المحاضره الاولى:

الاحصاء الاستنتاجي مقدمه:

يقسم علم الاحصاء بشكل عام الى قسمين

١-الاحصاء الوصفي: وهو ذلك العلم الذي يعنى بجمع البيانات وتنظيمها وتصنيفها وعرضها عن طريق جداول او رسوم بيانيه

٢-الاحصاء الاستنتاجي: وهو العلم الذي يعنى بتحليل البيانات للتوصل الى تنبؤ او الاستقراء واتخاذ القرارات

علاقة علم الاحصاء بمجموعة العلوم الادارية؟

يرتبط علم الاحصاء ارتباطا قويا بمجموعة العلوم الإدارية وذلك على اساس ان وظائف علوم الإدارة تستند في القيام بها بطريقة موضوعيه على العديد من الطرق والنظريات الإحصائية

فاتخاذ القرار ضروري وهام في علم الإدارة ويجب ان يؤخذ على اساس علمي غير متحيز حيث تقدم لنا نظرية الاحتمالات والتوقع الرياضي الاساس القياسي لهذا القرار كما ان عمليات الشراء او البيع وادارة الانتاج الصناعي وسياسات التسويق وغيرها الكثير يحتاج من المختصين الالمام بالطرق الإحصائية من تفسيرات وتحديدا للعلاقات بين متغيرات هذه العلوم وقدرة كبيرة على وضع الفروض واختبارها والتأكد من مدى صحتها

الأسبوع	المحتوى الدراسي
الأسبوع الأول	مقدمة + مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات + طرق العد
الأسبوع الثاني	قوانين الاحتمالات + الاحتمال الشرطي والمستقل
الأسبوع الثالث	المتغير العشوائي والتوزيعات الاحتمالية المتصلة
الأسبوع الرابع	التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي + توزيعات احتمالية خاصة
الأسبوع الخامس	مراجعة عامة
الأسبوع السادس	التوزيعات الاحتمالية المتصلة: التوزيع الطبيعي والمعياري
الأسبوع السابع	توزيع t + توزيع كاي تربيع + توزيع F
الأسبوع الثامن	احصاءات العينة + توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ + توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي + توزيع المعاينة من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 غير معلوم
الأسبوع التاسع	التقدير النقطي والتقدير بفترة + تقدير فترة الثقة لمتوسط المجتمع
الأسبوع العاشر	تقدير فترة الثقة للنسبة + تقدير فترة الثقة لتباين مجتمع طبيعي
الأسبوع الحادي عشر	اختبار الفرضيات المتعلق بالوسط الحسابي + اختبار الفرضيات المتعلق بالنسبة
الأسبوع الثاني عشر	اختبار الفرضيات المتعلق بالفرق بين وسطين + اختبار الفرضيات المتعلق بين نسبتين إحساس
الأسبوع الثالث عشر	مراجعة عامة

الفصل الاول: نظرية الاحتمالات

التجربه الإحصائية والفضاء العيني والحوادث:

تعريف ١: التجربه الإحصائية: هي أي عمليه او مجموعة عمليات لا تعرف نتائجها المسبقة بشكل حتمي فمثلا رمي زهرة نرد او القاء قطعة نقد يمثلان تجربة إحصائية ويسمى هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية حيث نلاحظ ان النتائج تتغير في كل مره يتم اجراء التجربه فيها

ولكل تجربه إحصائية نتائج . وتعرف النتيجة للتجربة على انها النتيجة البسيطة ، التي لا يمكن تحليلها الى نتيجتين او اكثر وتسمى جميع النتائج البسيطة الممكنة الحدوث بالفضاء العيني للتجربة

تعريف ٢: الفضاء العيني sample space: لتجربه إحصائية هي مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربه وسنعبر عن الفضاء العيني بالرمز s.

