

## الإحصاء الاستنتاجي

**مقدمة:** يقسم علم الإحصاء بشكل عام إلى قسمين: الإحصاء الوصفي؛ وهو ذلك العلم الذي يعنى بجمع البيانات وتنظيمها وتصنيفها وعرضها عن طريق الجداول أو الرسوم البيانية وغيرها، وهذا ما قد تعلمناه في مبادئ الإحصاء، والقسم الآخر الإحصاء الاستنتاجي؛ وهو ذلك الجزء من الإحصاء الذي يعنى بتحليل البيانات للتوصل إلى التنبؤ أو الاستقراء واتخاذ القرارات، وهذا ما سيكون موضوعنا في هذا المقرر.

**علاقة علم الإحصاء بمجموعة العلوم الإدارية:** يرتبط علم الإحصاء ارتباطاً قوياً بمجموعة العلوم الإدارية وذلك على أساس أن وظائف علوم الإدارة تستند في القيام بها بطريقة موضوعية على العديد من الطرق والنظريات الإحصائية.

فاتخاذ القرار ضروري وهام في علم الإدارة ويجب أن يؤخذ على أساس علمي غير متحيز حيث تقدم لنا نظرية الاحتمالات والتوقع الرياضي الأساس القياسي لهذا القرار، كما أن عمليات الشراء أو البيع وإدارة الإنتاج الصناعي وسياسات التسويق وغيرها الكثير يحتاج من المختصين الإلمام بالطرق الإحصائية من تفسيرات وتحديداً للعلاقات بين متغيرات هذه العلوم وقدرة كبيرة على وضع الفروض واختبارها والتأكد من مدى صحتها.

## الفصل الأول: نظرية الاحتمالات

التجربة الإحصائية والفضاء العيني والحوادث:

**تعريف ١:** التجربة الإحصائية: هي أي عملية أو مجموعة عمليات لا تعرف نتائجها المسبقة بشكل حتمي. فمثلاً رمي حجر نرد، أو إلقاء قطعة نقد يمثلان تجربة إحصائية ويسمى هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية حيث نلاحظ أن النتائج تتغير في كل مرة يتم إجراء التجربة فيها.

ولكل تجربة إحصائية نتائج، وتعرف النتيجة للتجربة على أنها النتيجة البسيطة، أي التي لا يمكن تحليلها إلى نتيجتين أو أكثر، وتسمى جميع النتائج البسيطة الممكنة الحدوث **بالفضاء العيني** للتجربة.

**تعريف ٢:** الفضاء العيني (Sample Space) لتجربة إحصائية هي مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة وسنعبر عن الفضاء العيني بالرمز  $S$ .

**تعريف ٣:** الحادث  $Event$ : هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني ويرمز له بأحد الأحرف التالية  $A, B, C, \dots$  وينقسم إلى قسمين: ١- الحادث البسيط: وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجة واحدة فقط.

٢- الحادث المركب: وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجتين فأكثر.

كما يمكن تعريف بعض من الحوادث التالية:

١- الحادث المستحيل: وهو الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر ورمزه  $\emptyset$ .

٢- الحادث الأكيد: وهو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني  $S$ .

**تعريف ٤:** فضاء العينة المنفصل: يسمى الفضاء العيني فضاءً منفصلاً إذا كان محدوداً أو لا نهائياً معدوداً، أي إذا أمكن ربط عناصره واحداً إلى واحد مع الأعداد الصحيحة الموجبة كأن نقول اربط العنصر الأول مع العدد ١ والعنصر الثاني مع العدد ٢ وهكذا إلى مالانهاية.

**مثال:** في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال على حدث بسيط وحدث مركب وحدث أكيد.

**الحل:** الفضاء العيني للتجربة  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

وبالتالي يمكن كتابة الحوادث التالية:

$B = \{3,4\}$	حدث مركب	$A = \{5\}$	حدث بسيط
$D = \{7\}$	حدث مستحيل	$C = S$	حدث أكيد

لاحظ أن العدد 7 لا ينتمي إلى الفضاء العيني لهذه التجربة ولذلك سمي بالحدث المستحيل.

