أسم المقرر : **الاحصاء في الادارة**

استاذ المقرر: **د/ أحمد فرحان**

المحاضرة (1)

المجموعات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء أخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C , ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b ,c , ...

تابع تعريف المجموعة :-

يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة
فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A
فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة
$a \in A$
أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا
نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على
الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

A = { 2,0,1,4}

B= { a , b ,c , d }

C= { 1 , 2 , 3 .....}

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل 1 2 3 4وهكذا)

D = { 1, 2 , 3,....,100}

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x : عدد زوجي x }

B = { x : طالب بمقرر الاحصاء في الادارة x }

C = { x : طالب بنظام التعليم عن بعد x }

D = { x : $-3 \leq x \leq 1$ عدد صحيح x }

X = { x : $0 \leq x \leq 12$ عدد صحيح x}

أنواع المجموعات:

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ф (فاي) أو { } .

أمثلة :-

A = { x : عدد طبيعي زوجي و فردي x }

B = { x : دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية x }

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

A = { 2 , 4 , 6 , 8 }

B = { 1 , 2 , 3 , ... , 100}

C = { x , y , s, t u }

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

$A = \{$ x : عدد طبيعي فردي $\}$

$B = \{ 10, 20 , 30 ,\ldots\ldots\ldots \}$

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{2 , 4 , 6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \;,\; B \subseteq A \quad \gg\gg\gg\gg \quad A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {1, 5, 7 , 9 } , B = {9 , 7 ,5 ,1 }

2- A= { 2 ,5 ,9 } , B = { a , s , d }

الحل

$1 - A = B$

$2 - A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان A = { 1 , 2 , 3 , 7} و B= { 2 , 4 , 6 , 8 } أوجد (AUB) ؟

الحل

(AUB) = {1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8}

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان A = { -1 , 0 , 1 , 2 , 3}و B = {0,2,4,6,} أوجد A ∩ B

الحل

(A ∩ B) = {0 , 2 }

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} و A={2,4,6,8,10}
أوجد

الحل

$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت A={1,2,3,x,y} و B={3,4,5,x,w} أوجد A-B

الحل: A-B = { 1 , 2 , y }

مثال :-
إذا كانت
A={1,2,3,x,y} و
B={3,4,5,x,w}
و المجموعة الكلية
U = { 1,2,3,4,5,w,x,y,z}
فأوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
2- $A \cap B = \{3, X\}$
3- $B - A = \{4, 5, w\}$
4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
8- $\overline{A} \cup A = U$
9- $\overline{A} \cap A = \{\ \}$

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ،B (A×B) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x , y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت A={-2,1} و B ={-3,1,4}

فأوجد A × B و B × A

الحل

A × B ={(-2,-3) , (-2,1) , (-2,4) , (1,-3) , (1,1) , (1,4)}

B × A = {(-3,-2) , (-3,1) ,(1,-2) , (1,1) ,(4,-2) , (4,1)}

مثال :-

أنشئ $A \times B$ و $B \times A$، علماً بأن :-

$A=\{1,2\}$ و $B = \{ w , x , y \}$

الحل

$A \times B =\{(1,w) ,(1,x) , (1,y) , (2,w) , (2,x) , (2,y)\}$

$B \times A = \{(w,1),(w,2),(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1=x_2)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الاول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني،$(y_1=y_2)$

مثال :-

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x+1 , y - \frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$

الحل

$X+1 = 4 \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad x = 4-1 =3$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a , b , c\}$

الحل

$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} ,\{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} ,\{a,b,c\} ,Ø \}$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

تمرين :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{ a, b , c \}$

$P(S) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} ,\{b,c\} ,\{a,b,c\} , Ø \}$

$2^3 = 8$

تمارين:

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عددx سالب و موجب }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , ...,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,.......}

(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن A ⊂ B ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }

2- A= { 20 ,50 ,70 } , B = { k , d , u }

4- إذا كانت

A={8,10,12,r,m} و

B={4,6,10,o,r}

المجموعة الكلية

U = {4,6,8,10,12,o,r,m,p}

ثم أوجد :-

1- A∪B

2- A ∩ B

3- B – A

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A}$ ∪ A

9- $\overline{A}$ ∩ A

٥- إذا كانت $A=\{-5,7\}$ و $B=\{-6,4,9\}$

فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة

$(x+1 , y - 10) = (2x , 15)$ ؟

7- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2 , 5 , 8\}$ ؟

8- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر ، فأوجد عدد عناصر $P(S)$ ؟

المحاضرة(2)

الدوال

الدالة:-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ,وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو(تتوقف على) أو (تتعين بواسطة) كمية أخرى.

