الإحصاء الاستنتاجي

مقدمة: يقسم علم الإحصاء بشكل عام إلى قسمين: الإحصاء الوصفي؛ وهو ذلك العلم الذي يعنى بجمع البيانات وتنظيمها وتصنيفها وعرضها عن طريق الجداول أو الرسوم البيانية وغيرها، وهذا ما قد تعلمناه في مبادئ الإحصاء، والقسم الآخر الإحصاء الاستنتاجي؛ وهو ذلك الجزء من الإحصاء الذي يعنى بتحليل البيانات للتوصل إلى التنبؤ أو الاستقراء واتخاذ القرارات، وهذا ما سيكون موضوعنا في هذا المقرر.

علاقة علم الإحصاء بمجموعة العلوم الإدارية: يرتبط علم الإحصاء ارتباطًا قويًا بمجموعة العلوم الإدارية وذلك على أساس أن وظائف علوم الإدارة تستند في القيام بها بطريقة موضوعية على العديد من الطرق والنظريات الإحصائية.

فاتخاذ القرار ضروري وهام في علم الإدارة ويجب أن يؤخذ على أساس علمي غير متحيز حيث تقدم لنا نظرية الاحتمالات والتوقع الرياضي الأساس القياسي لهذا القرار، كما أن عمليات الشراء أو البيع وإدارة الإنتاج الصناعي وسياسات التسويق وغيرها الكثير يحتاج من المختصين الإلمام بالطرق الإحصائية من تفسيرات وتحديدًا للعلاقات بين متغيرات هذه العلوم وقدرة كبيرة على وضع الفروض واختبارها والتأكد من مدى صحتها.

الفصل الأول: نظرية الاحتمالات

التجربة الإحصائية والفضاء العيني والحوادث:

تعريف ١: التجربة الإحصائية: هي أي عملية أو مجموعة عمليات لا تعرف نتائجها المسبقة بشكل حتمي. فمثلًا رمي حجر نرد، أو إلقاء قطعة نقد يمثلان تجربة إحصائية ويسمى هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية حيث نلاحظ أن النتائج تتغير في كل مرة يتم إجراء التجربة فيها.

ولكل تجربة إحصائية نتائج، وتعرف النتيجة للتجربة على أنها النتيجة البسيطة، أي التي لا يمكن تحليلها إلى نتيجتين أو أكثر، وتسمى جميع النتائج البسيطة الممكنة الحدوث بالفضاء العيني للتجربة.

تعريف ٢: الفضاء العيني (Sample Space) لتجربة إحصائية هي مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة وسنعبر عن الفضاء العيني بالرمز S.

تعريف ٣: الحادث Event: هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني ويرمز له بأحد الأحرف التالية A,B,C,...
وينقسم إلى قسمين: ١- الحادث البسيط: وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجة واحدة فقط.

٢- الحادث المركب: وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجتين فأكثر.

كما يمكن تعريف بعض من الحوادث التالية:

١- الحادث المستحيل: وهو الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر ورمزه $\emptyset$.
٢- الحادث الأكيد: وهو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني S.

تعريف ٤: فضاء العينة المنفصل: يسمى الفضاء العيني فضاءً منفصلًا إذا كان محدودًا أو لا نهائيًا معدودًا، أي إذا أمكن ربط عناصره واحدًا إلى واحد مع الأعداد الصحيحة الموجبة كأن نقول اربط العنصر الأول مع العدد ١ والعنصر الثاني مع العدد ٢ وهكذا إلى مالانهاية.

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال على حادث بسيط وحادث مركب وحادث أكيد.

الحل: الفضاء العيني للتجربة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

وبالتالي يمكن كتابة الحوادث التالية:

حادث بسيط	$A=\{5\}$	حادث مركب	$B=\{3,4\}$
حادث أكيد	$C=S$	حادث مستحيل	$D=\{7\}$

لاحظ أن العدد 7 لا ينتمي إلى الفضاء العيني لهذه التجربة ولذلك سمي بالحادث المستحيل.

مثال: في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال على حادث بسيط، حادث مركب، وحادث أكيد.

ملاحظة: سيتم الرمز بالحرف H لوجه الصورة، وبالحرف T لوجه الكتابة.