**مثال:** في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال على حدث بسيط، حدث مركب، وحدث أكيد.

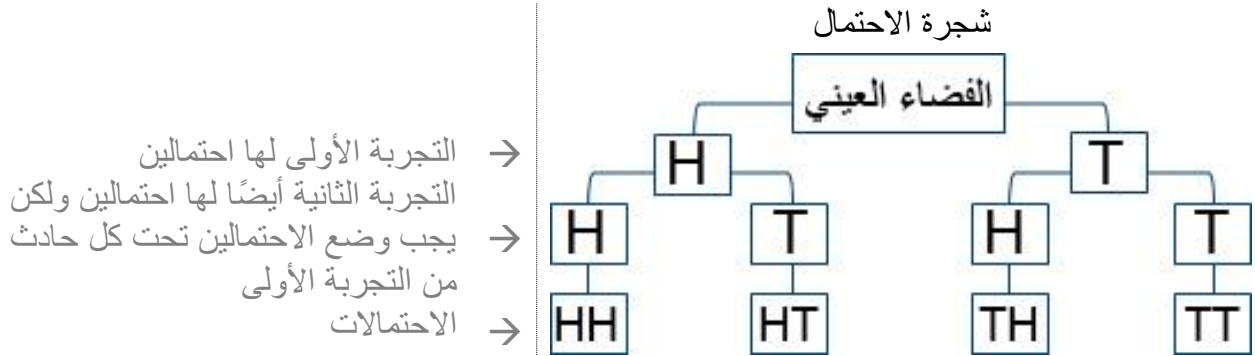
**ملاحظة:** سيتم الرمز بالحرف H لوجه الصورة، وبالحرف T لوجه الكتابة.

**الحل:**

$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

$C = S$	حدث أكيد	$A = \{(T,H),(T,T)\}$	حدث مركب	$A = \{(H,H)\}$	حدث بسيط
---------	----------	-----------------------	----------	-----------------	----------

لاحظ أن الحادث الأكيد دائماً هو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني، بينما الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر يسمى بالحدث المستحيل.



**تمارين**

**تمرين ٢:** في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة وأعط مثال على حدث بسيط، حدث مركب وحدث أكيد.

**الحل:** عدد عناصر الحادث الأول  $\times$  عدد عناصر الحادث الثاني  $= 6 \times 6 = 36$  عنصر  
عناصر الفضاء العيني: محاضرة 3 صفحة 7

$A = \{(1,4)\}$  = حدث بسيط  
 $B = \{(1,1),(3,2),(6,6)\}$  = حدث مركب  
 $S =$  جميع عناصر الفضاء العيني = حدث أكيد

**تمرين ١:** في تجربة إلقاء قطعة نقد وحجر نرد، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال لحدث بسيط وحدث مركب.

**الحل:** على نمط المثال السابق  
عدد عناصر الحادث الأول  $\times$  عدد عناصر الحادث الثاني  $= 6 \times 2 = 12$  عنصر

$S = \{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6), (T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$   
 $A = \{(H,1)\}$  = حدث بسيط  
 $B = \{(H,1),(H,2),(H,3)\}$  = حدث مركب

## أنواع المجموعات

١- المجموعة الخالية ( $\emptyset$ ): وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر.

٢- المجموعة الجزئية: نقول أن مجموعة جزئية من  $B$  ونرمز لها  $A \subseteq B$  إذا كان كل عنصر في  $A$  ينتمي للمجموعة  $B$ .

التساوي: نقول أن المجموعة  $A$  تساوي المجموعة  $B$  أي:  $A = B$  إذا كانت  $A, B$  تحتويان على نفس العناصر ويكون إذا كان  $A \subseteq B, B \subseteq A$ .

٣- المجموعات الكلية ( $S$ ): هي المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع العناصر المتعلقة بموضوع ما ويرمز لا بالرمز  $S$ .

٤- المجموعة المكمل (المتمة): نقول أن  $\bar{A}$  أو  $\bar{A}$  مجموعة مكمل للمجموعة  $A$  إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الشاملة  $S$  باستثناء عناصر  $A$ .

