أولاً: توزيع ذات الحدين

إذا كان لدينا تجربة عشوائية لها ناتجان فقط مثل (صورة وكتابة) تسمى النتيجة الأولى نجاح والثانية فشل وكان P هو احتمال النجاح للتجربة في كل مرة و q = 1-P هو احتمال الفشل وكان n يرمز إلى عدد مرات القيام بالتجربة فإن التجربة تسمى تجربة ذات الحدين وتعطى دالة التوزيع الاحتمالي بالقانون التالي:

$$b(x,n,P) = P(x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,3,\dots\dots n$$

مثال: عند رمي قطعة نقود 3 مرات أوجد ما يلي إذا كان x هو عدد مرات ظهور الصورة:

١- دالة التوزيع الاحتمالي

$n=3 \qquad P=\frac{1}{2}$

$$b(x,n,P) = P(x)$$

$$b\left(x,3,\frac{1}{2}\right) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-x} \qquad x = 0,1,2,3$$

٢- ما هو احتمال عدم ظهور صورة؟

$x = 0$

$$P(0)=b\left(0,3,\frac{1}{2}\right) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-0}$$

$$= 1 \text{ X } 1 \text{ X } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

٣- ما هو احتمال ظهور الصورة مرتان فقط؟

$x = 0$

$$P(2)=b\left(2,3,\frac{1}{2}\right) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$= 3 \text{ X } \frac{1}{4} \text{ X } \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

مثال: عند رمي حجر نرد خمس مرات وكان المتغير العشوائي x هو عدد مرات ظهور العدد 2 أوجد ما يلي:

١- دالة التوزيع الاحتمالي

n=5 $\quad$ P=$\frac{1}{6}$

$$b(x,n,P) = P(x)$$

$$b\left(x,5,\frac{1}{6}\right) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-x} \qquad x = 0,1,2,3$$

٢- ما هو احتمال ظهور العدد 2 مرتان؟

$$x = 2$$

$$P(2)=b\left(2,5,\frac{1}{6}\right) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{5-2}$$

$$= 10 \text{ X} \frac{1}{36} \text{X} \frac{125}{216} = \frac{10\ X125}{36\ X\ 216} = \frac{1250}{7776}$$

٣- ما هو احتمال ظهور العدد 2 اربع مرات على الأقل؟

$$P(x \geq 4) = P(4) + P(5)$$

$$= \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

$$= 5 \text{ X} \frac{1}{6^4} + \frac{5}{6} + 1\ X\ \frac{1}{6^5}$$

مثال: أطلق صياد 3 رصاصات على هدف، إذا كان احتمال إصابة الهدف هو 0.6 أوجد ما يلي:

١- دالة التوزيع الاحتمالي

n=3 $\quad$ P= 0.6

$$P(x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,3,\ldots\ldots,n$$

$$= \binom{3}{x}(0.6)^3(0.4)^{3-x} \qquad x = 0,1,2,$$

٢- ما هو احتمال إصابة الهدف 3 مرات

$$P(3)=\binom{3}{3}(0.6)^3(0.4)^0 = 0.216$$

٣- ما هو احتمال إصابة الهدف مرة واحدة فقط

$$P(1)=\binom{3}{1}(0.6)^1(0.4)^2 = 0.288$$

٤- ما هو احتمال عدم إصابة الهدف

$$P(0)=\binom{3}{0}(0.6)^0(0.4)^3 = 0.064$$

٥- ما هو احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر

$$P(x\leq 1) = P(0) + P(1)$$
$$= 0.064 + 0.288 = 0.352$$

٦- ما هو احتمال إصابة الهدف مرتان على الأقل

$$P(x\geq 2) = P(2) + P(3)$$
$$= 1 - (P(0)+P(1))$$
$$= 1- 0.352 = 0.352 = 0.648$$

مثال: وجد في أحد المصانع أنه من كل 1000 وحده يوجد 150 وحدة معيبة، وأخذت عينة عشوائية مكنة من 5 وحدات أوجد ما يلي إذا كان x هو عدد مرات ظهور وحدة معيبة:

١- دالة التوزيع الاحتمالي

$n=5$ $\qquad$ $P=\frac{150}{1000} = 0.15$

$$b(x,5,0.15) = \binom{5}{x} (0.15)^x (0.85)^{5-x} \qquad x = 0,1,2,3,4,5$$

٢- ما هو احتمال أن تكون العينة سليمة

$$P(0)= \binom{5}{0} (0.15)^0 (0.85)^5 = 0.444 \qquad x = 0$$

٣- ما هو احتمال أن توجد وحده معيبة على الأكثر

$$P(x\leq 1) = P(0) + P(1)$$
$$= 0.444 + \binom{5}{1} (0.15)^1 (0.85)^4$$
$$= 0.444 + 0.391 = 0.835$$

٤- ما هو احتمال أن توجد وحدتان معيبتان على الأقل

$$P(x\geq 2) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$
$$1\text{-}P(x< 2) = 1 - (P(0) + P(1))$$
$$= 1\text{-}0.835 = 0.165$$

باستخدام المتممة ←

مثال: أسرة لديها5 أطفال، إذا كان المتغير العشوائي x هو عدد الأطفال الذكور. أوجد احتمال أن يكون لدى الأسرة 3 ذكور.

$n=5$ $\qquad$ $P=\frac{1}{2}$

$$P(x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,3,\dots\dots n$$

$$P(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-x} \qquad x = 0,1,2,3,4,5$$

$$= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 10 \text{ x } \frac{1}{8} \text{ x } \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

توقع المتغير العشوائي الذي يخضع لتجربة ذات الحدين

$$E(x)=nP$$

والتباين

$$\sigma^2(x) = nPq$$

والانحراف المعياري= الجذر التربيعي للتباين = $\sqrt{\sigma^2}$

مثال: إذا كان احتمال تسجيل هدف على الحارس من ضربة حرة0.75 فما هو احتمال تسجيل هدفين من 4 ضربات حرة، ثم أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

$n=4 \qquad P=0.75$

$$P(x)= \binom{4}{x}(0.75)^x(0.25)^{n-x}$$

$$= \binom{4}{2}(0.75)^2(0.25)^{4-2} = 0.211$$

$$E(x)=nP = 4(0.75) = 3$$

$$\sigma^2 = nPq=4(0.75)(0.25) = 0.75$$

$$\sqrt{\sigma^2} =\sqrt{0.75} = 0.866$$

مثال: فحصت أجهزة حاسوب قبل اعتبارها صالحة وتسليمها للزبائن، فإذا كان نسبة نجاح هذه الأجهزة في الفحص هو 0.95 وأرسل 30 جهاز بهذا الفحص فكم جهاز نتوقع أن يكون صالح وما هو الانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي x هو عدد مرات أخذ جهاز صالح؟

$n=30 \qquad P=0.95$

$$E(x)=nP= 30 \text{ x } 0.95 = 28.5$$

$$\sigma^2 = nPq = 30\ X\ 0.95\ X\ 0.05$$

$$= 1.425$$

$$\sigma(x) = \sqrt{1.425} = 1.2$$