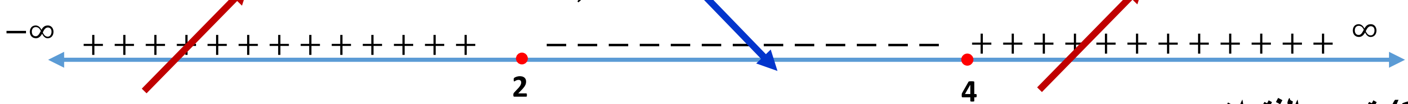
مثال 1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ ؟

الحـــــــــــــــــل

1) إيجاد المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ 2) ثم مساواة المشتقة بالصفر

$3x^2 - 18x + 24 = 0$ ويمكن حل المعادلة باستخدام الالة فنحصل علي

$x = 2,$ $x = 4$



2) تحديد الفترات

1) $]-\infty, 2[,\quad x = 0$ $f'(0) = 3(0)^2 - 18(0) + 24$ $= 0 - 0 + 24 = +24$ الدالة تزايديه في الفترة $]-\infty, 2[$	2) $]2,4[,\quad x = 3$ $f'(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 24$ $= 27 - 54 + 24 = -3$ الدالة تناقصية في الفترة $]2,4[$	3) $]4, \infty[,\quad x = 5$ $f'(5) = 3(5)^2 - 18(5) + 24$ $= +9$ الدالة تزايديه في الفترة $]4, \infty[$

فترات التحدب لأعلي والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب

1) نوجد المشتقة الاولي 2) ثم نوجد المشتقة الثانية 3) نساوي المشتقة الثانية بالصفر وايجاد قيم x الحرجة

4) نضع قيم x على خط الاعداد ونقسمه الي فترات 5) نختار قيمة اختيارية من كل فترة ونعوض في المشتقة الثانية

6) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية في الفترة موجبة كل تحدب لأسفل وإذا القيمة سالبة يكون تحدب لأعلي في الفترة

7) اذا تغير التحدب قبل وبعد قيمة x (من تحدب لأعلي الي تحدب لأسفل) كانت النقطة هي نقطة انقلاب

8) نعوض بقيمة x في الدالة الاصلية لإيجاد نقطة الانقلاب $(x, f(x))$

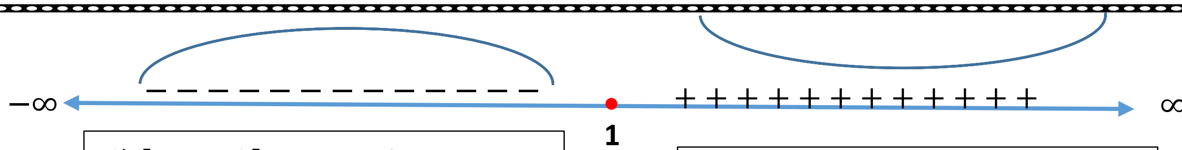
مثال 1) اوجد فترات التحدب لأعلي والتحدب لأسفل ونقطة الانقلاب للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ؟

الحـــــــــــــــــل

1) المشتقة الاولي $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ثم إيجاد المشتقة الثانية $f''(x) = 6x - 6$

2) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة $6x - 6 = 0 \quad \to 6x = 6 \quad \to \quad x = 1$

3) تحديد الفترات



$1)\ ]-\infty,1[,\quad x=0$
$f''(0)=6(0)-6=-6$
الفترة تحدب لأعلي للدالة

$2)\ ]1,\infty[,\quad x=2$
$f''(2)=6(2)-6=6$
الفترة تحدب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحدب قبل وبعد $x=1$ فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

تكون نقطة الانقلاب <u>(1,2)</u> $\quad f(1)=(1)^3-3(1)^2+4=1-3+4=2$

....

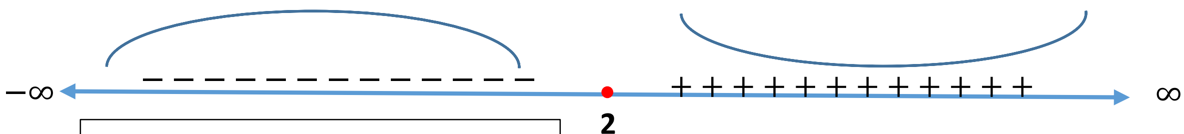
مثال 2) نقطة الانقلاب للدالة $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ هي ....<u>(2,3)</u>............

الحـــــــــــل

1) المشتقة الاولي $f'(x)=3x^2-12x+9$ ثم إيجاد المشتقة الثانية $f''(x)=6x-12$

2) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة $x=2 \quad \rightarrow \quad 6x-12=0 \rightarrow 6x=12 \rightarrow x=2$

3) تحديد الفترات



$1)\ ]-\infty,2[,\quad x=0$
$f''(0)=6(0)-12=-12$
الفترة تحدب لأعلي للدالة

$2)\ ]2,\infty[,\quad x=3$
$f''(3)=6(3)-12=6$
الفترة تحدب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحدب قبل وبعد $x=2$ فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

تكون نقطة الانقلاب <u>(2,3)</u> $\quad f(2)=2^3-6(2)^2+9(2)+1=3$

....

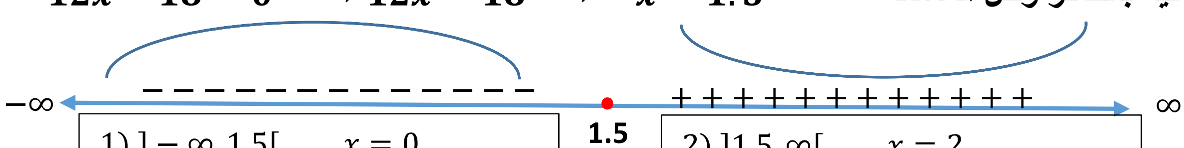
مثال 3) نقطة الانقلاب للدالة $f(x)=2x^3-9x^2+12x-10$ هي ....<u>(1.5,-5.5)</u>................

الحـــــــــــل

1) المشتقة الاولي $f'(x)=6x^2-18x+12$ ثم إيجاد المشتقة الثانية $f''(x)=12x-18$

2) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة $x=1.5 \quad \rightarrow \quad 12x-18=0 \rightarrow 12x=18 \rightarrow x=1.5$

3) تحديد الفترات



$1)\ ]-\infty,1.5[,\quad x=0$
$f''(0)=12(0)-18=-18$
الفترة تحدب لأعلي للدالة

$2)\ ]1.5,\infty[,\quad x=2$
$f''(2)=12(2)-18=6$
الفترة تحدب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحدب قبل وبعد $x=1.5$ فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

تكون نقطة الانقلاب <u>(1.5,-5.5)</u> $\quad f(1.5)=2(1.5)^3-9(1.5)^2+12(1.5)-10=-5.5$

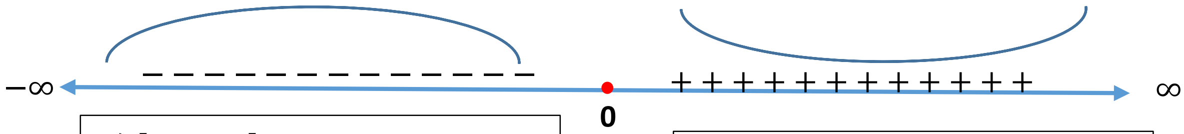
مثال 4) نقطة الانقلاب للدالة $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+1$ هي ....$\underline{(0,1)}$..............

