الفصل الثاني : العمليات الجبرية

العمليات الجبرية

الجمع والطرح الجبري

قاعدة الإشارات

نجمع و نضع نفس الإشارة	$(+)+(+)=+$
نجمع و نضع نفس الإشارة	$(-)+(-)=-$
نطرح و نضع إشارة الأكبر	$(+)+(-)=$
نطرح و نضع إشارة الأكبر	$(-)+(+)=$

مثال :

1) $+3+2=+5$, $-3-2=-5$ (نجمع العددين ونضع نفس الإشارة)

2) $+3-2=+1$, $-3+2=-1$ (نأخذ الفرق بين العددين ونضع إشارة العدد الأكبر)

الضرب الجبري

1) $(+)(-)=-$ أو $+\div-=\frac{+}{-}=-$

2) $(-)(+)=-$ أو $-\div+=\frac{-}{+}=-$

قاعدة الإشارات

القسمة الجبرية

1) $(+)(+)=+$ أو $+\div+=\frac{+}{+}=+$

2) $(-)(-)=+$ أو $-\div-=\frac{-}{-}=+$

مثال : (-3)(4)= -12 , (3)(-4)=-12 , (-3)(-4)=12 , (3)(4)=12

$\frac{-20}{5}=-4$ $\frac{20}{-5}=-4$ $\frac{-20}{-5}=4$ $\frac{20}{5}=4$

ترتيب إجراء العمليات الجبرية

-1 إذا احتوت العملية الجبرية على الجمع الجبري فقط :
فإننا نبدأ من اليسار إلى اليمين .

اتجاه التنفيذ

12-3+4-2=9+4-2=13-2=11

أو نجمع الأعداد الموجبة معاً بإشارة موجبة, ونجمع الأعداد السالبة معاً بإشارة سالبة .

$$12-3+4-2=16-5=11$$

2 – إذا احتوت العملية الجبرية على الضرب الجبري فقط :
نجري العملية بالترتيب حسب ظهورها من اليسار إلى اليمين .

$$15 \div 5 \times 4 \div 6 = 3 \times 4 \div 6 = 12 \div 6 = 2$$

3 – إذا احتوت العملية الجبرية على عمليتي الضرب الجبري و الجمع الجبري فإننا نجري عملية الضرب اولا ثم الجمع .

$$6+2x4-15+5=6+8-3=14-3=11$$

4 – إذا احتوت العملية الجبرية على أقواس فإننا نجري العملية داخل الأقواس الصغيرة ( )اولا,ثم الأقواس المتوسطة { }, ثم الأقواس الكبيرة [ ] ابتداء من الداخل إلى الخارج .

$$[-40 \div \{ (12 \div 4) x\ 10 +10\} \div (5 \div -5)] + 4 = [-40 \div \{ (3)\ x\ 10 +10\} \div (-1)] + 4$$

$$= [-40 \div \{ 3\ x\ 10 +10\} \div (-1)] + 4 = = [-40 \div \{30 +10\} \div (-1)] + 4$$

$$= [-40 \div \{ 40\} \div (-1)] + 4 = [-1 \div (-1)] + 4=1 + 4 = 5$$

الكســـور

الكسر عبارة عن مقدار مكون من بسط ومقام مثلاً

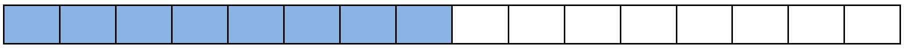
$$\frac{5}{7} , \frac{1}{2} , \frac{3}{4} .$$

تمثل الأجزاء الملونة ثلاثة أخماس الشكل

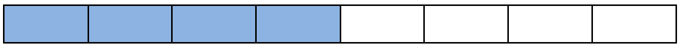
وتكتب رياضياً $\frac{3}{5} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \frac{\text{عدد الأجزاء الملونة}}{\text{عدد جميع الأجزاء}}$

تكافؤ الكسور

نقول عن كسرين أنهما متكافئان عندما يمثلان الجزء نفسه من الشكل.



$\frac{8}{16}$



$\frac{4}{8}$

إيجاد الكسور المتكافئة:

١) لإيجاد كسور مكافئة لكسر ما نضرب بسطه ومقامه بأي عدد غير الصفر.