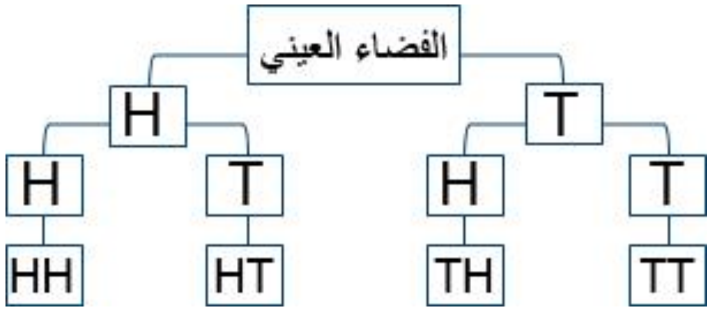
الحل:

$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

حادث بسيط	$A=\{(H,H)\}$	حادث مركب	$A=\{(T,H),(T,T)\}$	حادث أكيد	$C=S$

لاحظ أن الحادث الأكيد دائمًا هو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني، بينما الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر يسمى بالحادث المستحيل.

شجرة الاحتمال



← التجربة الأولى لها احتمالين

← التجربة الثانية أيضًا لها احتمالين ولكن يجب وضع الاحتمالين تحت كل حادث من التجربة الأولى

← الاحتمالات

تمارين

تمرين ١: في تجربة إلقاء قطعة نقد وحجر نرد، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال لحادث بسيط وحادث مركب.

الحل: على نمط المثال السابق

عدد عناصر الحادث الأول × عدد عناصر الحادث الثاني = ٢ × ٦ = ١٢ عنصر

$S=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$

حادث بسيط= $A=\{(H,1)\}$

حادث مركب= $B=\{(H,1),(H,2),(H,3)\}$

تمرين ٢: في تجربة إلقاء حجري نرد مرتين، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة وأعط مثال على حادث بسيط، حادث مركب وحادث أكيد.

الحل: عدد عناصر الحادث الأول × عدد عناصر الحادث الثاني = ٦ × ٦ = ٣٦ عنصر

عناصر الفضاء العيني: محاضرة ٣ صفحة ٧

حادث بسيط= $A=\{(1,4)\}$

حادث مركب= $B=\{(1,1),(3,2),(6,6)\}$

حادث أكيد= جميع عناصر الفضاء العيني $=S$

أنواع المجموعات

١- المجموعة الخالية (Ø): وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر.

٢- المجموعة الجزئية: نقول أن A مجموعة جزئية من B ونرمز لها $A \subseteq B$ إذا كان كل عنصر في A ينتمي للمجموعة B.

التساوي: نقول أن المجموعة A تساوي المجموعة B أي: $A = B$ إذا كانت A,B تحتويان على نفس العناصر ويكون إذا كان $A \subseteq B,\ B \subseteq A$.

٣- المجموعات الكلية (S): هي المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع العناصر المتعلقة بموضوع ما ويرمز لا بالرمز S.

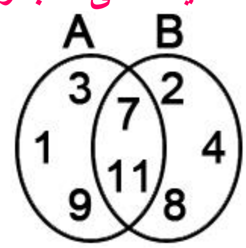
٤- المجموعة المكملة (المتممة): نقول أن À أو Ā مجموعة مكملة للمجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الشاملة S باستثناء عناصر A.

$$\bar{A}= \{x:x \in S, x \notin A\}$$

العمليات الجبرية على المجموعات

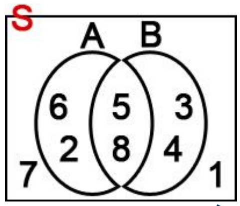
$A \cup B= \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$	$A \cap B= \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$
$\bar{A}= \{x:x \in S, x \notin A\}$	$A-B= \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

العمليات على المجموعات



$B= \{2,4,7,8,11\}$	$A= \{1,3,7,9,11\}$
التقاطع ∩ هو مجموعة العناصر المشتركة	$A \cap B= \{7,11\}$
الاتحاد ∪ هو جميع عناصر المجموعتين	$A \cup B= \{1,3,7,9,11,2,4,8\}$
العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B	$A-B= \{1,3,9\}$

المجموعة الشاملة ومكملة المجموعة



$S= \{2,6,5,8,3,4,1,7\}$	$\bar{A}= \{3,4,7,1\}$
$A= \{2,6,5,8\}$	$\bar{B}= \{2,6,7,1\}$
$B= \{3,4,5,8\}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \{1,7\}$