الحـــــــــــل

1) المشتقة الاولي $f'(x)=x^2-4$ ثم إيجاد المشتقة الثانية $f''(x)=2x$

2) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة $\to x=0$ $2x=0$

3) تحديد الفترات



$1)\ ]-\infty,0[,\quad x=-1$

$f''(-1)=2(-1)=-2$

الفترة تحدب لأعلي للدالة

$2)\ ]0,\infty[,\quad x=1$

$f''(1)=2(1)=2$

الفترة تحدب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحدب قبل وبعد $x=0$ فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

تكون نقطة الانقلاب $\underline{(0,1)}$ $f(0)=\frac{1}{3}(0)^3-4(0)+1=1$

تمارين:..

1) إذا كانت قيمة المشتقة الاولي للدالة عند أي نقطة في فترة موجبة فان الدالة ....في الفترة

أ) تزايديه ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

2) إذا كانت قيمة المشتقة الاولي للدالة عند أي نقطة في فترة سالبة فان الدالة ....في الفترة

أ) تزايديه ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

3) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند أي نقطة في فترة موجبة فان الدالة ....في الفترة

أ) تزايديه ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

4) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند أي نقطة في فترة سالبة فان الدالة ....في الفترة

أ) تزايديه ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

....

الدالة الصريحة والدالة الضمنية

الدالة الصريحة: هي دالة يكون المتغير التابع في أحد طرفي الدالة والمتغير او المتغيرات المستقلة في الطرف الاخر

$$y=f(x)$$

$1)\ y=x^2+2x+3 \qquad 2)\ f(x)=4x^3-3x \qquad 3)\ y=4x+9 \qquad 4)\ y=x^5-3$

كل الدوال السابقة دوال صريحة

الدالة الضمنية: يكون المتغير التابع والمتغير او المتغيرات المستقلة في طرف واحد (أي في مقدار واحد)

$$f(x,y)=c$$

$1)\ 2y-3x^2+2x=3 \qquad 2)\ 3y+4x^3=3x \qquad 3)\ y+4x=9 \qquad 4)\ x^5+y=6$

كل الدوال السابقة دوال ضمنية

1) الدالة $y+3x=5$ تكون دالة صريحة على الشكل ....

أ) $y+3x-5=0$ ب) $x=y-5$ ج) $y=-3x+5$ د) $x=3y+5$

2) الدالة $y^2+x^2=4$ تكون دالة صريحة على الشكل ....

أ) $y=4-x^2$ ب) $x=4-y^2$ ج) $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ د) $x=2-y$

$$1)\ y^2+x^2=4\rightarrow y^2=4-x^2 \qquad \rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$$

$$2)\ y^2+x^2=4\rightarrow x^2=4-y^2 \qquad \rightarrow x=\pm\sqrt{4-y^2}$$

الدالة الفردية والدالة الزوجية

الدالة الزوجية: هي الدالة التي يكون $f(-x)=f(x)$

امثلة على الدوال الزوجية

$1)\ f(x)=x^2 \quad \Longrightarrow \quad f(-x)=(-x)^2=-x\times -x=x^2=f(x)$ دالة زوجية

$2)\ f(x)=|x| \quad \Longrightarrow \quad f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$ دالة زوجية

$3)\ f(x)=cos\,x \quad \Longrightarrow \quad f(-x)=cox\,(-x)=cosx=f(x)$ دالة زوجية

الدالة الفردية: هي الدالة التي يكون $f(-x)=-f(x)$

امثلة على الدوال الفردية

$1)\ f(x)=x^3 \quad \Longrightarrow \quad f(-x)=(-x)^3=-x\times -x\times -x=-x^3=-f(x)$ دالة فردية

$2)\ f(x)=sin\,x \quad \Longrightarrow \quad f(-x)=sin\,(-x)=-sin\,(x)=-f(x)$ دالة فردية

$3)\ f(x)=tan\,x \quad \Longrightarrow \quad f(-x)=tan\,(-x)=-tan\,x=-f(x)$ دالة فردية

تكون الدالة ليست فردية وليست زوجية إذا كان $f(-x)\neq -f(x)$ $\quad f(-x)\neq f(x)$

امثلة بين أي الدوال الاتية فردية ام زوجية ام ليست فردية وليست زوجية:

$1)\ f(x)=x^4-4x^2-5$

$$f(-x)=(-x)^4-4(-x)^2-5$$

$$f(-x)=x^4-4x^2-5=f(x)$$

الدالة زوجية

$2)\ f(x)=\dfrac{x^3 sin\,x}{x^4+5}$

$$f(-x)=\frac{(-x)^3 sin\,(-x)}{(-x)^4+5}$$

$$f(-x)=\frac{-x^3\times -sin\,x}{x^4+5}=\frac{x^3 sin\,x}{x^4+5}=f(x)$$

الدالة زوجية

$3)\ f(x)=\dfrac{|x| sin\,x}{x^2}$

$4)\ f(x)=\dfrac{|x|.(x^2+1)}{x^3}$

$$f(-x)=\frac{|-x|.\left((-x)^2+1\right)}{(-x)^3}$$

$$f(-x)=\frac{|x|.(x^2+1)}{-x^3}=-\frac{|x|.(x^2+1)}{x^3}=-f(x)$$

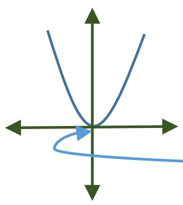
الدالة فردية

$$f(-x)=\frac{|-x|\sin(-x)}{(-x)^2}$$

$$f(-x)=\frac{|x|\times -\sin x}{x^2}=-\frac{|x|\sin x}{x^2}$$

الدالة فردية

الدالة التربيعية والتمثيل البياني لها



الصورة العامة للدالة التربيعية: $f(x)=(x-a)^2\pm b$ حيث b , a ثوابت

أ) اذا كان قيمة $a=b=0$ فان الدالة تصبح علي الصورة $f(x)=x^2$

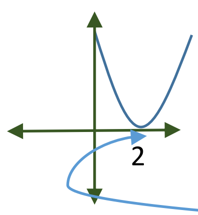
التمثيل البياني لها منحني مفتوح لأعلي راس المنحني عند نقطة الأصل $o=(0,0)$

وهي دالة زوجية لتماثلها حول محور الصادات

ب) اذا كانت $a\neq 0, b=0$

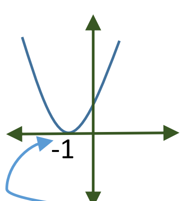
1) فاذا كانت الإشارة في القوس سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني الدالة التربيعية $f(x)=x^2$ افقيا علي محور السينات الي اليمين بمقدار a من الوحدات

2) فاذا كانت الإشارة في القوس موجبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني الدالة التربيعية $f(x)=x^2$ افقيا علي محور السينات الي اليسار بمقدار a من الوحدات