ملاحظة :-

اذا كانت F دالة من A الى B فأن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون F دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة

- **واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور.**

- **مثال :**

- اذا $A = \{1,2,3\}$ و $b = \{4,8,12\}$
- و $f_1 = \{(1,4) , (2,4) , (3,12)\}$
- $F_2 = \{ (1,4) , (2,8) \}$
- $F_3 = \{(1,4) , (1,8) , (2,4) , (3,12) \}$
- فهل $f1 , f2 , f3$ دوال من A الى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ هل
$f_1=\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل الدالة

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}
2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }
3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }
4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}
5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}
6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}

2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }

3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}

5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}

6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- f(2)

2- f(-1)

3- f(a)

4- f(x+1)

مثال :

إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ فأوجد :-

1- f(-3)

2- f(1/2)

3- f(a)

تمارين:-

١- للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب f(t) و f(-5) .

٢- للدالة $f(x)=3x^2-2$ أحسب f(2)+f(-1)+f(3) .

٣- للدالة f(x)=x+4 أحسب 2f(4)+3f(-1) .

٤- للدالة $f(x)=x^2-1$ أحسب f(3)-f(-2) .

الدوال الحقيقية :-

• الحدود كثيرة دالة :

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$$
$$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)
2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)
3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)
4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)
5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال : إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$
$= f(x) + f(g)$
$= 3x+5 + x^2+1$
$= x^2+3x+6$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$
\begin{aligned}
2\text{-}(f - g)(x) &= \\
&= f(x) - g(x) \\
&= (3x+5) - (x^2+1) \\
&= 3x+5 - x^2 - 1 \\
&= -x^2 + 3x + 4
\end{aligned}
$$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$
\begin{aligned}
3\text{-}\ (f \times g)(x) &= \\
&= f(x) \times g(x) \\
&= (3x+5) \times (x^2+1) \\
&= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\
&= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5
\end{aligned}
$$

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x \times 5x$ و $g(x) = x^{\wedge}2+1$

فأوجد :

$$4\text{-}\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

أيجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_1 , y_1)$
ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_1 \neq x_2$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - -3}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$
$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$
$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ اذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال : هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$
$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$$

اذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي -2 .

الحل:-

$$m = -2 \quad , \; x_1 = 5 \quad , \; y_1 = -3$$
$$y - (-3) = -2(x-5)$$
$$Y + 3 = -2(x-5)$$
$$y = -2x + 7$$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$f_1=\{(5,2),(9,3),(13,4)\}$

و $f_2=\{(5,2),(9,3),(13,6)\}$

و$f_3=\{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$

فهل $f_1\ f_2\ f_3$ دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R=\{(1,4),(2,4),(3,3),(4,5)\}$

2- $R=\{(2,4),(3,1),(3,2),(4,1),(5,2)\}$

3- $R=\{(-1,0),(-4,4),(2,3),(1,9)\}$

٣- للدالة $f(x)=2x^3+10x^2-15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤-إذا كانت $f(x)=6x+3$ و $g(x)=10$ فأوجد:

$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\times g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6,\frac{-3}{4})$ و $B(4,\frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ و $B(7,\frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$-5x + 3y - 8 = 0$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$12x = -9y + 30$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y - 4 = 0$ و $4y = 16x + 4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y - 12x - 6 = 0$ ، $8y + 2x - 30 = 0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (9,-2) و ميله يساوي 5- ؟

المحاضرة(3)

النـهايات و الاتصال

مفهوم النـهايـة :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النـهايات على الصيغة $lim_{x\to a} f(x)$ وتقرأ نـهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x +1$ فإن $lim_{x\to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النـهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النـهايات :

1- إذا كانت $f(x)=c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

2- إذا كانت $f(x) = m x + c$ فإن $lim_{x\to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :

الحل

$lim_{x\to 5} 30 = 30$

$lim_{x\to 2}(1-2x) = 1 - (2 \times -2) = 5$

$lim_{x\to 2}(3x+4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$

$lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5) = 8 \times 1/2 - 5 = 4 - 5 = -1$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to 5}[h(x) - f(x)]$