مثال: إذا كان $B= \{x:x \text{ عدد زوجي}\}$ $A= \{x:x \text{ عدد فردي}\}$ $S= \{1,2,3,\ldots,10\}$

أوجد:	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A \cap B}$	$\bar{A}$	$A-B$
الحل:	$\overline{A \cup B} = S$	$\overline{A \cap B} = \emptyset$	$\bar{A}= B$	$A-B= A$

الحوادث المتنافية: نقول بأن الحادثتان A,B متنافيتان إذا تحقق الشرط التالي: $A \cap B=\emptyset$

مثال: إذا كان $S= \{1,2,\ldots,10\}$، وكان A حادث يمثل ظهور عدد فردي وB حادث يمثل ظهور عدد زوجي من S ، فعندئذ نقول بأن الحادثتان A,B متنافيتان.

طرق العد

في هذا البند سنتعرف على طرق منتظمة لإيجاد عدد نقاط الفضاء العيني لتجربة إحصائية.

١- قاعدة الضرب: إذا كانت التجربة E_1 تحدث في n من الطرق ومع كل طريقة من هذه الطرق كانت التجربة E_2 تحدث في m من الطرق فإن التجربتين تحدثان معًا في (mn) من الطرق.

مثال: أراد طالب أن يسجل في مقررين، أحدهما من قسم الإحصاء والآخر من المحاسبة، فإذا كان عدد مقررات الإحصاء ٣ وعدد مقررات المحاسبة ٤، فما عدد الطرق التي يمكن للطالب التسجيل فيها؟

الحل: ٣×٤= ١٢

ملاحظة: يمكن تعميم قاعدة الضرب لتشمل k من التجارب.

مثال: كم هاتفًا يمكن تركيبه في مدينة الدمام إذا ألف رقم الهاتف من ٧ أرقام أولها ٨ أو ٩؟

الحل: الرقم الأول خياران، أما الأرقام الأخرى فيوجد عشرة طرق.

عدد الهواتف: 2 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10

٢- قاعدة الجمع: إذا كانت التجربة الأولى تحدث في n من الطرق والثانية في m من الطرق وكانت التجربتان مانعتين لبعضهما فإن واحدة منهما أو الأخرى تحدث في m+n

مثال: بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقررًا واحدًا من الإحصاء أو الرياضيات، إذا كان يوجد ٣ في الإحصاء و ٥ في الرياضيات؟

الحل: عدد الطرق: ٥+٣= ٨ طرق.

ملاحظة: يمكن تعميم قاعدة الجمع لتشمل k من التجارب.

مثال: أراد طالب أن يسجل بإحدى الكليات: الشريعة، العلوم، العلوم الإدارية، القانون. إذا كان عدد أقسام الشريعة ٣، والعلوم ٥، والعلوم الإدارية ٤، والقانون ٢، كم عدد الخيارات؟

الحل: ٣+٥+٤+٢= ١٤

٣- قاعدة التباديل: تعريف التباديل: ترتيب جميع عناصر أو جزء من عناصر أي مجموعة. إذا كان لدينا n عنصرًا وسحبنا منها r عنصرًا في وقت واحد (أو سحبنا بدون ارجاع) الترتيب مهم فإن عدد الترتيبات الممكنة يسمى n تباديل r وهي: $^{n}p_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الأحرف a,b,c,d,e؟

الحل: $^{5}p_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 20$

مثال: تريد أمينة مكتبة أن تعرض على رف ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة، فبكم طريقة يمكنها ذلك؟

الحل: $^{10}p_6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 151200$

٣- قاعدة التوافيق: إذا كان لدينا n عنصرًا وسحبنا منها r عنصرًا في وقت واحد (أو سحبنا r بدون ارجاع)
فإن عدد التركيبات الممكنة بإهمال الترتيب يسمى n توافيق r ويرمز لها: $\binom{n}{r} = {}^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\times r!}$

مثال: ما عدد الطرق التي تختار بها حرفين من a,b,c بدون ترتيب؟

الحل: ${}^{3}C_{2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\times 2!} = \frac{3\times2\times1}{(1)\times2\times1} = 3$

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من أربعة طلاب من بين عشرة طلاب؟