مثال1) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x)=(x-2)^2$

الإشارة في القوس سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني الدالة التربيعية $f(x)=x^2$ افقيا على محور السينات الي اليمين بمقدار 2 وحدة فيكون راس المنحني $(2,0)$



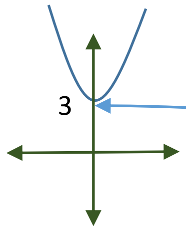
مثال2) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x)=(x+1)^2$

الإشارة في القوس موجبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني الدالة التربيعية $f(x)=x^2$ افقيا على محور السينات الي اليسار بمقدار وحدة واحدة فيكون راس المنحني $(-1,0)$

ملحوظة: إذا كانت الإشارة داخل القوس سالبة تكون إزاحة الي اليمين واذا كانت الإشارة داخل القوس موجبة تكون إزاحة الي اليسار

ج) اذا كانت $a=0, b\neq 0$

اذا كان قيمة b موجبة فان الازاحة تكون راسيا الي اعلي علي محور الصادات واذا كانت سالبة تكون الازاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات

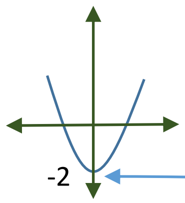


<u>مثال</u>3) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 + 3$

قيمة العدد $b = 3$ موجب فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ راسيا الي أعلي علي محور الصادات

بمقدار 3 وحدة فيكون راس المنحني $(0, 3)$



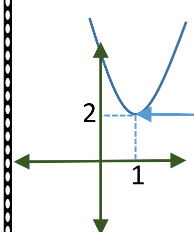
<u>مثال</u>4) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 - 2$

قيمة العدد $b = -2$ سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ راسيا الي أسفل علي محور الصادات

بمقدار 2 وحدة واحدة فيكون راس المنحني $(0, -2)$

ملحوظة: إذا كانت قيمة b موجبة تكون إزاحة راسيا الي اعلي علي محور الصادات وإذا كانت b سالبة تكون إزاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات



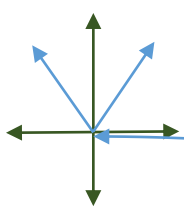
<u>مثال</u>5) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

هنا نلاحظ هناك إزاحة افقيا الي اليمين على محور السينات بمقدار 1 وحدة

وإزاحة راسيا الي اعلي على محور الصادات بمقدار 2 وحدة للدالة التربيعية

$f(x) = x^2$ فيكون راس المنحني $(1, 2)$

<u>ثانيا: الصورة العامة لدالة المقياس:</u> $f(x) = |x - a| \pm b$ حيث b , a ثوابت



<u>أ) إذا_كان</u> قيمة $a = b = 0$ فان الدالة تصبح على الصورة $f(x) = |x|$

التمثيل البياني لها شعاعين لأعلي لهما نقطة بداية واحدة عند نقطة الأصل $o = (0, 0)$

<u>وهي دالة زوجية لتماثلها حول محور الصادات</u>

<u>ب) إذا</u> كانت $a \neq 0, b = 0$

1) فاذا كانت الإشارة في المقياس سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني دالة المقياس$f(x) = |x|$ افقيا علي محور السينات الي اليمين بمقدار a من الوحدات

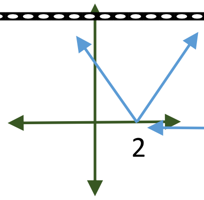
2) فاذا كانت الإشارة في المقياس موجبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني دالة المقياس$f(x) = |x|$ افقيا علي محور السينات الي اليسار بمقدار a من الوحدات

<u>مثال</u>1) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x - 2|$

الإشارة في المقياس <u>سالبة</u> فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

دالة المقياس $f(x) = |x|$ افقيا على محور السينات الي اليمين

بمقدار 2 وحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين $(2, 0)$

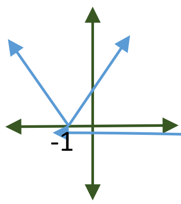


مثال2) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x + 1|$

الإشارة في المقياس موجبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

دالة المقياس $f(x) = |x|$ افقيا على محور السينات الي اليسار

بمقدار وحدة واحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين$(-1, 0)$



ملحوظة: إذا كانت الإشارة داخل المقياس سالبة تكون إزاحة الي اليمين وإذا كانت الإشارة داخل المقياس موجبة تكون إزاحة الي اليسار

ج) إذا كانت $a = 0, b \neq 0$

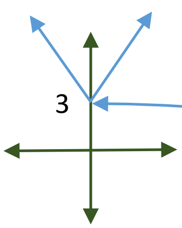
اذا كان قيمة b موجبة فان الازاحة تكون راسيا الي اعلي علي محور الصادات واذا كانت سالبة تكون الازاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات

مثال3) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x| + 3$

قيمة العدد $b = 3$ موجب فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

دالة المقياس $f(x) = |x|$ راسيا الي أعلى علي محور الصادات

بمقدار 3 وحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين $(0, 3)$

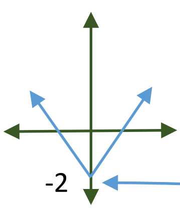


مثال4) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x| - 2$

قيمة العدد $b = -2$ سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

دالة المقياس $f(x) = |x|$ راسيا الي أسفل علي محور الصادات

بمقدار 2 وحدة واحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين$(0, -2)$



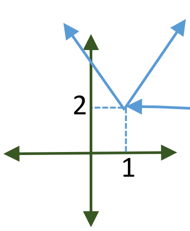
ملحوظة: إذا كانت قيمة b موجبة تكون إزاحة راسيا الي اعلي علي محور الصادات وإذا كانت b سالبة تكون إزاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات

مثال5) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x - 1| + 2$

هنا نلاحظ هناك إزاحة افقيا الي اليمين على محور السينات بمقدار 1 وحدة

وإزاحة راسيا الي اعلي على محور الصادات بمقدار 2 وحدة لدالة المقياس

$f(x) = |x|$ فيكون راس المنحني $(1, 2)$



تمارين:

1) يمكن الحصول علي منحني الدالة $f(x) = x^2 - 1$ بإزاحة منحني الدالة $f(x) = x^2$ الي.........

2) يمكن الحصول علي منحني الدالة $f(x) = |x-3|$ بإزاحة منحني الدالة $f(x) = x^2$ الي.........

3) نوع الدالة $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^4+1}$ ....

4) نوع الدالة $f(x) = \frac{x^3 \cos x}{x^5+x}$ ....

5) الدالة $2y^2 + x = 7$ هي دالة صريحة على الشكل ....

6) الدالة $y = 6x^2 + 3$ هي دالة ضمنية على الشكل ....

7) إذا علمت ان دالة الطلب لسلعة معينة $Q_n = 3p - 4$ ودالة العرض لنفس السلع $Q_n = 36 - 2p$ فأجب عما يأتي ا) سعر التوازن .... (40 ، 10 ، 8 ، 20)

ب) الكمية التي يحدث عندها التوازن .... (20 ، 24 ، 8 ، 36)

8) إذا كانت $y = e^{-5x}$ فان $y'' = \cdots$، $\int e^{-5x}\,dx = \cdots,$ $y' = \cdots,$

9) اذا كانت الدالة $y = x^3 - 3x^2$ فان نقطة الانقلاب هي ..... [$(1,-3)$, $(1,-4)$, $(1,0)$, $(1,-2)$]

....