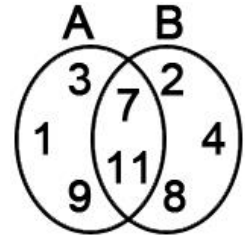
$$\bar{A} = \{x: x \in S, x \notin A\}$$

## العمليات الجبرية على المجموعات

$$\begin{array}{l} A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B\} \\ A - B = \{x: x \in A \text{ and } x \notin B\} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{array} \quad \begin{array}{l} A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\} \\ \bar{\bar{A}} = \{x: x \in S, x \notin \bar{A}\} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}$$

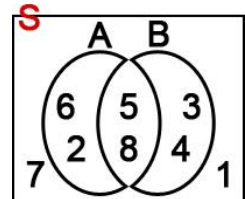
## العمليات على المجموعات

$$\begin{array}{l} A = \{1,3,7,9,11\} \\ A \cap B = \{7,11\} \\ A \cup B = \{1,3,7,9,11,2,4,8\} \\ A - B = \{1,3,9\} \end{array} \quad \begin{array}{l} B = \{2,4,7,8,11\} \\ \text{التقاطع } \cap \text{ هو مجموعة العناصر المشتركة} \\ \text{الاتحاد } \cup \text{ هو جميع عناصر المجموعتين} \\ \text{العناصر الموجودة في } A \text{ وغير موجودة في } B \end{array}$$



## المجموعة الشاملة ومكمل المجموعة

$$\begin{array}{l} \bar{A} = \{3,4,7,1\} \\ \bar{B} = \{2,6,7,1\} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \{1,7\} \end{array} \quad \begin{array}{l} S = \{2,6,5,8,3,4,1,7\} \\ A = \{2,6,5,8\} \\ B = \{3,4,5,8\} \end{array}$$



$S = \{1,2,3,\dots,10\}$	$A = \{x: x \text{ فردي}\}$	$B = \{x: x \text{ زوجي}\}$	مثال: إذا كان أوجد:
$A - B$	$\bar{A}$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A \cup B}$
$A - B = A$	$\bar{A} = B$	$A \cap B = \emptyset$	$\overline{A \cup B} = S$
			الحل:

**الحوادث المتنافية:** نقول بأن الحادثان  $A, B$  متنافيان إذا تحقق الشرط التالي:  $A \cap B = \emptyset$

**مثال:** إذا كان  $S = \{1,2,\dots,10\}$ ، وكان  $A$  حادث يمثل ظهور عدد فردي و  $B$  حادث يمثل ظهور عدد زوجي من  $S$ ، فعندئذ نقول بأن الحادثان  $A, B$  متنافيان.

## طرق العد

في هذا البند سنتعرف على طرق منتظمة لإيجاد عدد نقاط الفضاء العيني لتجربة إحصائية.

١- **قاعدة الضرب:** إذا كانت التجربة  $E_1$  تحدث في  $n$  من الطرق ومع كل طريقة من هذه الطرق كانت التجربة  $E_2$  تحدث في  $m$  من الطرق فإن التجريبتين تحدثان معاً في  $(mn)$  من الطرق.

**مثال:** أراد طالب أن يسجل في مقررين، أحدهما من قسم الإحصاء والآخر من المحاسبة، فإذا كان عدد مقررات الإحصاء ٣ وعدد مقررات المحاسبة ٤، فما عدد الطرق التي يمكن للطالب التسجيل فيها؟

$$\text{الحل: } 12 = 4 \times 3$$

**ملاحظة:** يمكن تعميم قاعدة الضرب لتشمل  $k$  من التجارب.

**مثال:** كم هاتفاً يمكن تركيبه في مدينة الدمام إذا أُلّف رقم الهاتف من ٧ أرقام أولها ٨ أو ٩؟

**الحل:** الرقم الأول خياران، أما الأرقام الأخرى فيوجد عشرة طرق.

$$\text{عدد الهواتف: } 2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

٢- **قاعدة الجمع:** إذا كانت التجربة الأولى تحدث في  $n$  من الطرق والثانية في  $m$  من الطرق وكانت التجريبتان مانعتين لبعضهما فإن واحدة منهما أو الأخرى تحدث في  $m+n$

**مثال:** بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقرراً واحداً من الإحصاء أو الرياضيات، إذا كان يوجد ٣ في الإحصاء و ٥ في الرياضيات؟

$$\text{الحل: عدد الطرق: } 8 = 3 + 5$$

**ملاحظة:** يمكن تعميم قاعدة الجمع لتشمل  $k$  من التجارب.

**مثال:** أراد طالب أن يسجل بإحدى الكليات: الشريعة، العلوم، العلوم الإدارية، القانون. إذا كان عدد أقسام الشريعة ٣، والعلوم ٥، والعلوم الإدارية ٤، والقانون ٢، كم عدد الخيارات؟