الحل: ${}^{10}C_{4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)!\times 4!} = 210$

ملاحظة: السحب بالإرجاع: عدد الطرق الكلية لسحب r كرة من n كرة بإرجاع يساوي n^{r}

مثال: وعاء به ١٥ كرة، ماهو عدد طرق سحب كرتين بإرجاع؟

الحل: $n^{r}=15^{2}=225$

مثال: وعاء به ١٠ كرات، أوجد عدد الطرق الممكنة لسحب ٣ كرات بدون إرجاع، إذا:

المطلوب:	ترتيب الكرات مأخوذ بعين الاعتبار	ترتيب الكرات غير مأخوذ بعين الاعتبار
الحل:	${}^{10}P_{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720$	${}^{10}C_{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!\times 3!} = 120$

●**نظرية:** إذا كان ضمن n من العناصر، n_1 من العناصر المتشابهة، n_2 من العناصر المتشابهة المختلفة عن النوع الأول، n_3 من العناصر المتشابهة المختلفة عن النوعين الأوليين، n_k من العناصر المتشابهة المختلفة عن جميع العناصر من الأنواع السابقة، فإن عدد تباديل العناصر التي عددها n هو: $\frac{n!}{n_1\times n_2\times n_3\times\ldots\times n_k}$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب الكلمات:

المطلوب:	سلسبيل	Statistics
الحل:	نجد أن عدد الحروف ٦ منها ٢ متشابهة و ٢ متشابهة أخرى وحرف مختلف وحرف مختلف $\frac{6!}{2!\times2!\times1!\times1!} = \frac{720}{4} = 180$	هنا نجد أن عدد الحروف ١٠ منها ٣ (s) متشابهة و٣ (t) متشابهة أخرى و٢ (i) مشابهة وa حرف مختلف وc حرف مختلف $\frac{10!}{3!\times3!\times2!\times1!\times1!} = 50400$

ملاحظات: ١- ترتيب n من الأشياء في صف هو n!.

٢- ترتيب n من الأشياء في دائرة هو (n-1)!.

مثال:	ماهو عدد طرق ترتيب ٥ طلاب في صف؟	ماهو عدد طرق ترتيب ٥ طلاب حول دائرة؟
الحل:	عدد الطرق: n! = 5! = 120	عدد الطرق: (n-1)!= (5-1)! = 4!= 24

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب وسكرتير ينتخبون من بين ٣٠ عضو؟

الحل: عدد الطرق= مبدأ العد لآن الترتيب مهم (تحديد وظيفة) والتكرار غير مسموح. (تباديل)

عدد الطرق= طرق اختيار الرئيس × طرق اختيار النائب × طرق اختيار السكرتير.

= ٣٠ × ٢٩ × ٢٨

مثال: بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ٣ منازل من بين الأرقام التالية {1,2,3,4,5} إذا سُمح بالتكرار؟

الحل: الترتيب مهم (منازل)، التكرار مسموح ← مبدأ العد

عدد الطرق = آحاد عشرات مئات

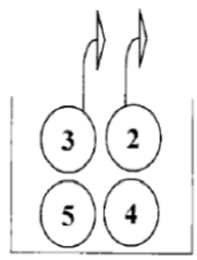
= ٥ × ٥ × ٥

مثال: بكم طريقة يمكن سحب كرتين دفعة واحدة من صندوق فيه ٦ كرات؟

الحل: الترتيب غير مهم (دفعة واحدة)، التكرار غير مسموح ← توافيق

عدد الطرق = $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\times4!} = \frac{\cancel{4!}\times5\times\cancel{6}^3}{\cancel{2}\times\cancel{4!}} = 15$ طريقة

مثال: صندوق فيه ٤ كرات مرقمة بالأرقام يراد سحب كرتين منه، اكتب عدد الطرق التي يمكن بها سحب الكرتين إذا كان السحب:



المطلوب	الحل
على التوالي مع الإرجاع (مبدأ العد)	= سحب الأولى × سحب الثانية = ٤ × ٤ =١٦ طريقة
على التوالي بدون إرجاع (تباديل) ن=٤، ر=٢	$^4p_2=\frac{4!}{2!}=\frac{4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}}=12$ طريقة
دفعة واحدة (توافيق) ن=٤، ر=٢	$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\times2!}=6$ طرق