التفاضل الجزئي

تنقسم الدوال الي   أ) دوال ذات متغير واحد   ب) دوال ذات أكثر من متغير

أ) دوال ذات متغير واحد (يسمى التفاضل في هذه الحالة تفاضل عادى)

$$1)\ y = x^2 - 3x + 2 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 3, \qquad 2)\ y = 3x^2 + 6x + 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 6x + 6$$

متغير تابع ، متغير مستقل ، تفاضل عادي

ب) دوال ذات اكثر من متغير (يسمى التفاضل في هذه الحالة تفاضل جزئى)

$$1)\ z = 2xy + 3x^2y^2 \qquad 2)\ z = 3xt + x^2y + yt^5$$

متغير تابع ، x ,y متغيرين مستقلين

متغير تابع ، x ,y, t 3 متغيرات مستقلة

في هذه الحالة يطلق على التفاضل تفاضل جزئي بالنسبة لـ x و y و t ويرمز له بالرمز $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t},..$

مثال1) اذا كانت الدالة $z = 2x^2y + 3xy^3$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$

الحـــــــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2(2x)y + 3(1)y^3 = 4xy + 3y^3, \quad Z_y = \frac{\partial z}{\partial} = 2x^2(1) + 3x(3y^2) = 2x^2 + 9xy^2$$

مثال2) اذا كانت الدالة $z = x^2 + y^2$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$

الحـــــــــــل

$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 = 2x,$ $\qquad Z_y = \frac{\partial z}{\partial} = 0 + 2y = 2y$

مثال3) اذا كانت الدالة $z = 2x^3y^2 + 5y^3t^2 + 6xyt$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}$

الحـــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2(3x^2)y^2 + 0 + 6(1)yt = 6x^2y^2 + 6y\,t$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3(2\,y) + 5(3y^2)t^2 + 6x(1)t = 4x^3\,y + 15y^2t^2 + 6xt$$

$$Z_t = \frac{\partial z}{\partial t} = 0 + 5y^3(2t) + 6xy(1) = 10y^3t + 6xy$$

مثال4) اذا كانت الدالة $z = 3x^2y^3 + 5xy^2 + 2x^4y^5$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3(2x)y^3 + 5(1)y^2 + 2(4x^3)y^5 = 6xy^3 + 5y^2 + 8x^3y^5$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2(3y^2) + 5x(2y) + 2x^4(5y^4) = 9x^2y^2 + 10xy + 10x^4y^4$$

مثال5) اذا كانت الدالة $z = x^2 + 2xy$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــــل

$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2(1)y = 2x + 2y\,,$ $\qquad Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2x(1) = 2x$

مثال6) اذا كانت الدالة $z = 6x^2y + 3xy^2$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6(2x)y + 3(1)y^2 = 6xy + 3y^2\,, \quad Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2(1) + 3x(2y) = 6x^2 + 6xy$$

مثال7) اذا كانت الدالة $z = 3x^2y^2 + 6x^3y + 4xy^3$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3(2x)y^2 + 6(3x^2)y + 4(1)y^3 = 6xy^2 + 18x^2y + 4y^3$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2(2y) + 6x^3(1) + 4x(3y^2) = 6x^2y + 6x^3 + 12xy^2$$

المعادلات التفاضلية

ينقسم التفاضل الي

1) تفاضل عادي يكون للدالة متغير واحد $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots ....,$ تفاضل عادي من الرتبة الاولي والثانية والثالثة ...

2) تفاضل جزئي يكون للدالة أكثر من متغير $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$ تفاضل جزئي من الرتبة الاولي والثانية ...

رتبة المشتقة: هو أعلي مستوى تفاضل للدالة

تعريف المعادلة التفاضلية: هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات لمتغير تابع بالنسبة لمتغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = x + 3y, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 3x = 6, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4x - 3y = 2$$

أنواع المعادلات التفاضلية

1) معادلات تفاضلية عادية   **2) معادلات تفاضلية جزئية**

معادلات تفاضلية عادية إذا كانت المعادلة تحتوي على متغير مستقل واحد فإن المشتقة تصبح مشتقة عادية وتصبح المعادلة ***معادلة تفاضلية عادية*** (***Ordinary Differential Equation***) مثل $\frac{d^2y}{dx^2} - 3x = 6$, $\frac{dy}{dx} = 2x + 3,$

معادلات تفاضلية جزئية إذا احتوت المعادلة على أكثر من متغير مستقل واحد فإن المشتقات تكون مشتقات جزئية وتصبح المعادلة ***معادلة تفاضلية جزئية*** (***Partial Differential Equation***) مثل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4x = 3y$, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + 3y,$

مثال 1) المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$ هي معادلة تفاضلية عادية

وذلك لأن المشتقة $\frac{dy}{dx}$ هي مشتقة عادية.

مثال 2) لمعادلة التفاضلية $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} = 3y$ هي معادلة تفاضلية جزئية

وذلك لأن المشتقات $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$ هي مشتقات جزئية.

$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$

متغير مستقل واحد

لاحظي أن:

$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ تعني تربيع المشتقة الاولى

$\frac{d^2y}{dx^2}$ تعني المشتقة الثانية لy بالنسبة لx

تصنيف المعادلات التفاضلية [حسب الرتبة والدرجة]

تعريف: رتبة المعادلة التفاضلية هي **أكبر او اعلى مشتقة** تظهر في المعادلة التفاضلية.

مثال 1 المعادلة التفاضلية $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 5x$ من الرتبة الثالثة

نلاحظ أكبر مشتقه هي الثالثة   ∴ هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثالثة.

مثال 2 المعادلة التفاضلية $y'''' + y'' + y = x$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة

مثال 3) المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 1$ من الرتبة الاولي (العبارة صحيحة - العبارة خاطئة)

مثال 4) المعادلة التفاضلية $\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + \frac{d^3y}{dx^3} + x = 7$ من الرتبة الخامسة (العبارة صحيحة - العبارة خاطئة)

درجة المعادلة التفاضلية هي أس أكبر مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية التالية $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = 7$ هي من الدرجة الثانية..

نلاحظ أن..

1. أكبر مشتقة هي $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ و هذا يعني أنها من الرتبة الثالثة.
2. لهذه المشـــتقة (والتي هي أكبر مشـــتقة) ندرس الأس المرفوعة إليه فنجدها مرفوعة للأس الثاني و هذا يعني أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية.

مثال 2) المعادلة التفاضلية التالية $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + x = 11$ هي من الدرجة الثالثة.

نلاحظ أن..

1. أكبر مشتقة هي $\frac{d^2y}{dx^2}$ وهذا يعني أنها من الرتبة الثانية.
2. لهذه المشـــتقة (والتي هي أكبر مشـــتقة) ندرس الأس المرفوعة إليه فنجدها مرفوعة للأس الثالث وهذا يعني أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثالثة.