$$\text{الحل: } 14 = 2 + 4 + 5 + 3$$

٣- **قاعدة التباديل:** تعريف التباديل: ترتيب جميع عناصر أو جزء من عناصر أي مجموعة. إذا كان لدينا  $n$  عنصراً وسحبنا منها  $r$  عنصراً في وقت واحد (أو سحبنا بدون ارجاع) الترتيب مهم فإن عدد الترتيبات الممكنة

$$\text{يسمى } n \text{ تباديل } r \text{ وهي: } {}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**مثال:** بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الأحرف  $a, b, c, d, e$ ؟

$$\text{الحل: } {}^5 P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

**مثال:** تريد أمانة مكتبة أن تعرض على رف ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة، فبكم طريقة يمكنها ذلك؟

$$\text{الحل: } {}^{10} P_6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 151200$$

٣- قاعدة التوافيق: إذا كان لدينا  $n$  عنصرًا وسحبنا منها  $r$  عنصرًا في وقت واحد (أو سحبنا  $r$  بدون إرجاع) فإن عدد التركيبات الممكنة بإهمال الترتيب يسمى  $n$  توافيق  $r$  ويرمز لها:  $\binom{n}{r} = {}^n C_r = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$

مثال: ما عدد الطرق التي تختار بها حرفين من  $a, b, c$  بدون ترتيب؟

$$\text{الحل: } {}^3 C_2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{(1) \times 2 \times 1} = 3$$

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من أربعة طلاب من بين عشرة طلاب؟

$$\text{الحل: } {}^{10} C_4 = \binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = 210$$

ملاحظة: السحب بالإرجاع: عدد الطرق الكلية لسحب  $r$  كرة من  $n$  كرة بإرجاع يساوي  $n^r$

مثال: وعاء به ١٥ كرة، ماهو عدد طرق سحب كرتين بإرجاع؟

$$\text{الحل: } n^r = 15^2 = 225$$

مثال: وعاء به ١٠ كرات، أوجد عدد الطرق الممكنة لسحب ٣ كرات بدون إرجاع، إذا:

المطلوب:	ترتيب الكرات مأخوذ بعين الاعتبار	ترتيب الكرات غير مأخوذ بعين الاعتبار
الحل:	${}^{10} P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720$	${}^{10} C_3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = 120$

● نظرية: إذا كان ضمن  $n$  من العناصر،  $n_1$  من العناصر المتشابهة،  $n_2$  من العناصر المتشابهة المختلفة عن النوع الأول،  $n_3$  من العناصر المتشابهة المختلفة عن النوعين الأوليين،  $n_k$  من العناصر المتشابهة المختلفة عن جميع العناصر من الأنواع السابقة، فإن عدد تباديل العناصر التي عددها  $n$  هو:  $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k!}$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب الكلمات:

المطلوب:	سلسيل	Statistics
الحل:	$\frac{6!}{2! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{720}{4} = 180$	هنا نجد أن عدد الحروف ٦ منها ٢ متشابهة و ٢ متشابهة أخرى وحرف مختلف وحرف مختلف مختلف (s) هنا نجد أن عدد الحروف ١٠ منها ٣ (t) متشابهة و ٢ (i) متشابهة و ٢ (a) حرف مختلف و ٢ (c) حرف مختلف مختلف
		$\frac{10!}{3! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1!} = 50400$

ملاحظات: ١- ترتيب  $n$  من الأشياء في صف هو  $n!$ .

٢- ترتيب  $n$  من الأشياء في دائرة هو  $(n-1)!$ .

مثال:	ماهو عدد طرق ترتيب ٥ طلاب في صف؟	ماهو عدد طرق ترتيب ٥ طلاب حول دائرة؟
الحل:	عدد الطرق: $n! = 5! = 120$	عدد الطرق: $(n-1)! = (5-1)! = 4! = 24$

**مثال:** بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب وسكرتير ينتخبون من بين ٣٠ عضو؟

**الحل:** عدد الطرق = مبدأ العد لأن الترتيب مهم (تحديد وظيفة) والتكرار غير مسموح. (تباديل)

عدد الطرق = طرق اختيار الرئيس × طرق اختيار النائب × طرق اختيار السكرتير.

$$= 30 \times 29 \times 28$$

**مثال:** بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ٣ منازل من بين الأرقام التالية {1,2,3,4,5} إذا سُمح بالتكرار؟