<u>تعريف ٣: الحادث event</u> : هو مجموعة جزئيه من الفضاء العيني ويرمز له بأحد الاحرف التالية a;b;c..... ويقسم الى قسمين
١-<u>الحادث البسيط :</u> وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجه واحده فقط
٢-<u>الحادث المركب</u>: وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجتين او اكثر
كما يمكن تعريف بعض من الحوادث التالية:
١-<u>الحادث المستحيل</u> :وهو الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر ورمزه **Ø**
٢-<u>الحادث الاكيد</u>: وهو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني s
<u>تعريف ٤: فضاء العينه المنفصل:</u> يسمى الفضاء العيني فضاء منفصلا اذا كان محدودا او لانهائيا معدودا ، أي اذا امكن ربط عناصره واحدا الى واحد مع الاعداد الصحيحة الموجبة كأن نقول اربط العنصر الاول مع العدد١ والعنصر الثاني مع العدد٢ وهكذا الى مالا نهاية
<u>مثال:</u> في تجربة القاء قطعة نقد مرتين ، اوجد الفضاء العيني لهذه التجربه ثم اعط مثال على حادث بسيط ، حادث مركب وحادث اكيد ؟ <u>ملاحظه:</u> سيتم الرمز بالحرف h للصورة، والحرف t للكتابة
<u>الحل:</u>

S={(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}
A={(H,H)} **حادث بسيط**
B={(T,H),(T,T)} **حادث مركب**
C= S **حادث اكيد**

<u>تمرين:</u> في تجربة القاء قطعة نقد وحجر نرد اوجد الفضاء العيني لهذه التجربه ثم اعط مثال على حادث بسيط وحادث مركب؟

المحاضرة الثانية – الأسبوع الأول

طرق العد

مقدمة:

قبل البدء بدراسة مفهوم الاحتمال النسبي ولاعتماده بشكل اساسي على عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية, فلا بد من معرفة الطرق التي تساعدنا على ذلك. وهنالك اربعة طرق للعد سنتعرف عليها على النحو الآتي:

أولا: قاعدة الضرب

إذا كانت التجربة E_1 تحدث في n_1 الطرق وكانت التجربة E_2 تحدث في n_2 من الطرق, فإن التجربتين معا تحدثان في n_1n_2 من الطرق.

مثال: إذا أراد طالب أن يسجل في مقررين احدهما في قسم الاحصاء والآخر من قسم المحاسبة, فإذا كان عدد المقررات لقسم الاحصاء هو 3 وعدد المقررات من قسم المحاسبة هو 4, فما عدد الطرق التي يمكن أن يسجل الطالب فيها؟

الحل: عدد الطرق = $3 \times 4 = 12$ طريقة.

ملاحظة: يمكن تعميم القاعدة لتشمل k من التجارب.

مثال: كم هاتفا يمكن تركيبه في مدينة الدمام إذا تألف رقم الهاتف من أربعة أرقام بشرط أن يكون الرقم الأول من اليسار أوله العددين 8 أو 9؟

الحل: عدد الهواتف = $10 \times 10 \times 10 \times 2 = 2000$ طريقة.

(لاحظ أن العدد الأول له طريقتان فقط لاختياره أما باقي المنازل فله 10 طرق لاختيارهم هي عباره عن الاعداد من 0 إلى 9).

ثانيا: قاعدة الجمع

إذا كانت تجربة ما تحدث في n_1 من الطرق وكانت تجربة أخرى تحدث في n_2 من الطرق بحيث كان من المعلوم أن التجربتين لا تحدثان معا (مانعتان لبعضهما البعض) فإن واحدة منهم أو الاخرى تحدث في n_1+n_2 من الطرق.

مثال: أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الاحصاء أو قسم المحاسبة, بحيث كان عدد المقررات في قسم الاحصاء 3 وفي قسم المحاسبة 4, فما عدد الاختيارات لديه؟

الحل: عدد الطرق = $3 + 4 = 7$ طرق.
ملاحظة: يمكن تعميم قاعدة الجمع لتشمل k من التجارب.

ثالثا: التباديل Permutations

التباديل هي طرق ترتيب جميع أو بعض عناصر مجموعة ما.

مثال: ما عدد طرق ترتيب جميع الاحرف a, b, c؟

الحل: لاحظ أنه لدينا ثلاثة اماكن لنملأها من الاحرف الثلاثة حيث يمكن اختيار ثلاثة احرف للمكان الأول أما المكان الثاني فيتبقى لدينا حرفان لملء المكان واخيرا يبقى حرف واحد لملء المكان الأخير وبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على:

عدد الطرق = $3 \times 2 \times 1 = 6$ طرق

وبشكل عام, لدينا الحالات الثلاث التالية:

1- يمكن ترتيب n من العناصر المختلفة بطرق عددها

$$nPn = n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3\times2\times1$$

وهذا هو عدد تباديل n من العناصر المميزة.