مثال (10):

الكسور المكافئة للكسر $\frac{2}{3}$ يمكن إيجادها كالتالي:

$$\frac{2}{3} = \frac{(2)(3)}{(3)(3)} = \frac{6}{9} \qquad \frac{2}{3} = \frac{(2)(2)}{(3)(2)} = \frac{4}{6}$$

2) لإيجاد كسور مكافئة لكسر ما نقسم بسطه ومقامه على عدد يقبلان القسمة عليه غير الصفر.

$$\frac{4}{8} = \frac{4 \div 2}{8 \div 2} = \frac{2}{4} \quad \text{و} \quad \frac{4}{8} = \frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$$

تبسيط الكسور

يكون الكسر مكتوباً بأبسط شكل (صورة)عندما لا يوجد عدد غير الواحد يقسم بسطه ومقامه معاً .

1) الكسر $\frac{1}{2}$ مكتوب بأبسط شكل لأنه لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 1 و 2 معاً.

2) الكسر $\frac{4}{6}$ ليس مكتوباً بأبسط شكل لأن العدد 2 يقسم العدد 4 و العدد 6 أيضاً.

ملاحظة (1):

يمكن كتابة $\frac{12}{30}$ في أبسط صورة و ذلك بقسمة بسطه و مقامه على 6 فنحصل على $\frac{2}{5}$ حيث لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 2 وَ 5 معاً، كذلك $\frac{15}{35}$ بقسمة بسطه و مقامه على 5 يصبح $\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ حيث لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 3 وَ 7 معاً.

مقارنة الكسور

1) للمقارنة بين كسرين لهما المقام نفسه نقارن بين بسطيهما ويكون الكسر الأكبر هو الكسر ذو البسط الأكبر.

1) $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{5}$ → 1) $\frac{7}{5}>\frac{3}{5}$ (لأن $7>3$)

2) $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$ → 2) $\frac{2}{9}<\frac{5}{9}$ (لأن $2<5$)

3) $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{4}$ → 3) $\frac{-3}{4}<\frac{2}{4}$ (لأن $-3<2$)

4) 0 , $\frac{5}{13}$ → 4) $0<\frac{5}{13}$ (لأن $0=\frac{0}{13}$ ومنه $0<5$)

أيهما أكبر

$\frac{3}{4}$ أو $\frac{2}{5}$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20} \quad , \quad \frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}$$

$$8<15 \Rightarrow \frac{8}{20}<\frac{15}{20} \Rightarrow \frac{2}{5}<\frac{3}{4}$$

طريقة سهلة سريعة

$\frac{2}{5}$ ⤫ $\frac{3}{4}$ ⟹ 8 ‹ 15

قواسم العدد

عندما نكتب عدد كحاصل ضرب عدة أعداد نقول إننا حللنا هذا العدد إلى عوامل.
عوامل العدد: هي الأعداد التي تقسمه دون باق وتسمى قواسم العدد.

مثال (15) :

1) العدد 6 قاسم من قواسم العدد 24 لأن العدد 24 يقبل القسمة على العدد 6.
2) العدد 6 ليس قاسماً من قواسم العدد 25 لأن العدد 25 لا يقبل القسمة على العدد 6.

القاسم المشترك الأكبر لعددين

القواسم المشتركة لعددين هي الإعداد التي يقسم كل واحد منها هذين العددين، وأكبرها يسمى القاسم المشترك الاكبر (ق.م.ك)

مثال : أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 و12

قواسم العدد 8 هي 1 ، 2 ، 4 ،8

وقواسم العدد 12 هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ،12

القواسم المشتركة بينهما هي 1 ، 2 ، 4 اما القاسم المشترك الأكبر فهو 4

القاسم المشترك الأكبر لعددين هو حاصل ضرب قوى العوامل الأولية المشتركة فقط والتي لها الأس الأصغر.

مثال : اوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و 30

$18=2\times3\times3=(2)\ (3^2)$ و $30=(2)\ (3)\ (5)$ إذا ق. م. ك. $=(2)\ (3) = 6$

ملاحظة :

1) لتبسيط كسر نقسم كلا من بسطه ومقامه على قاسم مشترك لهما.
2) لتبسيط كسر لأبسط شكل(صورة)نقسم كلا من بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

مثال : بسط الكسر $\frac{55}{100}$ إلى أبسط صورة . $\frac{55}{100}=\frac{55\div5}{100\div5}=\frac{11}{20}$

ق . م . ك . للعددين *55* و *100* هو *5*:

مضاعفات العدد هو ناتج ضرب عدد في احد عناصر الأعداد الطبيعية 1 ،2 ، 3 ، ...