الاحتمال Probability : تعريف: إذا كانت S الفضاء العيني لتجربة ما، وكان A أي حادث في S فإننا نعين لهذا الحادث عددًا P(A) يسمى احتمال الحادث A بحيث يساوي عدد عناصر الحادث مقسومًا على عدد عناصر الفضاء العيني. بالرموز: $\mathrm{P(A)} = \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{عدد عناصر الحادث A}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$

بحيث يحقق الفرضيات التالية: ١- $0 \leq P(A) \leq 1$

٢- P(S)= 1   ٣- P(∅)= 0

مثال: عند رمي قطعة نقود مرة واحدة، اكتب فضاء العينة ثم أوجد:

فضاء العينة	S= {H,T} n(S)= 2
أ- احتمال ظهور صورة= A	A= {H}, n(A)= 1 → P(A)=$\frac{1}{2}$
ب- احتمال ظهور كتابة= B	B= {T}, n(B)= 1 → P(B)=$\frac{1}{2}$

مثال: عند رمي قطعة نقود مرتين، اكتب فضاء العينة ثم أوجد:

فضاء العينة	S= {HH,HT,TH,TT} n(S)= 4
أ- احتمال ظهور صورة في الرمية الأولى= A	A= {HH,HT}, n(A)= 2 → P(A)=$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
ب- احتمال ظهور كتابة في إحدى الرميتين= B	B= {HT,TH,TT}, n(B)= 3 → P(B)=$\frac{3}{4}$

مثال: عند رمي حجر نرد مرة واحدة، اكتب فضاء العينة ثم أوجد احتمال:

فضاء العينة	S= {1,2,3,4,5,6} n(S)= 6
أ- حدث ظهور عدد زوجي. A	A= {2,4,6}, n(A)= 3 → P(A)= $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
ب- حدث ظهور عدد أولي. B	B= {2,3,5}, n(B)= 3 → P(B)=$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
ج- حدث ظهور عدد يقبل القسمة على 3. C	C= {3,6}, n(C)= 2 → P(C)=$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
د- حدث ظهور عدد أقل من 7. D	D= {1,2,3,4,5,6}, n(D)= 6 → P(D)= $\frac{6}{6} = 1$
و- حدث ظهور عدد أكبر من 6. F	F{ }= ∅, n(F)= 0 → P(F)= $\frac{0}{6} = 0$

الحدث المؤكد: هو الحدث الذي يجب وقوعه عند إجراء التجربة واحتمال الحدث المؤكد يساوي ١.

الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يمكن وقوعه عند إجراء التجربة واحتمال الحدث المستحيل يساوي صفر.

مثال: عند رمي زهرة نرد منتظمة مرتين فإن العناصر (الناتجة) الممكنة التي يمكن وضعها بجدول:

فضاء العينة مكون من ٣٦ عنصر بمعنى n(S)= 36

(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)

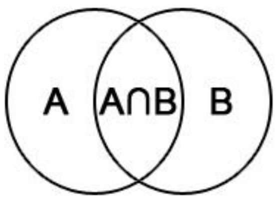
أ- احتمال أن يكون مجموع الرميتين = ٥ هو A؟	$A=\{(4,1),(2,3),(3,2),(1,4)\} \rightarrow n(A)=4$ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
ب- احتمال أن يكون الرميتين متساويتين هو B؟	$B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \rightarrow n(B)=6$ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

تمارين: أوجد الحوادث التالية واحتمال كل حادث وذلك عند رمي زهرة نرد مرتين، حيث:

X = عدد نقاط الرمية الأولى ، Y = عدد نقاط الرمية الثانية

$A=\{(x,y): x+y<4\}$	$A=\{(1,1),(1,2),(2,1)\} \rightarrow n(A)=3$ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
$B=\{(x,y): x-y=4\}$	$B=\{(5,1),(6,2)\} \rightarrow n(B)=2$ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
$C=\{(x,y): x=5\}$	$C=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\} \rightarrow n(B)=6$ $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
$D=\{(x,y): x+y=15\}$	$D=\{\}=\emptyset \rightarrow n(D)=0$ $P(D)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{0}{36}=0$

قواعد الاحتمالات: إذا كانت S فضاء عينة وكان A,B حدثين من فضاء العينة فإن:



1- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
2- $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
3- $P(A)+P(\bar{A})=1$
4- $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
5- $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$
6- $P(\overline{A\cup B})=P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A\cup B)$
7- $P(\overline{A\cap B})=P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)$

مثال: إذا كان: $P(A)=0.4,\ P(B)=0.7,\ P(A\cap B)=0.3$ فأوجد:

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.4-0.3=0.1$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.7-0.3=0.8$
$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6$	$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0.7-0.3=0.4$

$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.7=0.3$

ملاحظات هامة على الاحتمالات: لأي حادثين من فضاء العينة A و B

١- احتمال وقوع أحد الحادثين على الأقل (وقوع A أو B) هو $P(A\cup B)$	٢- احتمال وقوع الحادثين معًا (وقوع A و B) هو $P(A\cap B)$
٣- احتمال وقوع الحدث A فقط (وقوع A بدون وقوع B) هو $P(A-B)$	٤- احتمال عدم وقوع الحدث A هو $P(\bar{A})$

مثال: إذا كان احتمال حضور مدير شركة ما في يوم ما يساوي (0.9) واحتمال حضور مساعد المدير اليوم (0.95) واحتمال حضور واحد منهما على الأقل يساوي (0.97) أوجد:

احتمال حضور المدير والمساعد	$P(A\cap B)= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ $= 0.9 + 0,95 - 0.97= 0.88$
احتمال حضور المدير وحده	$P(A - B)= P(A) - P(A\cap B)$ $= 0.9 - 0.88= 0.02$
حضور مساعد المدير وحده	$P(B - A)= P(B) - P(A\cap B)$ $= 0.95 - 0.88= 0.07$

مثال: إذا كان احتمال نجاح محمد هو (0.8) واحتمال نجاح أحمد ومحمد هو (0.6) واحتمال رسوب أحمد هو (0.3) فأوجد:

نجاح محمد A	حدث نجاح أحمد هو B	فيكون رسوب أحمد هو B
$P(A)= 0.8$	$P(B)= 1 - P(\bar{B})= 0.7$	$P(\bar{B})= 0.3$

احتمال نجاح أحدهما على الأقل	$P(A\cup B)= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ $= 0.8 + 0.7 - 0.6= 0.9$
احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد	$P(A\cap \bar{B})= P(A - B)= P(A) - P(A\cap B)$ $= 0.8 - 0.6 = 0.2$

مثال: يحتوي كيس على ٤ كرات بيضاء و٦ كرات حمراء وكرتين سوداوين، سحب من الكيس كرة واحدة عشوائيًا، أوجد:

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء	$P\left(\text{حمراء}\right) = \frac{\text{عدد عناصر سحب الكرة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء	$P\left(\text{سوداء}\right) = \frac{\text{عدد عناصر سحب الكرة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير بيضاء	$P\left(\text{غير بيضاء}\right) = p\left(\text{حمراء}\right) + P\left(\text{سوداء}\right) = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} = \frac{8}{12}$ أو $P\left(\text{بيضاء}\right) = \frac{4}{12} \rightarrow P\left(\overline{\text{بيضاء}}\right) = 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

الاحتمال Probability

مثال: كيس فيه ١٢ كرة منها ٤ كرات حمراء والباقي بيضاء، سحب من الكيس كرتان دفعة واحدة، جد احتمال:

الفضاء العيني لتجربة سحب كرتين من الكل هو $n(S) = \binom{12}{2} = 66$

١- أن تكون الكرتان حمراوان. (A)	$P(A)= \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين حمراوين}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{\binom{4}{2}}{66} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$
٢- أن تكون الكرتان من نفس اللون. (B)	$P(B)= \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين حمراوين}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} + \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين بيضاء}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$ $= \frac{\binom{4}{2}}{66} + \frac{\binom{8}{2}}{66} = \frac{6}{66} + \frac{28}{66} = \frac{34}{66}$
٣- أن تكون الكرتان مختلفتي اللون. (C)	$P(C)= \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين مختلفتين}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{66} = \frac{4\times 8}{66} = \frac{32}{66}$
٤- أن تكون إحداهما حمراء على الأقل. (D)	$P(D)= \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين حمراوين}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} + \frac{\text{عدد طرق سحب كرة حمراء وكرة بيضاء}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$ $= \frac{\binom{4}{2}}{66} + \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{66} = \frac{6}{66} + \frac{4\times 8}{66} = \frac{6}{66} + \frac{32}{66} = \frac{38}{66}$