(ملاحظة: تسمى العملية "n!" بمضروب العدد n وهو عبارة عن n×(n-1)×(n-2)×....×3×2×1. ومثال عليها (4! = 4×3×2×1 = 24).

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب احرف كلمة "تقوى" ؟

الحل: عدد الطرق يساوي

$$4P4 = 4\times3\times2\times1 = 24$$

2- في حالة وجود لدينا n من العناصر فيها n_1 من العناصر المتماثلة و n_2 من العناصر المتماثلة والمختلفة عن الاولى وهكذا لغاية k من العناصر المتماثلة, فإن عدد التباديل في هذه الحالة يصبح على النحو الآتي:

$$nPn = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

مثال: ما عدد تباديل احرف كلمة "سلسبيل"؟

الحل: عدد الطرق يساوي

$$6P6 = \frac{6!}{2!\times2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 180$$

لاحظ أن حرف "س" تكرر مرتين وكذلك حرف "ل" أما بقية الاحرف فتكررت مرة واحدة.

3- في حالة كان لدينا n من العناصر المميزة واردنا ترتيب جزء من هذه العناصر وليكن r, ففي هذه الحالة يكتب قانون التباديل على الصورة التالية:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: ما عدد تباديل حرفين من كلمة "تاريخ"؟

الحل: لاحظ أن عدد احرف كلمة "تاريخ" هو 5 وبذلك تصبح قيمة n=5 أما r= 2 كما هو مطلوب في السؤال وبذلك تصبح عدد الطرق تساوي

$$5P2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 20$$

<u>رابعا: التوافيق Combinations</u>

التوافيق هي الطرق التي نختار بها عددا معينا من عناصر مجموعة معينة دون النظر الى الترتيب.

مثال: ما عدد الطرق التي نختار بها حرفين من الحروف A, B, C دون الاهتمام بالترتيب؟

الحل: الاختيارات هي {A,B}, {A,C},{B,C} وبذلك يكون لدينا 3 طرق.

وبشكل عام, عدد الطرق التي نختار بها r عنصر من مجموعة فيها n من العناصر بغض النظر عن الترتيب هو عدد توافيق n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة ويعطى بالصيغة التالية:

$$nCr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال: صف فيه 10 طلاب, بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من 3 طلاب دون النظر الى الترتيب؟

الحل:

$$10C3 = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1\times3\times2\times1} = 120$$

مثال: صندوق فيه 5 كرات حمراء و 7 كرات بيضاء.

أ) بكم طريقة نختار 4 كرات من الصندوق؟

ب) بكم طريقة تختار الكرات الأربع بحيث تكون فيها واحدة حمراء وثلاث كرات بيضاء؟

الحل:

أ) من قاعدة التوافيق, عدد طرق اختيار 4 كرات من الصندوق يساوي

$$12C4 = \frac{12!}{(12-4)! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

ب) عدد طرق اختيار كرة واحدة من الكرات الحمراء هو

$$5C1 = \frac{5!}{4! \times 1!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$$

اما عدد طرق اختيار 3 كرات بيضاء فهو

$$7C3 = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

إذن, من قاعدة الضرب, عدد طرق اختيار كرة واحدة وثلاث كرات بيضاء هو

$$5 \times 35 = 175$$

تمارين:

1- بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة "MISSISSPPI"؟

2- بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من العدد 3159

أ- مع الترتيب؟

ب- بدون ترتيب؟

المحاضرة الثالثة – الأسبوع الثاني

نظرية الاحتمالات

مقدمة: مفهوم الاحتمال

هنالك عدة طرق متعددة يمكن من خلالها تقديم مفهوم الاحتمال منها:

1- طريقة الرأي الشخصي:
وهي تعتمد على التقدير الشخصي للفرد والذي يرغب بتعيين احتمال حدوث حادث ما, كأن يقول احتمال حصوله على تقدير مرتفع لمقرر الاحصاء للإدارة نظرا للجهد الذي بذله في دراستها.