مثال 3) المعادلة التفاضلية $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + x = 11$:

هي من الدرجة الثانية (×) لان اس اعلي مشتقة بها هو 3 لذلك فهي من الدرجة الثالثة

هي من الرتبة الثالثة (×) لان اعلي مشتقة بها هي المشتقة الثانية لذلك فهي من الرتبة الثانية

حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلات التفاضلية عن طريق فصل المتغيرات (باستخدام التكامل)

مثال1) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ ؟ الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1} \quad \Rightarrow \quad dy \times 1 = 2x \times dx \Rightarrow dy = 2xdx \Rightarrow \int dy = \int 2xdx$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x^2}{2} + c \quad \Rightarrow y = x^2 + c$$

مثال2) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ ؟ الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3}{1} \quad \Rightarrow \quad dy \times 1 = (2x+3)dx \Rightarrow dy = (2x+3)dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int (2x+3)dx \quad \Rightarrow y = \frac{2x^2}{2} + 3x + c \quad \Rightarrow y = x^2 + 3x + c$$

مثال3) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 6x$ ؟ الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{1} \quad \Rightarrow \quad dy \times 1 = 6x \times dx \Rightarrow dy = 6xdx \Rightarrow \int dy\, dy = \int 6xdx$$

$$\Rightarrow y = \frac{6x^2}{2} + c \quad \Rightarrow y = 3x^2 + c$$

مثال4) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ؟ الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y\, dy = xdx \Rightarrow \int y\, dy = \int xdx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2} \quad \Rightarrow y^2 = x^2 + c$$

مثال5) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ؟ الحـــــــــل هنا لفصل المتغيرات نقسم البسط ÷ البسط = المقام÷ المقام

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow ln\,(y) = ln(x) + ln(c) \quad \Rightarrow ln\,(y) = ln(c.x) \quad \Rightarrow y = c.x$$

قسم المراجعات

المراجعة العامة الاولى: (تم حل تمارين المراجعة الاولى في المحاضرة العاشرة – تحت عنوان تمارين متنوعة)

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

1) النقطة التي احداثياتها (3- , 2) تقع في الربع ....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

2) النقطة (1-,5-) تقع في الربع ....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

3) النقطة (0 , 2) تقع ....

أ) في الربع الأول ب) علي محور السينات ج) في الربع الثالث د) علي محور الصادات

4) اذا كان (a, b) = (3, 1) فان a + b = ...

أ) 1 ب) 2 جـ) 3 د) 4

5) اذا كان X × Y = {(2 , 6) , (2 , a) , (5 , 6) , (5 ,a), (8,6), (8 ,a)} فان X=........

أ) { 2, 5 , 8} ب) { 2 , 3 } جـ) {6 , a } د) {5 , 6 }

6) اذا كان n (Y) = 2 , n(X) = 3 فان n (X × y) =.....

أ) 2 ب) 3 جـ) 5 د) 6

7) اذا كانت العلاقة R = {(1,2) , (2,3) , (5,2), (4,3)} تمثل دالة فان مداها يساوي

أ) { 2, 3 } ب) {1,2,4,5} ج) {2,3,4,5} د) {3,4,6,7}

8) إذا كانت f (x) = 2 فان 2 × f (3) = ...

أ) 10 ب) 4 ج) 3 د) 2

9) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويقطع جزءا من محور الصادات السالب طوله 5 وحدات هي

أ) y=-2x+ 5 ب) y=2x- 5 ج) y=5x- 2 د) y=2x+ 2

10) ميل المستقيم المار بالنقطتين (3 , 4) , (2, 3) يساوي ....

أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

11) الدالة $f(x) = 2x^5 + 5x^2 + 4x - 11$ من الدرجة

أ) الاولي ب) الثانية ج) الثالثة د) الخامسة

12) الدالة f(x)=5 يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

أ) (5,0) ب) (0,5) ج) (5,5) د) (0 , 0)

13) أودع شخص مبلغ 10000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10% سنويا لمدة خمس سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية المدة تساوي ....

أ) 20000 ب) 10000 ج) 15000 د) 5000

14) اقترض شخص مبلغ 1000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة ثلاث سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي

أ) 1259.712 ب) 259.712 ج) 2259.712 د) 459.712

15) جملة مبلغ P بمعدل فائدة مركبة R% سنويا لمدة n من السنوات يساوي

أ) $S = P + (1+R)^n$ ب) $S = P - (1+R)^n$ ج) $S = P \div (1+R)^n$ د) $S = P \times (1+R)^n$

16) المشتقة الاولي للدالة $f(x) = 10$ هي ....

أ) 0 ب) 5 ج) 15 د) 10

17) اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + x + 2$ فان المشتقة الأول لها هي

أ) $f'(x)= 2x$ ب) $f'(x)= x^2+1$ ج) $f'(x)=2x+1$ د) $f'(x)= 2x+2$

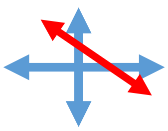
18) ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^3-2x+1$ عندما $x=1$ يساوي ....

أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

19) إذا كان $2 \in X$ و $5 \in Y$ فان $(5,2) \in \cdots \ldots ....$

أ) $X \times Y$ ب) $Y \times X$ ج) X^2 د) Y^2

20) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل



أ) موجب ب) سالب ج صفر د) غير ومعروف

21) إذا كانت الدالة $f(x) = (x-2)(x+2)$ فان $f'(x) = \cdots$

أ) x^2 ب) $2x$ ج) $2x-4$ د) x

22) إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ فان $f'(x) = \cdots$

أ) $\frac{7}{3x+2}$ ب) $\frac{7}{(3x+2)^2}$ ج) $\frac{-7}{(3x+2)^2}$ د) $\frac{7}{(2x-1)^2}$

23) إذا كانت الدالة $f(x) = (2x+7)^5$ فان $f'(x) = \cdots$

أ) $(20x+70)^4$ ب) $10(2x+7)^5$ ج) $5(2x+7)^4$ د) $10(2x+7)^4$

24) إذا كانت الدالة $f(x) = x^3 + 2x + 1$ فان $f''(x) = \cdots$

أ) $6x^2$ ب) $3x^2+2$ ج) $6x$ د) $6x+2$

25) القيمة العظمي للربح اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة $f(x) = -2x^2 + 12x + 3$ هي

أ) 18 ب) 19 ج) 20 د) 21

26) اذا كان سعر السلعة P والكمية المطلوبة من هذه السلعة q فان مرونة الطلب السعرية $E_P = \cdots$

أ) $\frac{P+q'}{q}$ ب) $\frac{P-q'}{q}$ ج) $\frac{P.\, q'}{q}$ د) $\frac{P\div q'}{q}$

27) ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ عند $x= 3$ يساوي ....

أ) 6 ب) 12 ج) 18 د) 0

28) اودعت مرام مبلغ 5000 في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة 3 سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة يساوي ....

أ) 6000 ب) 1298.56 ج) 6298.56 د) 6239.56

29) اذا كانت الدالة $f(x) = e^{3x}$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$

أ) e^{3x} ب) $\frac{e^{3x}}{3}$ ج) $3e^{3x}$ د) $-3e^{3x}$

30) اذا كانت الدالة $f(x) = ln\, 2x$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$

أ) $2x$ ب) $\frac{2}{x}$ ج) $\frac{1}{2x}$ د) $\frac{1}{x}$

31) اذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة $C(x) = x^2 + 3x + 20$ فان التكاليف الحدية عند x=10 تساوي

أ) 150 ب) 23 ج) 17 د) 50

32) $\int x + 1\, dx$ يساوي ......