**الحل:** الترتيب مهم (منازل)، التكرار مسموح ← مبدأ العد

عدد الطرق = أحاد عشرات مئات

$$= 5 \times 5 \times 5$$

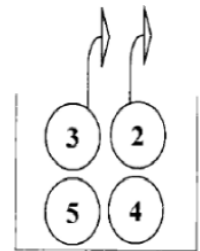
**مثال:** بكم طريقة يمكن سحب كرتين دفعة واحدة من صندوق فيه ٦ كرات؟

**الحل:** الترتيب غير مهم (دفعة واحدة)، التكرار غير مسموح ← توافق

$$\text{عدد الطرق} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = 15 \text{ طريقة}$$

**مثال:** صندوق فيه ٤ كرات مرقمة بالأرقام يراد سحب كرتين منه، اكتب عدد الطرق التي يمكن بها سحب الكرتين إذا كان السحب:

الحل	المطلوب
$= \text{سحب الأولى} \times \text{سحب الثانية} = 4 \times 4 = 16 \text{ طريقة}$	على التوالي مع الإرجاع (مبدأ العد)
$\text{طريقة} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$	على التوالي بدون إرجاع (تباديل) $n=4, r=2$
$\text{طرق} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$	دفعة واحدة (توافق) $n=4, r=2$



**الاحتمال Probability** : تعريف: إذا كانت  $S$  الفضاء العيني لتجربة ما، وكان  $A$  أي حدث في  $S$  فإننا نعين لهذا الحدث عددًا  $P(A)$  يسمى احتمال الحادث  $A$  بحيث يساوي عدد عناصر الحادث مقسومًا على عدد

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{عدد عناصر الحادث } A}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} \quad \text{بالرموز: عناصر الفضاء العيني.}$$

بحيث يحقق الفرضيات التالية: ١-  $0 \leq P(A) \leq 1$

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(S) = 1 \quad \text{٢-}$$

**مثال:** عند رمي قطعة نقود مرة واحدة، اكتب فضاء العينة ثم أوجد:

$S = \{H, T\}$	$n(S) = 2$	فضاء العينة
$A = \{H\}$ , $n(A) = 1 \rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$		أ- احتمال ظهور صورة = $A$
$B = \{T\}$ , $n(B) = 1 \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$		ب- احتمال ظهور كتابة = $B$

**مثال:** عند رمي قطعة نقود مرتين، اكتب فضاء العينة ثم أوجد:

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$	$n(S) = 4$	فضاء العينة
$A = \{HH, HT\}$ , $n(A) = 2 \rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$		أ- احتمال ظهور صورة في الرمية الأولى = $A$
$B = \{HT, TH, TT\}$ , $n(B) = 3 \rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$		ب- احتمال ظهور كتابة في إحدى الرميتين = $B$

**مثال:** عند رمي حجر نرد مرة واحدة، اكتب فضاء العينة ثم أوجد احتمال:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = 6$	فضاء العينة
$A = \{2, 4, 6\}$ , $n(A) = 3 \rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$		أ- حدث ظهور عدد زوجي = $A$
$B = \{2, 3, 5\}$ , $n(B) = 3 \rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$		ب- حدث ظهور عدد أولي = $B$
$C = \{3, 6\}$ , $n(C) = 2 \rightarrow P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$		ج- حدث ظهور عدد يقبل القسمة على 3 = $C$
$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , $n(D) = 6 \rightarrow P(D) = \frac{6}{6} = 1$		د- حدث ظهور عدد أقل من 7 = $D$
$F = \{\} = \emptyset$ , $n(F) = 0 \rightarrow P(F) = \frac{0}{6} = 0$		و- حدث ظهور عدد أكبر من 6 = $F$

**الحدث المؤكد:** هو الحدث الذي يجب وقوعه عند إجراء التجربة واحتمال الحدث المؤكد يساوي ١.

**الحدث المستحيل:** هو الحدث الذي لا يمكن وقوعه عند إجراء التجربة واحتمال الحدث المستحيل يساوي صفر.

**مثال:** عند رمي زهرة نرد منتظمة مرتين فإن العناصر (النتيجة) الممكنة التي يمكن وضعها بجدول:

فضاء العينة مكون من ٣٦ عنصر بمعنى $n(S) = 36$											
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$A = \{(4,1), (2,3), (3,2), (1,4)\} \rightarrow n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