$= \lim_{x\to 2} h(x) - \lim_{x\to 2} f(x)$

$= 10.5 - 5 = 5.5$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

2- $\lim_{x\to 5}[g(x) \times h(x)]$

$= \lim_{x\to 2} g(x) \times \lim_{x\to 2} h(x)$

$= -8 \times 10.5 = -84$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

3- $\lim_{x\to 2} 8\, f(x)$

$= 8 \times \lim_{x\to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

4- $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

مثال :

$$lim_{x\to1}[3x-1]^6 = [lim_{x\to1} 3x-1]^6$$

$= [3\times1-1]^6 = [3-1]^6 = [2]^6 = 64$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $lim_{x\to2}(3x^3+5x^2-7)$

$= 3\times2^3+5\times2^2-7$

$= 3\times8+5\times4-7 = 37$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2- $lim_{x\to3}\frac{3x^2+7}{x-5}$

$= \frac{3\times3^2+7}{3-5} = \frac{3\times9+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

3- $lim_{x\to2}\frac{2x-1}{5x+3}$

$= \frac{2\times2-1}{5\times2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$

4- $lim_{x\to2} e^x$

$= e^2$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

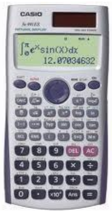
5- $lim_{x\to1} e^{x^2+2x+1}$

$= e^{1^2+2\times1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

6- $lim_{x \to 2} log(3x^2 + 5)$ = log (3×2^2 + 5)

= log (3×4+5)

= log (12+5) = log (17)




أ مثلة

أوجد نهاية كل من الدوال التالية -:

7- $lim_{x \to 3} ln(2x - 5)$ = ln (2×3-5) = ln (6-5) = ln (1) =0

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية -:

8- $lim_{x \to 1}(3x^3 + 4x - 2)^3$ = $((3 \times 1^3) + 4 \times 1 -2)^3$

= $(3+4-2)^3 = (5)^3$ = 125

9- $lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x^2 + 5}$ = $\sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9}$ = 2.08

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل -:

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى 3 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى 7 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

فأوجد -:

1- $lim_{x \to 3} f(x)$ (و 3 تقع في مجال الدالة الثانية)

= 7x -2 = 7 × 3 -2 = 19

مثال :

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \ x < 1 \\ 7x - 2 & , \ x > 1 \end{cases}$

فأوجد :-

2- $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (\frac{1}{2})^2 + 5 = 3\times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

فأوجد :-

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

فأوجد :-

الحل

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $lim_{x\to5^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $lim_{x\to5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$lim_{x\to5^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= 6x - 10 = \quad 6 \times 5 - 10 = 20$

$lim_{x\to5^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to5^+} f(x) \neq lim_{x\to5^-} f(x)$

$lim_{x\to5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة(4)

الجزء الاول : تابع الاتصال

الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاتصال :-

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$lim_{x\to5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$lim_{x\to5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$lim_{x\to10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$lim_{x\to10^-} f(x)$ = $12x^2 = 12\times 10^2$ = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

$f(8) = 20\ x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$

$lim_{x\to8^+} f(x) = 1160 + 15x = 1160 + 15 \times 8 = 1280$

$lim_{x\to8^-} f(x) = 20\ x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند $x=8$.

تمارين الواجب :-

تمرين 1 :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$lim_{x\to\frac{2}{3}}(9x-2)$$

تمرين 2 :-

إذا كانت $lim_{x\to5} f(x) = 20$ و $lim_{x\to5} g(x) = -15$ و $lim_{x\to5} h(x) = 18.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

1- $lim_{x\to5}[h(x) + f(x)]$

2- $lim_{x\to5}[h(x) - g(x)]$

3- $lim_{x\to5}[g(x) \times f(x)]$

4- $lim_{x\to 5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين 3 :-

أوجد :-

1- $lim_{x\to 1}\lceil 5x-2\rceil^2$

2- $lim_{x\to 2}\lceil 10\ \ -2x\rceil^2$

تمرين 4 :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $lim_{x\to 5}(2x^3-2x^2-50)$

2- $lim_{x\to 0}(1-e^x)$

3- $lim_{x\to 1} log(10x^4+15)$

4- $lim_{x\to 2} e^{2x^2+3x+2}$

5- $lim_{x\to 3} ln(20x^2-5x+10)$

تمرين 5 :-

إذا كانت

فأوجد :-

1- $lim_{x\to 3} f(x)$

2- $lim_{x\to 1} f(x)$

تمرين 6 :-

هل الدالة المعرفة بـ

متصلة في $x = 10$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل :

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx} =?????$

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x^5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

2- $y = 15x^4$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 60x^3$

3- $y = 10x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 10$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$

مشتقة حاصل قسمة دالتين ــــــ البسطالمقام =

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x-3x-6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

1 – $y = (15x2 + 20)^3$

$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$

2 – $y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

(المشتقة الاولى) $\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$

(المشتقة الثانية) $\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$

$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية :على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخليةفتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (1):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 80 – 6x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 100وحدة عند سعر يساوي 10 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -6)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × السعر المطلوبة الكمية

م = (-6) × $\frac{10}{100}$ = -0.6

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن.

مثال (2):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 200 – 10 x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 200وحدة عند سعر يساوي 20 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -10)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × السعر المطلوبة الكمية

م = $(-10) \times \frac{20}{200} = -1$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (3):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 15x-20) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 1000وحدة عند سعر يساوي 100 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= 15)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × السعر المطلوبة الكمية

م = $(15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي ($D = 1.5x + 20$) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

المحاضرة(5)

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$) المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K^{/}= 0.6 – 0.04\ x$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$K^{/}= 0.6 – 0.04 \times 1 = 0.6 -.04 = 0.56$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8\ x - 0.15x^2$) المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K^{/}= 0.8 – 0.3\ x$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$K^{/}= 0.8 – 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال = 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.5 = 0.5

3- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 ـ يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

2 ـ يتم إيجاد المشتقة الثانية .

3 ـ تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P= - 0.4x^2 + 300x -2000$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P^{/} = -0.8x + 300$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P^{//} = -0.8$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P= 500-0.2x +0.1x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P^{/} = -0.2 + 0.2x$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P^{//} = 0.2$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

4- الربح الحدي

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

6- الربح الحدي = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$$R^{/} = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$R^{/} = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10 = 3990$ ريال

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

Selling price (سعر وحدة البيع)$= 4x^2 + 6x + 5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

x×) الدالة سعر بيع الوحدة R = (

$x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x \times R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20)$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$$R^{/} = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12\times15^2 + 12\times15 + 5 = 2885$ r.s

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) ×x

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20)\times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20$

4205ريال

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = 10x^2 - 12x + 15$ (التكاليف الكلية)

$C' = 20x - 12$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$$C^{/} = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188 r.s$$

مثال (5) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3 \text{ (التكاليف الكلية)}$$

$$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3) \text{ (التكاليف الحدية)}$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$$

$$= 3\times(5\times20^2 - 3\times20 + 15)^2\times(10\times20 - 3)$$

$$= 3\times(5\times400 - 60 + 15)^2 \times(200-3)$$

$$= 3\times(1955)\times(197) = 1155405 \text{ r.s}$$

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$=(2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$$

$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

$P^/ = 6x^2 - 21x + 1$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$P^/ = 6x^2 - 21x + 1 = 6\times30^2 - 21\times30 + 1 = 4771$r.s

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 + 3x + 20$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$

$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

$P^/ = 36x^2 + 30x - 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$P^/ = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 - 5 = 23245$r.s

تمرين شامل (1)

الربح الحدي

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$R' = 120x^3 + 24x^2 - 6$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$$R' = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394 r.s$$

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$C' = 39x^2 - 10x + 3$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$C' = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499 r.s$$

3- دالة الربح الكلي :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$

$P^{/} = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$P^{/} = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 34 \times 12 - 9 =$

تمرين شامل (2)

الربح الحدي

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) $= 3x^2 + 25x - 18$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- **دالة الايراد الكلي :-**

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R =$ (دالة سعر البيع الوحدة) $\times x$

$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$

$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R^{/} = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R^{/} = 9 \times 5^2 + 50 \times 5^2 - 18 = 1457$r.s

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R^/ = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R^/ = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457 r.s$

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$C^/ = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C^/ = 20\times20 + 2 = 402 r.s$

4- دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$P^/ = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$P^/ = 9\times10^2 + 30\times10 - 20 = 1180 r.s$

تمارين واجب :-

1- إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 0.3x - 0.01x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

2- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = 3x^2 + 5x + 100$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

3- إذا علمت أن :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) = $8x^3 + 10x^2 + 5x + 12$

$C = 4x^2 + 3x - 10$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 15 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 12 وحدات .