أ) $x^2 + c$ ب) $x^2 + x + c$ ج) $\frac{1}{2}x^2 + c$ د) $\frac{1}{2}x^2 + x + c$

33) اذا كانت الدالة $f(x) = e^{-5x}$ فان المشتقة الثانية للدالة $f''(x) = \cdots$

أ) e^{-5x} ب) $\frac{e^{-5x}}{25}$ ج) $25e^{-5x}$ د) $-25e^{-5x}$

34) اذا كانت دالة الايراد تعطي بالعلاقة $R(x) = x^2 - 5x$ فان الايراد الحدي عند x=100 تساوي

أ) 300 ب) 205 ج) 195 د) 9500

35) $\int x^{-5}\, dx$ يساوي ......

أ) $\frac{x^{-6}}{-6} + c$ ب) $x^{-6} + c$ ج) $x^{-4} + c$ د) $\frac{x^{-4}}{-4} + c$

36) المساحة تحت منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ وبين المستقيمين $x = 0,\ \ x = 2$ تساوي

أ) 12 ب) 13 ج) 10 د) 8

37) اذا كانت *f(x)* دالة فان $\int_a^b f(x)\, dx = \cdots$

أ) $F(b) + F(a)$ ب) $F(b) - F(a)$ ج) $F(a) - F(b)$ د) $F(b) \div F(a)$

38) اذا كانت الدالة $f(x) = e^{3x}$ فان المشتقة الاولي للدالة $\int e^{2x} dx = \cdots$

أ) e^{2x} ب) $\frac{e^{2x}}{2}$ ج) $2e^{2x}$ د) $-2e^{2x}$

39) $\int \sqrt{x}\, dx$ يساوي ......

أ) $\frac{x^{0.5}}{0.5} + c$ ب) $\frac{x^{-0.5}}{-0.5} + c$ ج) $\frac{x^{1.5}}{1.5} + c + c$ د) $\frac{x^2}{2} + c$

40) اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة $P(x) = 2x^2 - 10x$ فان الايراد الحدي عند x=10 تساوي

أ) 100 ب) 30 ج) 40 د) 30

41) $\int (2x - 1)^6\, dx$ يساوي ......

أ) $\frac{(2x-1)^5}{10} + c$ ب) $\frac{(2x-1)^7}{7} + c$ ج) $\frac{(2x-1)^7}{14} + c$ د) $6(2x - 1)^5 + c$

42) $\int (2x^2 + 3x - 1)^7\, (4x + 3)dx$ يساوي ......

أ) $\frac{(2x^2+3x-1)^8}{8} + c$ ب) $(2x^2 + 3x - 1)^8 + c$ ج) $7(2x^2 + 3x - 1)^6$ د) لا شيء مما سبق

43) $\int \frac{1}{e^{3x-5}}\, dx$ يساوي ......

أ) $\frac{e^{3x-5}}{3} + c$ ب) $\frac{e^{-3x+5}}{-3} + c$ ج) $3.e^{3x-5}$ د) $-3e^{-3x+5} + c$

44) إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطي بالعلاقة $C'(x) = 3x^2 + 2x + 20$ علما بان التكاليف الثابتة تساوي 100 فان دالة التكاليف عند هي $C(x) = \cdots$

أ) $x^3 + x^2 + 20x$ ب) $6\,x + 2$ ج) $6\,x + 102$ د) $x^3 + x^2 + 20x + 100$

45) $\int \frac{1}{x} dx$ يساوي ......

أ) $x^2 + c$ ب) $x^{-1} + c$ ج) $x + c$ د) $ln\, x + c$

46) إذا كانت دالة الايراد الحدي تعطي بالعلاقة $R'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 8$ فان دالة الايراد عند x=1 تساوي...

أ) 26 ب) 16 ج) 10 د) 8

47) إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي $p'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 24x^3$ فان دالة الربح...

أ) $2x^6 + 3x^5 + 6x^4$ ب) $60x^4 + 60x^3 + 72x^2$ ج) $5x^4 + 4x^3 + 4x^2$ د) $812x^6 + 15x^5 + 24x^4$

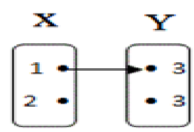
48) اطراد الدالة $f(x) = x^2 - 5x + 6$ في الفترة $[-2, 1]$ هو ....

أ) تزايديه ب) تناقصيه ج) ثابتة د) زوجية

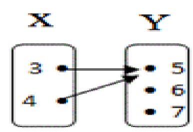
49) جملة مبلغ 9000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% ثلث سنوي لمدة 8 سنوات هو ....

أ) 22283.66 ب) 13283.66 ج) 8640 د) 17640

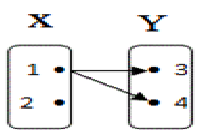
50) المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي ....



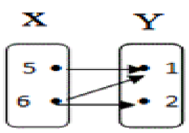
أ)



ب)



ج)



د)

المراجعة الشاملة الثانية

المراجعة الشاملة الثانية (تم حل تمارين المراجعة كاملة فى المحاضرتين 20 و 21)

أكمل الجمل الاتية لتحصل على إجابة صحيحة

1) نهاية الدالة $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ يساوي.........

2) إذا كانت الدالة $f(x) = ln\, 5x$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$

3) نهاية الدالة $\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^3-8}$ يساوي.........

4) اذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة $C(x) = x^3 + 5x + 20$ فان التكاليف الحدية عند =6x تساوي

5) $\int 2x + 5\, dx$ يساوي ......

6) نهاية الدالة $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^3-3x^2+7}{3x^3-4x-8}$ يساوي.........

7) إذا كان $sin\, x = 0.3$ و $cos\, x = 0.6$ فان $tan\, x = \cdots$

8) إذا كانت الدالة $f(x) = e^{-3x}$ فان المشتقة الثالثة للدالة $f'''(x) = \cdots$

9) اذا كانت دالة الايراد تعطي بالعلاقة $R(x) = x^3 - 5x^2 + 10x$ فان الايراد الحدي عند x=8 تساوي

10) $\int x^{-4}\,dx$ يساوي ......

11) المساحة تحت منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ وبين المستقيمين $x = 0,\ \ x = 3$ تساوي

12) إذا كانت *f(x)* دالة فان $\int_a^b f(x)\,dx = \cdots$

13) إذا كانت الدالة $f(x) = e^{7x}$ فان $\int e^{7x} dx = \cdots$

14) $\int_0^1 3x^2 - 2x + 9\,dx = \cdots$

15) نهاية الدالة $\lim_{x\to 0} \frac{2x + \sin 3x}{5x}$ تساوي .....

16) إذا كانت الدالة $f(x) = \sin 5x$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$

17) اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة $P(x) = 3x^2 - 15x$ فان الايراد الحدي عند x=20 تساوي

18) $\int (2x-1)^{11}\,dx$ يساوي ......

19) النقطة التي احداثياتها (-1 , 3) تقع في الربع ....

20) النقطة (-3,-2) تقع في الربع ....