أ- احتمال أن يكون مجموع الرميتين = ٥ هو ؟A

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$\rightarrow n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب- احتمال أن يكون الرميتين متساويتين هو ؟B

**تمارين:** أوجد الحوادث التالية واحتمال كل حادث وذلك عند رمي زهرة نرد مرتين، حيث:

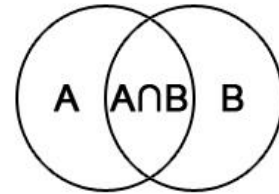
$Y =$  عدد نقاط الرمية الثانية

$X =$  عدد نقاط الرمية الأولى

$A = \{(x,y): x+y < 4\}$	$A = \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \rightarrow n(A) = 3$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	3
$B = \{(x,y): x-y = 4\}$	$B = \{(5,1), (6,2)\} \rightarrow n(B) = 2$ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$	
$C = \{(x,y): x = 5\}$	$C = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\} \rightarrow n(C) = 6$ $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	
$D = \{(x,y): x+y = 15\}$	$D = \{\} = \emptyset \rightarrow n(D) = 0$ $P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{0}{36} = 0$	

**قواعد الاحتمالات:** إذا كانت S فضاء عينة وكان A, B حدثين من فضاء العينة فإن:

- 1-  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 2-  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- 3-  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- 4-  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 5-  $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
- 6-  $P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$



$$7- P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$$

فأوجد:

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3$$

**مثال:** إذا كان:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.4 + 0.7 - 0.3 = 0.8$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0.4 - 0.3 = 0.1$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.7 - 0.3 = 0.4$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4$$

$$= 0.6$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3$$

**ملاحظات هامة على الاحتمالات:** لأي حدثين من فضاء العينة A و B

٢- احتمال وقوع الحادثين معًا (وقوع A و B) هو  $P(A \cap B)$

١- احتمال وقوع أحد الحادثين على الأقل (وقوع A أو B) هو  $P(A \cup B)$

٤- احتمال عدم وقوع الحدث A هو  $P(\bar{A})$

٣- احتمال وقوع الحدث A فقط (وقوع A بدون وقوع B) هو  $P(A - B)$



**مثال:** إذا كان احتمال حضور مدير شركة ما في يوم ما يساوي (0.9) واحتمال حضور مساعد المدير اليوم (0.95) واحتمال حضور واحد منهما على الأقل يساوي (0.97) أوجد:

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $= 0.9 + 0.95 - 0.97 = 0.88$	احتمال حضور المدير والمساعد
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ $= 0.9 - 0.88 = 0.02$	احتمال حضور المدير وحده
$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ $= 0.95 - 0.88 = 0.07$	حضور مساعد المدير وحده

**مثال:** إذا كان احتمال نجاح محمد هو (0.8) واحتمال نجاح أحمد ومحمد هو (0.6) واحتمال رسوب أحمد هو (0.3) فأوجد:

نجاح محمد A	حدث نجاح أحمد هو B	فيكون رسوب أحمد هو B
$P(A) = 0.8$	$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0.7$	$P(\bar{B}) = 0.3$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $= 0.8 + 0.7 - 0.6 = 0.9$		احتمال نجاح أحدهما على الأقل
$P(A \cap B) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ $= 0.8 - 0.6 = 0.2$		احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد

**مثال:** يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء وكرتين سوداوين، سحب من الكيس كرة واحدة عشوائياً، أوجد:

$P(\text{حمراء}) = \frac{\text{عدد عناصر سحب الكرة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء
$P(\text{سوداء}) = \frac{\text{عدد عناصر سحب الكرة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء
$P(\text{غير بيضاء}) = P(\text{حمراء}) + P(\text{سوداء}) = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} = \frac{8}{12}$	احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير بيضاء
$P(\text{بيضاء}) = \frac{4}{12} \rightarrow P(\overline{\text{بيضاء}}) = 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	