2- طريقة التكرار النسبي:
ويعرف بأنه إذا تكرر إجراء تجربة احصائية n من المرات تحت نفس الظروف وكان عدد المرات التي تؤدي إلى حدوث الحادث A يساوي n(A), فإن التكرار النسبي لهذا الحادث هو $\frac{n(A)}{n}$, وإذا كبرت n بدون حدود وكانت n(A) تكبر معها بحيث يؤول التكرار النسبي في النهاية إلى عدد ثابت, وليكن P فعندئذ تقول أن احتمال الحادث A هو العدد P.

مثال: عند رمي قطعة نقد عدد معين من المرات بحيث يتم تسجيل ظهور الصورة فيها, نلاحظ أن التكرار النسبي يقترب من $\frac{1}{2}$ عند رمي قطعة النقد عدد كبير جدا من المرات. ونقول بأن احتمال ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة نقد منتظمة = $\frac{1}{2}$.

مثال: إذا كان طلبة إحدى الكليات موزعين على التخصصات المختلفة فيها حسب الجدول التالي:

عدد الطلبة	التخصص
320	إدارة أعمال
480	محاسبة
300	تسويق
500	علوم مالية ومصرفية

إذا قام احد المدرسين بمقابلة أحد الطلبة, فما هو احتمال أن يكون من قسم المحاسبة؟

الحل:

التكرار النسبي لطلبة تخصص المحاسبة يساوي

$$\frac{480}{320+480+300+500}=0.3$$

أن مفهوم التكرار النسبي يقودنا إلى تقديم التعريف التالي:

فضاء العينة ذو النقط المتساوية إمكانية الحدوث: إذا احتوى الفضاء العيني على عدد من النقاط n بحيث كانت فرصة الحصول على أي نتيجة بسيطة مساوية على أية نتيجة بسيطة أخرى فإنه يقال أن الفضاء العيني S فيه n من النقط إمكانية الحدوث ويكون كل حادث بسيط منفصلا عن أي حادث آخر بحيث يكون احتمال حدوث كل حادث مساويا للحادث الآخر. ومن هذا نحصل على النتيجة التالية: إذا احتوى حادث A على عدد من النقط n(A), فإن احتمال هذا الحادث هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n}=\frac{\text{عدد عناصر الحادث } A}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$$

مثال: في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات, أوجد احتمال كل من الحوادث التالية:

1- إذا كان الحادث A يمثل ظهور الصورة (H) مرتين على الاقل؟
2- إذا كان الحادث B يمثل ظهور الاوجه الثلاث متشابهة؟

لحل: لاحظ أن عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة تكتب كما يلي:

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني يساوي 2×2×2= 8 (من قاعدة الضرب).

1- $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

لاحظ أن الحوادث التي ظهرت الصورة فيها مرتين على الاقل هي (H,H,H),(H,H,T),((T,H,H),(H,T,H)

2- $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

لاحظ ظهور الاوجه الثلاث متشابه في حادثين.

قوانين الاحتمالات:

في هذا البند سنورد القوانين الأولية في الاحتمال وهي:

نظرية (1):

1- إذا كان لدينا المجموعة الخالية ورمزها $\emptyset$ فإن احتمال هذه المجموعة يساوي صفر. بالرموز
$P(\emptyset) = 0$
2- إذا كان لدينا المجموعة الكلية ورمزها S فإن احتمال هذه المجموعة يساوي 1. بالرموز
$P(S) = 1$
3- احتمال أي حادث E من الفضاء العيني S يكون محصور بين الصفر والواحد. بالرموز
$0 \leq P(E) \leq 1$

نظرية (2): إذا كان A حادثا في S, وكان $\bar{A}$ هو متممة ذلك الحادث فإن

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال: إذا كان احتمال نجاح طالب في مادة المحاسبة ما هو 80%, فما احتمال عدم نجاحه في تلك المادة؟

الحل:

بفرض اننا رمزنا لنجاح الطالب في مادة المحاسبة بالرمز A, فإن احتمال عدم نجاحه يساوي

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.80 = 0.20$$

مثال: إذا كان احتمال وصول طالب الى محاضراته في الوقت المحدد هو 0.75, فما احتمال وصول الطالب متأخرا؟

الحل:

نفر أن A = وصول الطالب على الموعد المحدد

$\bar{A}$ = وصول الطالب متأخرا

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.75 = 0.25$$

نظرية (3):