21) النقطة (9 , 0) تقع ....

22) $\int \sec^2 3x\,dx = \cdots$

23) اذا كان (a, 3) = (5, b) فان a . b = ...

24) اذا كان Y × X = {(1 , 4) , (1 , 5) , (1 , 7) , (6 ,4), (6,5), (6 ,7)} فان X=........

25) اذا كان n (Y) =4 , n(X) = 3 فان n (Y × X) =.....

26) إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x > 2 \\ 6x - 3, & x \le 2 \end{cases}$ فان $\lim_{x\to 2} f(x) = \cdots$

27) إذا كانت الدالة $f(x) = \cos 3x + \tan 5x$ فان $f'(x) = \cdots$

28) اذا كانت العلاقة R = {(6,1) , (2,5) , (7,3), (4,9)} تمثل دالة فان مداها يساوي

29) إذا كانت f (x) = 5 فان 4 × f (2) = ...

30) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويقطع جزءا من محور الصادات الموجب طوله 2 وحدات هي

31) ميل المستقيم المار بالنقطتين (3 , 6) , (1, 2) يساوي ....

32) الدالة $f(x) = 5x^3 - 2x^4 + 7x^2 + 9$ من الدرجة

33) الدالة f(x)=9 يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

34) أودع شخص مبلغ 20000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 12% سنويا لمدة 10 سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية المدة تساوي ....

35) اقترض شخص مبلغ 2000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 10% سنويا لمدة 5 سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي ....

36) جملة مبلغ P بمعدل فائدة مركبة R% سنويا لمدة n من السنوات يساوي ....

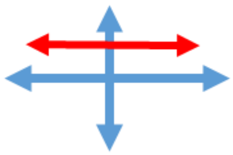
37) المشتقة الاولي للدالة f(x) = 7 هي ....

38) اذا كانت الدالة $f(x) = x^4 + 2x + 5$ فان المشتقة الأول لها هي ....

39) ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x^5 - 4x + 3$ عندما x=1 يساوي ....

40) إذا كان $8 \in X$ و $6 \in Y$ فان $(8, 6) \in \cdots \dots \dots$

41) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل ....



42) إذا كانت الدالة $f(x) = (x-5)(x+5)$ فان $f'(x) = \cdots$

43) إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{x-1}{2x+5}$ فان $f'(x) = \cdots$

44) إذا كانت الدالة $f(x) = (2x+3)^{15}$ فان $f'(x) = \cdots$

45) إذا كانت الدالة $f(x) = x^5 + 3x^2 + 1$ فان $f''(x) = \cdots$

46) القيمة الصغرى للربح اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة $f(x) = x^2 - 10x + 11$ هي ....

47) إذا كان سعر السلعة P والكمية المطلوبة من هذه السلعة q فان مرونة الطلب السعرية $E_P = \cdots$

48) ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x) = 2x^5 - 11x + 2$ عند *x= 2* يساوي ....

49) اودعت علا مبلغ *2000* في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة *11* % سنويا لمدة *6* سنوات فان الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة يساوي ....

50) إذا كانت الدالة $f(x) = e^{7x}$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots ..$

51) $\int (x^4 + 3x - 1)^6 \, (4x^3 + 3)dx$ يساوي ......

52) $\int \frac{1}{e^{5x-6}} dx$ يساوي ......

53) $\int \frac{1}{x} dx$ يساوي ......

54) إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطي بالعلاقة $C'(x) = 2x + 10$ علما بان التكاليف الثابتة تساوي 30 فان دالة التكاليف عند هي $C(x) = \cdots$

55) إذا كانت دالة الايراد الحدي تعطي بالعلاقة $R'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 5$ فان دالة الايراد عند x=2 تساوي...

56) إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي $p'(x) = 3x^2 + 8x + 1$ فان دالة الربح...

57) اطراد الدالة $f(x) = 4x - 1$ في الفترة $[1, 5]$ هو ....

58) جملة مبلغ *5000* ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة *14%* نصف سنوي لمدة *6* سنوات هو ....

59) مساحة المنطقة أسفل منحني الدالة $f(x) = 8x^3 + 2$ بين المستقيمين $x = 0, \ x = 1$ تساوي .....

60) معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي *3* ويمر بالنقطة *(2,5)* هي ....

المراجعة العامة والنهائية

أجب عن الأسئلة الاتية:

1) إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p) تعطى بالمعادلة الآتية: $q = 200 - 7p^2$ فان الطلب يكون مرن عندما $p = 10$

أ) العبارة صحيحة ب) العبارة خاطئة

2) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = 4$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 5$ فان $\lim_{x\to 2}[f(x) \times g(x)] = \cdots$

3) إذا كانت $\sin x = 0.2$ و $\cos x = 0.5$ فان:

1) $\tan x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) 0.2 ب) 0.5 ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{2}{5}$]

2) $\cot x = \cdots$ [أ) 0.2 ب) 0.5 ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{2}{5}$]

4) إذا كانت $\sin x = 0.3$ و $\cos x = 0.7$ فان:

1) $\tan x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) 0.3 ب) 0.7 ج) $\frac{7}{3}$ د) $\frac{3}{7}$]

2) $\cot x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) 0.3 ب) 0.7 ج) $\frac{7}{3}$ د) $\frac{3}{7}$]

3) $\csc x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) 0.3 ب) 0.5 ج) $\frac{10}{7}$ د) $\frac{10}{3}$]

4) $\sec x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) 0.3 ب) 0.5 ج) $\frac{10}{7}$ د) $\frac{10}{3}$]

5) $\lim_{x\to 0} \frac{6x - \tan 2x}{\sin 5x + 4x} = \cdots$

6) إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 8, & x > 1 \\ 2x + 9, & x < 1 \end{cases}$ فان $\lim_{x\to 1} f(x) = \cdots$

7) الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 2 \\ 4x - 3, & x < 2 \end{cases}$ متصلة عند $x = 2$ اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

8) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$ متصلة عند $x = 1$ فان: $k = \cdots$

9) الدالة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ تزايديه في الفترة [2,4] اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

10) نقطة الانقلاب للدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ هي ....

11)

1) إذا كانت قيمة المشتقة الاولي للدالة عند أي نقطة في فترة موجبة فان الدالة .... في الفترة

أ) تزايدية ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

2) إذا كانت قيمة المشتقة الاولي للدالة عند أي نقطة في فترة سالبة فان الدالة .... في الفترة

أ) تزايدية ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

3) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند أي نقطة في فترة موجبة فان الدالة .... في الفترة

أ) تزايدية ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

4) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند أي نقطة في فترة سالبة فان الدالة .... في الفترة

أ) تزايدية ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

12) الدالة $f(x) = \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5}$ هي دالة فردية اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

13) إذا علمت ان دالة الطلب لسلعة معينة $Q_d = 3p - 4$ ودالة العرض لنفس السلع $Q_s = 36 - 2p$ فأجب عما يأتي

ا) سعر التوازن .... (40 ، 10 ، 8 ، 20)

ب) الكمية التي يحدث عندها التوازن .... (20 ، 24 ، 8 ، 36)

14) اذا كانت الدالة $y = x^3 - 3x^2$ فان نقطة الانقلاب هي ....[$(1,-3)$, $(1,-4)$, $(1,0)$, $(1,-2)$]

15) اذا كانت الدالة $z = x^2 + y^2$ فان : $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y$ اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

16) اذا كانت الدالة $z = x^2 + 2xy$ فان : $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y$ اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

17) المعادلة التفاضلية $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 5x$ من الرتبة الخامسة اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

18) المعادلة التفاضلية التالية $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = 7$ هي من الدرجة الثالثة اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

19) حل المعادلة التفاضلية حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ هو ....

20) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ هو $y = x + c$ اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

21) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ هو ....

22) نهاية الدالة $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ يساوي.........

23) إذا كانت الدالة $f(x) = ln\,5x$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$

24) نهاية الدالة $\lim_{x\to 2} \frac{x^6-64}{x^2-4}$ يساوي.........

25) اذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة $C(x) = x^3 - 5x^2 + 30$ فان التكاليف الحدية عند x=10 تساوي

26) يمكن الحصول علي منحني الدالة $f(x) = x^2 - 1$ بإزاحة منحنى الدالة $f(x) = x^2$ افقيا الي اليسار علي محور السينات بمقدار وحدة واحدة اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

27) نهاية الدالة $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-2x^2+3}{5x^3+6x-1}$ يساوي.........

28) إذا كانت الدالة $f(x) = e^{-5x}$ فان المشتقة الثالثة للدالة $f'''(x) = \cdots$

29) اذا كانت دالة الايراد تعطي بالعلاقة $R(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$ فان الايراد الحدي عند x=2 تساوي..........

30) $\int x^{-5}\, dx$ يساوي ......

31) المساحة تحت منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ وبين المستقيمين $x = 0,\ x = 2$ تساوي

32) إذا كان تكامل الدالة f(x) هو F(x) فان $\int_a^b f(x)\,dx = \cdots$

33) إذا كانت الدالة $f(x) = e^{8x}$ فان $\int e^{8x} dx = \cdots$

34) إذا كانت الدالة $f(x) = sin\,5x$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$

35) اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة $P(x) = 2x^3 - 15x^2$ فان الربح الحدي عند x=10 تساوي ....

36) $\int (3x-5)^9\, dx$ يساوي ......

37) النقطة التي احداثياتها (2 , 7-) تقع في الربع ....

38) النقطة (8,-5) تقع في الربع ....

39) النقطة (0 , 11-) تقع ....

40) $\int sec^2 5x\, dx = \cdots$

41) اذا كان (a, 4) = (8, b) فان a ÷ b = ...

42) اذا كان Y × X = {(3 , 4) , (3 , 5) , (3 , 7) , (8 ,4), (8,5), (8 ,7)} فان X=........

43) اذا كان n (Y) =3 , n(X) = 5 فان n (Y × X) =.....

44) إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x > 2 \\ 6x - 3, & x \le 2 \end{cases}$ فان $\lim_{x\to 2} f(x) = \cdots$

45) إذا كانت الدالة $f(x) = \cos 3x + \tan 5x$ فان $f'(x) = \cdots$

46) اذا كانت العلاقة R = {(6,2) , (2,5) , (7,6), (4,8)} تمثل دالة فان مداها يساوي ....

47) إذا كانت f (x) = 3 فان 2 × f (4) = ...

48) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 5 ويقطع جزءا من محور الصادات السالب طوله 3 وحدات هي

49) ميل المستقيم المار بالنقطتين (3 , 5) , (2, 1) يساوي ....

50) الدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^4 + 7x^5 + 6$ من الدرجة ....

51) الدالة f(x)=5 يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ....

52) أودع شخص مبلغ 15000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10% سنويا لمدة 12 سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية المدة تساوي ....

53) اقترض شخص مبلغ 4000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة 6 سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي ...

54) جملة مبلغ P بمعدل فائدة مركبة R% سنويا لمدة T من السنوات يساوي ....

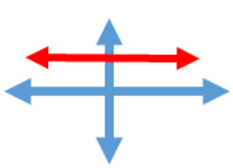
55) المشتقة الاولي للدالة f(x) = 7 هي ....

56) اذا كانت الدالة $f(x) = x^4 + 2x + 5$ فان المشتقة الأول لها هي ....

57) ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 + 9$ عندما x=1 يساوي ....

58) إذا كان $3 \in X$ و $2 \in Y$ فان $(2, 3) \in \cdots ... .$

59) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل ....



60) إذا كانت الدالة $f(x) = (3x - 8)(3x + 8)$ فان $f'(x) = \cdots$

61) إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ فان $f'(x) = \cdots$

62) إذا كانت الدالة $f(x) = (3x + 2)^{10}$ فان $f'(x) = \cdots$

63) إذا كانت الدالة $f(x) = x^6 + 4x^3 + 1$ فان $f''(x) = \cdots$

64) القيمة الصغرى للربح اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة $f(x) = x^2 - 6x + 8$ هي ....

65) إذا كان سعر السلعة P والكمية المطلوبة من هذه السلعة q فان مرونة الطلب السعرية $E_P = \cdots$

66) ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = 5x^2 - 11x + 2$ عند $x=1$ يساوي ....

67) اودعت علا مبلغ 3000 في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8 % سنويا لمدة 4 سنوات فان الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة يساوي ....

68) إذا كانت الدالة $f(x) = e^{9x}$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$..

69) $\int (x^3 + 2x - 1)^5 \,(3x^2 + 2)dx$ يساوي ......

70) $\int \frac{1}{e^{4x-2}} dx$ يساوي ......

71) إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطي بالعلاقة $C'(x) = 4x + 15$ علما بان التكاليف الثابتة تساوي 10 فان دالة التكاليف عند هي $C(x) = \cdots$

72) $\int \frac{2}{x} dx$ يساوي ......

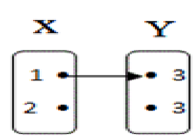
73) إذا كانت دالة الايراد الحدي تعطي بالعلاقة $R'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 2$ فان دالة الايراد عند x=2 تساوي...

74) إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي $p'(x) = x^2 + 6x + 4$ فان دالة الربح...

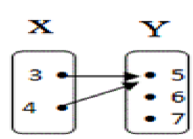
75) اطراد الدالة $f(x) = 8x - 2$ في الفترة $[2, 6]$ هو ....

76) جملة مبلغ 4000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 1.5% شهري لمدة 3 سنوات هو ....

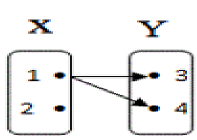
77) المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي ....



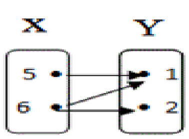
أ)



ب)



ج)



د)

78) مساحة المنطقة أسفل منحني الدالة $f(x) = 12x^3 + 2$ بين المستقيمين $x = 0,\ x = 1$ تساوي

79) معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 4 ويمر بالنقطة *(1,2)* هي ....

80) المعادلة $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + 3y,$ هي معادلة تفاضلية عادية اختر (العبارة صحيحة - العبارة خاطئة)

مع تحياتي بالتوفيق والنجاح لجميع الطلاب

د محمد تركي