## الاحتمال Probability

**مثال:** كيس فيه ١٢ كرة منها ٤ كرات حمراء والباقي بيضاء، سحب من الكيس كرتان دفعة واحدة، جد احتمال:

الفضاء العيني لتجربة سحب كرتين من الكل هو  $n(S) = \binom{12}{2} = 66$

$P(A) = \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين حمراوين}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{\binom{4}{2}}{66} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$	١- أن تكون الكرتان حمراوان. (A)
$P(B) = \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين حمراوين}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} + \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين بيضاء}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$ $= \frac{\binom{4}{2}}{66} + \frac{\binom{8}{2}}{66} = \frac{6}{66} + \frac{28}{66} = \frac{34}{66}$	٢- أن تكون الكرتان من نفس اللون. (B)
$P(C) = \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين مختلفتين}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{66} = \frac{4 \times 8}{66} = \frac{32}{66}$	٣- أن تكون الكرتان مختلفتي اللون. (C)
$P(D) = \frac{\text{عدد طرق سحب كرتين حمراوين}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} + \frac{\text{عدد طرق سحب كرة حمراء وكرة بيضاء}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$ $= \frac{\binom{4}{2}}{66} + \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{66} = \frac{6}{66} + \frac{4 \times 8}{66} = \frac{6}{66} + \frac{32}{66} = \frac{38}{66}$	٤- أن تكون إحداهما حمراء على الأقل. (D)

**مثال:** صندوق به ١٠ بطاقات متماثلة منها ٤ حمراء و ٦ بيضاء، فإذا سحبنا بطاقتان على التوالي؛ ماهو احتمال:

الفضاء العيني لتجربة سحب بطاقتين هو  $n(S) = {}^{10}P_2 = 90$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4P_2}{90} = \frac{12}{90}$	١- أن تكون جميعها حمراء؟ (A)
$P(B) = \frac{4P_1 \times 6P_1}{90} + \frac{6P_1 \times 4P_1}{90} = \frac{4 \times 6}{90} + \frac{6 \times 4}{90} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90}$	٢- أن تكون بطاقة واحدة حمراء فقط؟ (B)
$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{12}{90} + \frac{48}{90} = \frac{60}{90}$ <p>أو نوجد احتمال أن تكون جميعها بيضاء (D)، ثم نوجد المتممة (<math>\bar{D}</math>)</p> $P(D) = \frac{6P_2}{90} = \frac{30}{90}$ $P(C) = P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{30}{90} = \frac{60}{90}$	٣- أن تكون بطاقة واحدة على الأقل حمراء؟ (C)

**الاحتمال الشرطي:** تعريف: إذا كان A, B حادثان في فضاء العينة S فإن الاحتمال الشرطي للحادث A إذا علم

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$
 يعرف له P(A/B) ويرمز له B حدوث الحادث

**مثال:** إذا كان  $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.4$  جد:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B-A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.5 - 0.4}{0.5} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$$

**مثال:** إذا كان احتمال أن ينجح محمد هو  $\frac{1}{3}$  واحتمال أن ينجح محمد وأحمد هو  $\frac{1}{4}$ ، أوجد احتمال نجاح أحمد إذا علم أن محمد قد نجح.

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$$

**مثال:** إذا علمت أن احتمال نجاح طالب في امتحان هو (0.7) واحتمال سفره للخارج إذا نجح (0.6) فما احتمال نجاحه وسفره؟  
 $P(A) = 0.7, p(B/A) = 0.6$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0.6 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \rightarrow P(A \cap B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

**الاستقلال:** تعريف: يكون الحادثان A, B مستقلان إذا فقط إذا كان:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{وإذا كان A, B مستقلين فإن:}$$

$$P(A/B) = P(A), P(B/A) = P(B)$$

**مثال:** إذا كان  $P(A) = \frac{1}{2}, P(B/A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}$  أوجد احتمال B ثم وضع هل A, B مستقلان أم لا؟

هل الحادثان مستقلان؟	P(B)
هل $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ إذا الحادثان غير مستقلان	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$ $P(B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
	<b>مثال:</b> إذا كان $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{5}{12}$ أوجد:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cap B) = 0? \frac{1}{12} \neq 0$$

غير متنافيان

هل الحادثان متنافيان؟ لماذا؟

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{3}{12}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)?$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$$

مستقلان

هل الحادثان مستقلان؟ لماذا؟

**مثال:** يوجد في مدينة إطفائيتين مستقلتان عن بعضهما البعض، احتمال وصول الأولى إلى مكان حريق معين في الوقت المناسب  $P(A) = 0.95$ ، واحتمال وصول الثانية لنفس المكان  $P(B) = 0.90$ ، فما احتمال وصول إحدى الإطفائيتين على الأقل إلى مكان الحريق المذكور؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - [P(A) \cdot P(B)] = 0.95 + 0.90 - [0.95 \cdot 0.90] = 0.995$$