إذا كان A,B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى هو 0.30 وغيابه عن المحاضرة الثانية هو 0.15 واحتمال غيابه عن المحاضرة الأولى والثانية يساوي 0.20, اجب عن الاسئلة التالية:

أ) ما احتمال غياب الطالب عن احد المحاضرتين على الأقل؟

ب) ما احتمال عدم غياب الطالب عن أي من المحاضرتين؟

ج) ما احتمال حضور الطالب للمحاضرة الأولى؟

الحل:

نفرض أن A تمثل الغياب عن المحاضرة الأولى ونفرض أن B تمثل الغياب عن المحاضرة الثانية. وبذلك فأن $A \cap B$ يمثل الغياب عن كلا المحاضرتين.

أ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.30 + 0.15 - 0.20 = 0.25$

ب) عدم غياب الطالب عن أي محاضرتين يعني أنه حضر المحاضرتين, وهذا يعني متممة الحادث" غياب الطالب عن إحدى المحاضرتين على الأقل" أي أنه متممة $(A \cup B)$ ومن قانون المتممة

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.25 = 0.75$$

ج) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.30 = 0.70$

مثال: إذا كان $P(A)=0.5$, $P(B)=0.8$, $P(A \cup B) = 0.9$. أوجد

أ) $P(A \cap B)$

ب) $P(\bar{A})$

ت) $P(\overline{A \cap B})$

الحل:

أ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0.9 = 0.5 + 0.8 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 1.3 - 0.9 = 0.4$

ب) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

ث) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$

ملاحظة: في حال كان الحادثين A, B حادثين منفصلين, فإن تقاطعهما = Ø وبذلك تصبح النظرية (3) على الصورة

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: إذا كان P(A) =0.3 , P(B) =0.4 بحيث كان الحادثين A, B حادثين منفصلين, فأوجد احتمال حدوث الحادث A أو حدوث الحادث B؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

<u>لاحظ أن احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B أو حدوث احدهما على الاقل تعني $P(A \cup B)$ أما في حال السؤال عن احتمال حدوث الحادث A والحادث B أو حدوث كليهما معا فهذا يعني $P(A \cap B)$</u>

نظرية (4): إذا كان A, B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

أ) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

ب) $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

وهذا يعني أن احتمال حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B في نفس الوقت يساوي احتمال حدوث A ناقصا احتمال حدوث الأثنين معا. ومثل هذا ينطبق على فرع (ب).

مثال: إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.9 واحتمال حضور مساعده في ذلك اليوم هو 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الأقل يساوي 0.97, أوجد احتمال:

1- حضور المدير ومساعده؟
2- حضور المدير وحده؟
3- حضور المساعد وحده؟

الحل: نعبر عن حضور المدير بالحادث A, وحضور المساعد بالرمز , وحضور احدهما على الأقل بالرمز $A \cup B$

1) من نظرية رقم 3 نجد أن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.97 \quad = 0.90 \quad + 0.95 \; - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$$

2) حضور المدير وحده تعني أن المدير حضر وغياب مساعد, وهذا يعني حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.90 - 0.88 = 0.02$$

3) حضور المساعد وحده تعني أن المساعد حضر والمدير غاب, حدوث B وعدم حدوث A.

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.95 - 0.88 = 0.07$$

تمارين:

في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين, أوجد احتمال ما يلي:

1- ظهور عددين متشابهين
2- ظهور عددين مختلفين
3- ظهور عددين مجموعهما أكبر من 12؟
4- ظهور عددين بحث يكون الأول عدد فردي؟

المحاضرة الرابعة – الأسبوع الثاني

نظرية الاحتمالات

قوانين ديمورغان De Morgan's Laws

من خواص العمليات الجبرية على المجموعات ما يسمى بقوانين ديمورغان والتي تنص على أن

$$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ومنها نستنتج أن:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

مثال: إذا كان P(A)=0.3 ,P(B)=0.4 ,$P(A \cup B) = 0.5$

أوجد ما يلي:

1- احتمال حدوث الحادثين معا؟
2- عدم حدوث أي من الحادثين A ,B؟
3- عدم حدوث الحادث A أو الحادث B؟
4- حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B؟
5- حدوث الحادث B وعدم حدوث الحادث A؟
6- احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B إذا كان A ,B حادثين منفصلين؟