مثال :المضاعفات الأربعة الأولى للعدد 5 هي :

$5\times1 = 5$ ، $5\times2 = 10$ ، $5\times4 = 20$.

ملاحظه :لكل عددين مضاعفات مشتركه كثيرة

مثال : مضاعفات العددين

2 هي 2 ، 4، 6 ، 8 ، 10 ، 12 ، 14 ، 16 ، 18 ، ..

3 هي 3 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15 ، 18 ، ...

المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 هي 6 و 12 و 18 و ...

المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو اصغر مضاعف مشترك لهما ويرمز له م.م.ص.

ملاحظه :للحصول على م م .ص. لعددين، نكتب سلسلة مضاعفات كل منهما

ثم نعين المضاعف المشترك الأصغر م .م .ص.

مثال : اوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2 و 3

من المثال السابق، المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 هي 6 و 12 و 18 و...

إذا فان المضاعف المشترك الأصغر هو أصغرهم وهو 6

ملاحظه :المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو حاصل ضرب قوى العوامل الأولية للعددين التي لها الاس الأكبر .

مثال : اوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 14 و 36

$14 = 2 \times 7$

$36 = (2^2) \times (3^2)$

المضاعف المشترك الأصغر هو $7 \times (2^2) \times (3^2) = 252$

ملاحظة : المضاعف المشترك الأصغر لعددين أوليين هو حاصل ضربهما.

مثال :اوجد المضاعف المشترك الأصغر بين العددين5, 7 ؟

لاحظ أن العددين أولين بالتالي م .م .أ. = $7 \times 5 = 35$

جمع الكسور: عند جمع كسرين لهما المقام نفسه، فان الناتج هو كسر مقامه يساوي مقام الكسرين وبسطه يساوي **مجموع** بسطيهما .

مثال:

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3+6}{5} = \frac{9}{5}$$

طرح الكسور: عند جمع كسرين لهما المقام نفسه، فان الناتج هو كسر مقامه يساوي مقام الكسرين وبسطه يساوي **الفرق بين** بسطيهما.

مثال: $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$

ملاحظه:

1) عند جمع(طرح)كسرين مختلفي المقام، نقوم بتحويلهما إلى كسرين مكافئين لهما، على أن يكون مقامهما مشتركا، ثم نجمع (نطرح) الكسرين الناتجين

2) لإيجاد ناتج جمع الكسرين (او طرحهما)نوحد المقامات بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لهما واتخاذه مقاما مشتركا للكسرين .

مثال:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{(3)(2)}{(2)(2)} = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{1+6}{4} = \frac{7}{4}$$

مثال:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

قوانين جبريه لجمع وطرح الكسور

$$1)\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \longrightarrow 1)\quad \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{(7)(2)-(1)(3)}{(3)(2)} = \frac{14-3}{6} = \frac{11}{6}$$

$$2)\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \longrightarrow 2)\quad \frac{5}{7} + \frac{3}{2} = \frac{(5)(2)+(3)(7)}{(7)(2)} = \frac{10+21}{14} = \frac{31}{14}$$

ضرب وقسمة الكسور

1) حاصل ضرب كسرين هو كسر بسطه عبارة عن ضرب البسطين ومقامه عبارة عن ضرب المقامين

2) لقسمة كسرين فإننا نقوم بوضع الكسر الأول كما هو ونضربه في الكسر الثاني بعد ان نقلب الكسر الثاني(نضع البسط مقاما والمقام بسطا)

قوانين جبريه لضرب وقسمة الكسور

ليكن a,b,c,d اعداد حقيقية غير صفرية فان:

$$1)\ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \longrightarrow \frac{3}{5} \times \frac{-2}{7} = \frac{(3)(-2)}{(5)(7)} = -\frac{6}{35}$$

$$2)\ \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \longrightarrow 3 \div \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{3\times5}{1\times2} = \frac{15}{2}$$

$$3)\ c \times \frac{a}{b} = \frac{ca}{b} \longrightarrow 5 \times \frac{3}{7} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{7} = \frac{5\times3}{1\times7} = \frac{15}{7}$$

ملاحظه (أرجو التنبيه إذا كان فيه خطأ)

بالتوفيق لكم جميعاً ... أنا ...