مثال: صندوق به ١٠ بطاقات متماثلة منها ٤ حمراء و ٦ بيضاء، فإذا سحبنا بطاقتان على التوالي؛ ماهو احتمال:

الفضاء العيني لتجربة سحب بطاقتين هو $n(S)= {}^{10}P_2= 90$

١- أن تكون جميعها حمراء؟ (A)	$P(A)= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4P2}{90} = \frac{12}{90}$
٢- أن تكون بطاقة واحدة حمراء فقط؟ (B)	$P(B)= \frac{4P1\times 6P1}{90} + \frac{6P1\times 4P1}{90} = \frac{4\times 6}{90} + \frac{6\times 4}{90} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90}$
٣- أن تكون بطاقة واحدة على الأقل حمراء؟ (C)	$P(C)= P(A) + P(B)= \frac{12}{90} + \frac{48}{90} = \frac{60}{90}$ أو نوجد احتمال أن تكون جميعها بيضاء (D)، ثم نوجد المتممة $(\overline{D})$ $P(D)= \frac{6P2}{90} = \frac{30}{90}$ $P(C)= P(\overline{D})= 1 - P(D) = 1 - \frac{30}{90} = \frac{60}{90}$

الاحتمال الشرطي: تعريف: إذا كان A,B حادثان في فضاء العينة S فإن الاحتمال الشرطي للحادث A إذا علم حدوث الحادث B ويرمز له P(A/B) يعرف $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$,P(B)>0

مثال: إذا كان P(A)= 0.8, P(B)= 0.5, P(A∩B)= 0.4 جد:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.5}=\frac{4}{5}$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}$$

$$P(\bar{A}/B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{0.5-0.4}{0.5}=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}$$

مثال: إذا كان احتمال أن ينجح محمد هو $\frac{1}{3}$ واحتمال أن ينجح محمد وأحمد هو $\frac{1}{4}$، أوجد احتمال نجاح أحمد إذا علم أن محمد قد نجح.

$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/4}{1/3}=\frac{3}{4}$	$P(A)=\frac{1}{3},\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

مثال: إذا علمت أن احتمال نجاح طالب في امتحان هو (0.7) واحتمال سفره للخارج إذا نجح (0.6) فما احتمال نجاحه وسفره؟ P(A)= 0.7, p(B/A)= 0.6

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\rightarrow 0.6=\frac{P(A\cap B)}{0.7}\rightarrow P(A\cap B)=0.6\times 0.7=0.42$$

الاستقلال: تعريف: يكون الحادثان A,B مستقلان إذا وفقط إذا كان: P(A∩B)= P(A).P(B)

وإذا كان A,B مستقلين فإن: P(A/B)= P(A), P(B/A)= P(B)

مثال: إذا كان $P(A)=\frac{1}{2},P(B/A)=\frac{1}{3},P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ أوجد احتمال B ثم وضح هل A,B مستقلان أم لا؟

P(B)	هل الحادثان مستقلان؟
$P(A\cap B)=P(A).P(B/A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ P(A∪B)= P(A) + P(B) – P(A∩B) P(B)= P(AB) + P(AB) – P(B) $P(B)=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	هل P(A∩B)= P(A).P(B) $\frac{1}{6}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ إذًا الحادثان غير مستقلان

مثال: إذا كان $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4},P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ أوجد:

هل الحادثان متنافيان؟ لماذا؟	$P(A\cap B)=0?\ \frac{1}{12}\neq 0$ غير متنافيان	P(A∩B)= P(A) +P(B) – P(A∪B) $=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
هل الحادثان متسقلان؟ لماذا؟	P(A∩B)= P(A).P(B)? $\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ مستقلان	$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/12}{1/3}=\frac{3}{12}$

مثال: يوجد في مدينة إطفائيتان مستقلتان عن بعضهما البعض، احتمال وصول الأولى إلى مكان حريق معين في الوقت المناسب P(A)= 0.95، واحتمال وصول الثانية لنفس المكان P(B)= 0.90، فما احتمال وصول إحدى الإطفائيتين على الأقل إلى مكان الحريق المذكور؟