**نظرية بييز:** إذا كان لدينا عدة حوادث مستقلة تمثل تقسيماً لفضاء عينة  $S$  ولتكن  $A, B, C, D, \dots$  وكان لدينا حادث جديد مثل  $E$  مشترك بين مجموعات الحوادث السابقة فإن

$$P(E) = P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) + P(D) \cdot P(E/D) + \dots$$

$$P(A/E) = \frac{P(A) \cdot P(E/A)}{P(E)} \quad \text{إذا وقع الحدث } E \text{ فإن احتمال وقوعه بشرط حدوث الحدث } A \text{ يساوي}$$

**مثال:** تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما، إذا كانت سكرتيرة  $A$  تطبع 40% و  $B$  تطبع 30%، و  $C$  تطبع 30% الباقية. إذا كان احتمال أن  $A$  تخطئ في الطباعة هو 0.02، و  $B$  هو 0.03، واحتمال خطأ  $C$  هو 0.04

$P(A) = 0.40$ , $P(E/A) = 0.02$	احتمال الخطأ من $A$
$P(B) = 0.30$ , $P(E/B) = 0.03$	احتمال الخطأ من $B$
$P(C) = 0.30$ , $P(E/C) = 0.04$	احتمال الخطأ من $C$

٢- إذا سحبت الورقة فوجد فيها خطأ، ما احتمال أن تكون سكرتيرة  $A$  هي من طبعتها؟

$$P(A/E) = \frac{P(A) \cdot P(E/A)}{P(E)} = \frac{0.4 \cdot 0.02}{0.029} = \frac{8}{29}$$

٣- إذا سحبت الورقة فوجد فيها خطأ، ما احتمال أن تكون سكرتيرة  $B$  هي من طبعتها؟

$$P(B/E) = \frac{P(B) \cdot P(E/B)}{P(E)} = \frac{0.3 \cdot 0.03}{0.029} = \frac{9}{29}$$

٤- إذا سحبت الورقة فوجد فيها خطأ، ما احتمال أن تكون سكرتيرة  $C$  هي من طبعتها؟

$$P(C/E) = \frac{P(C) \cdot P(E/C)}{P(E)} = \frac{0.3 \cdot 0.04}{0.029} = \frac{12}{29}$$

١- ما احتمال أن الورقة المسحوبة فيها خطأ؟

$$P(A) = 0.40 \rightarrow P(E/A) = 0.02$$

$$P(B) = 0.30 \rightarrow P(E/B) = 0.03$$

$$P(C) = 0.30 \rightarrow P(E/C) = 0.04$$

$$P(E) = P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C)$$

$$= 0.40 \cdot 0.02 + 0.30 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04$$

$$= 0.008 + 0.009 + 0.012$$

$$P(E) = 0.029$$

**مثال:** يتم إنتاج المصباح الكهربائي في أحد المصانع بواسطة إحدى ثلاث آلات تنتج الآلة الأولى ٢٠% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثانية ٣٠% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثالثة ٥٠% من الإنتاج الكلي للمصنع، ومعلوم من الخبرة السابقة أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى هي ١% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية ٤% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة ٧%. إذا اختير مصباح من إنتاج المصنع عشوائياً.

٣- إذا اختير مصباح تالف فما احتمال أن يكون من الآلة الأولى؟

$$P(A/E) = \frac{P(A) \times P(E/A)}{P(E)} = \frac{0.2 \times 0.01}{0.049} = \frac{2}{49}$$

٤- إذا اختير مصباح تالف فما احتمال أن يكون من الآلة الثانية؟

$$P(B/E) = \frac{P(B) \times P(E/B)}{P(E)} = \frac{0.3 \times 0.04}{0.049} = \frac{12}{49}$$

٥- إذا اختير مصباح تالف فما احتمال أن يكون من الآلة الثالثة؟

$$P(C/E) = \frac{P(C) \times P(E/C)}{P(E)} = \frac{0.5 \times 0.07}{0.049} = \frac{35}{49}$$

١- ما احتمال أن يكون المصباح المختار تالفاً؟

$$P(E) = P(A) \times P(E/A) + P(B) \times P(E/B) + P(C) \times P(E/C) \\ = 0.20 \times 0.01 + 0.30 \times 0.04 + 0.50 \times 0.07 \\ P(E) = 0.049$$

٢- ما احتمال أن يكون المصباح سليماً؟

$$P(D) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0.049 = 0.951$$