$P(A \cup B)= P(A) + P(B) – [P(A).P(B)]= 0.95 + 0.90 – [0.95 . 0.90] = 0.995$

نظرية بييز: إذا كان لدينا عدة حوادث مستقلة تمثل تقسيمًا لفضاء عينة S ولتكن A,B,C,D,... وكان لدينا حادث جديد مثل E مشترك بين مجموعات الحوادث السابقة فإن

$$P(E)= P(A)*P(E/A) + P(B)*P(E/B) + P(C)*P(E/C) + P(D)*P(E/D) + \dots$$

إذا وقع الحدث E فإن احتمال وقوعه بشرط حدوث الحدث A يساوي $P(A/E) = \frac{P(A)\times P(E/A)}{P(E)}$

مثال: تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما، إذا كانت سكرتيرة A تطبع 40% وB تطبع 30%، وC تطبع 30% الباقية. إذا كان احتمال أن A تخطئ في الطباعة هو 0.02، وB هو 0.03، واحتمال خطأ C هو 0.04

احتمال الخطأ من A	P(A)= 0.40, P(E/A)= 0.02
احتمال الخطأ من B	P(B)= 0.30, P(E/B)= 0.03
احتمال الخطأ من C	P(C)= 0.30, P(E/C)= 0.04

١- ما احتمال أن الورقة المسحوبة فيها خطأ؟

P(A)= 0.40 → P(E/A)= 0.02
P(B)= 0.30 → P(E/B)= 0.03
P(C)= 0.30 → P(E/C)= 0.04

P(E)= P(A)*P(E/A) + P(B)*P(E/B) + P(C)*P(E/C)
= 0.40*0.02 + 0.30*0.03 + 0.30*0.04
= 0.008 + 0.009 + 0.012
P(E)= 0.029

٢- إذا سحبت الورقة فوجد فيها خطأ، ما احتمال أن تكون سكرتيرة A هي من طبعها؟

$P(A/E)= \frac{P(A)\times P(E/A)}{P(E)} = \frac{0.4\times 0.02}{0.029} = \frac{8}{29}$

٣- إذا سحبت الورقة فوجد فيها خطأ، ما احتمال أن تكون سكرتيرة B هي من طبعها؟

$P(B/E)= \frac{P(B)\times P(E/B)}{P(E)} = \frac{0.3\times 0.03}{0.029} = \frac{9}{29}$

٤- إذا سحبت الورقة فوجد فيها خطأ، ما احتمال أن تكون سكرتيرة C هي من طبعها؟

$P(C/E)= \frac{P(C)\times P(E/C)}{P(E)} = \frac{0.3\times 0.04}{0.029} = \frac{12}{29}$

مثال: يتم إنتاج المصباح الكهربائي في أحد المصانع بواسطة إحدى ثلاث آلات تنتج الآلة الأولى ٢٠% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثانية ٣٠% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثالثة ٥٠% من الإنتاج الكلي للمصنع، ومعلوم من الخبرة السابقة أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى هي ١% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية ٤% ونسبة إنتاج التالف للآلة الثالثة ٧%. إذا اختير مصباح من إنتاج المصنع عشوائيًا.

١- ما احتمال أن يكون المصباح المختار تالفًا؟

P(E)= P(A)*P(E/A) + P(B)*P(E/B) + P(C)*P(E/C)

= 0.20*0.01 + 0.30*0.04 + 0.50*0.07

P(E)= 0.049

٢- ما احتمال أن يكون المصباح سليمًا؟

$P(D)= (\bar{E})= 1 – P(E)= 1 – 0.049= 0.951$

٣- إذا اختير مصباح تالف فما احتمال أن٧ يكون من الآلة الأولى؟

$$P(A/E)= \frac{P(A)\times P(E/A)}{P(E)} = \frac{0.2\times 0.01}{0.049} = \frac{2}{49}$$

٤- إذا اختير مصباح تالف فما احتمال أن يكون من الآلة الثانية؟

$$P(B/E)= \frac{P(B)\times P(E/B)}{P(E)} = \frac{0.3\times 0.04}{0.049} = \frac{12}{49}$$

٥- إذا اختير مصباح تالف فما احتمال أن يكون من الآلة الثالثة؟

$$P(C/E)= \frac{P(C)\times P(E/C)}{P(E)} = \frac{0.5\times 0.07}{0.049} = \frac{35}{49}$$