الحل:

1- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A \cap B)$

$\longrightarrow P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2$

2- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$

3- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

4- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$

5- $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$

6- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$

الاحتمال الشرطي Conditional Probability

يعرف الاحتمال الشرطي على انه احتمال وقوع الحدث A مشروطا بوقوع حادث آخر وليكن B, ويرمز للاحتمال الشرطي بالرمز $P(A/B)$ ويعرف كالآتي:

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0}$$

وكذلك يمكن تعريف الاحتمال الشرطي للحادث B مشروطا بحدوث الحادث A على النحو الآتي:

$$\boldsymbol{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0}$$

مثال: رميت قطعة نقد ثلاث مرات, فإذا رمزنا لظهور الصورة بالحرف H وظهور الكتابة بالحرف T. إذا علم أن الوجه الأول في الرمية الأولى H فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H,H؟

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

نفرض أن A يمثل الحادث " ظهور H في الرمية الأولى"

B تمثل الحادث ظهور الوجهان H,H في الرمية الثانية والثالثة.

المطلوب: $P(B/A)$؟

بالنظر إلى فضاء العينة S فإن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

وكذلك

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

ومن قانون الاحتمال الشرطي, نحصل على

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

<u>سؤال: اعتمادا على المثال السابق, إذا علمت أن الوجه الأول كان T فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H,T؟</u>

قاعدة الضرب Multiplication Rule

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B)P(A/B)}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B/A)}$$

حيث يطلق على هذه القوانين ما يسمى بقوانين الضرب ويستفاد منها في احتساب احتمالات التقاطع إذا علمنا أن الاحداث مشروطة بعضها ببعض.

مثال: إذا كان P(A)=0.6 ,P(B)=0.3, وكان P(A/B)=0.4 أوجد

أ) $P(A \cap B)$

ب) $P(B/A)$

الحل:

أ) من قاعدة الضرب

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

ب) من قانون الاحتمال الشرطي

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2$$

الحوادث المستقلة Independent Events

تعريف: يقال بأن الحادثان A, B حادثان مستقلان إذا كان حصول احدهما لا يؤثر على حدوث الآخر, أي أن:

$$P(A/B) = P(A)$$

لاحظ أن حدوث A لا يتأثر بوجود الحادث B, وكذلك

$$P(B/A) = P(B)$$

وبتعويض هذه القيم في قانون الاحتمال الشرطي

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)},$$

نحصل على

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال: إذا كان A, B حادثين مستقلين وكان P(A)=0.4, P(B)=0.6

أوجد:

1- $P(A \cap B)$

2- $P(\overline{A \cap B})$

الحل: بما أن الحادثين مستقلين, إذن

$$1 - \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$$

$$2 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.24 = 0.76$$

مثال: إذا كان P(A)=0.6, P(A/B)=0.6, P(B/A)=0.5, هل الحادثان A, B مستقلان؟ وما احتمال الحادث B؟

الحل:

بما أن P(A/B) = P(A) = 0.6 فإن A, B حادثان مستقلان. ومن ذلك نجد أن

P(B)=P(B/A) =0.5.

تمرين: إذا كان P(A)= 0.7, P(B)=0.8

أوجد ما يلي:

1- $P(A \cup B)$ **إذا اكان A, B حادثين مستقلين؟**

2- $P(A \cup B)$ **إذا كان A, B حادثين منفصلين؟**

3- $P(\overline{A \cap B})$ **إذا كان حادثين مستقلين؟**

4- **P(A/B) إذا اكان A,B حادثين مستقلين؟**

5- **P(B/A) إذا كان A, B حادثين منفصلين؟**

تمرين المحاضرة الثانية

1- بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة "MISSISSPPI"؟

2- بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من العدد 3159

أ- مع الترتيب؟

ب- بدون ترتيب؟

تمرين المحاضرة الثالثة

في تجرية القاء حجر نرد منتظم مرتين, أوجد احتمال ما يلي:

1- ظهور عددين متشابهين

2- ظهور عددين مختلفين

3- ظهور عددين مجموعهما أكبر من 12؟

4- ظهور عددين بحث يكون الأول عدد فردي؟

تمرين المحاضرة الرابعة

إذا كان $P(A)= 0.7$, $P(B)=0.8$

أوجد ما يلي:

1- $P(A \cup B)$ إذا اكان A, B حادثين مستقلين؟

2- $P(A \cup B)$ إذا كان A, B حادثين منفصلين؟

3- $P(\overline{A \cap B})$ إذا كان حادثين مستقلين؟

4- $P(A/B)$ إذا اكان B,A حادثين مستقلين؟

5- $P(B/A)$ إذا كان A, B حادثين منفصلين؟

المحاضرة الخامسة – الأسبوع الثالث

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

❑ مقدمة

في كثير من الاحيان تكون نتائج تجربة ما قياسات وصفية أو نوعية, مثل الفضاء العيني لتجربة القاء قطعة نقد مرة واحدة إما H وإما T وهي قياسات نوعية أما في تجربة إلقاء حجر نرد فتكون النتائج الاعداد من 1 إلى 6 وتكون النتائج في هذا الفضاء العيني نتائج قياسية (كميات عددية). وفي جميع هذه الأنواع من التجارب التي تكون النتائج فيها قياسات نوعية أو قياسات كمية فإننا سنقوم بربط كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني لتجربة احصائية بقيمة عددية من خلال تعريف اقترانات حقيقية على نقاط فضاء العينة وبالتالي اعطاءنا المجال الأوسع لدراسة اوسع وطرح اسئلة اكثر حول نتائج أي تجربة عشوائية.

❑ المتغير العشوائي Random Variable

تعريف: المتغير العشوائي X هو اقتران حقيقي يعرف على فضاء العينة بحيث يعين قيمة عددية لكل نتيجة بسيطة فيه, ويرمز له بحرف لاتيني كبير X, Y ... ولأي قيمة لذلك المتغير بحرف صغير x, y ...

مثال: عرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات؟

الحل:

قيمة X	عناصر الفضاء العيني
3	HHH
2	HHT
2	HTH
1	HTT
0	TTT
1	TTH
1	THT
2	THH

نلاحظ ان كل نتيجة بسيطة من عناصر الفضاء العيني تأخذ قيمة واحدة معينة حيث البعض منها يتشابه في ذلك العدد وبذلك نستطيع اعادة تنظيم النتائج السابقة على الصورة التالية:

قيمة X	النتيجة
3	{HHH}
2	{THH ,HTH ,HHT}
1	{THT ,TTH ,HTT}
0	{TTT}

إن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X تسمى فضاء X والمجموعات الجزئية لهذا الفضاء تسمى حوادث نعبر عنها بدلالة X. ففي المثال السابق تكون الحوادث {X=0}, {X=1}, {X=2},{X=3} .

مثال: اعتمادا على المثال السابق عرف المتغيرات العشوائية التالية:

أ) المتغير العشوائي Y يمثل الفرق المطلق بين عدد H وعدد T؟

ب) المتغير العشوائي Z يمثل عدد H ناقصا عدد T؟

الحل:

أ)

قيمة Y	الحادث المقابل
1	{TTH, THT, THH, HTH, HHT, HTT}
3	{TTT ,HHH}

ب)

قيمة Z	الحادث المقابل
-3	{TTT}
-1	{HTT,THT, TTH}
1	{HHT, HTH, THH}
3	{HHH}

❑ **أنواع المتغيرات العشوائية**

يقسم المتغير العشوائي إلى قسمين:

1- المتغير العشوائي المنفصل (Discrete): وهو المتغير الذي يأخذ قيما إما محدودة أو لانهائية محدودة بمعنى أنه يمكن ربط قيمه واحدا لواحد مع مجموعة من الاعداد الصحيحة. ومن الامثلة عليه عدد أفراد الأسرة, عدد المواليد ...

2- المتغير العشوائي المتصل:(Continuous): وهو المتغير الذي يأخذ جميع القيم في فترة ما ومن الامثلة على ذلك درجة الحرارة, وزن الأنسان ...

نلاحظ أن كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X يقابله حادث أو مجموعة من الحوادث من فضاء العينة S وبالتالي يمكن تعيين احتمالا لهذا الحادث بدلالة المتغير العشوائي مساويا لاحتمال الحادث في فضاء العينة S. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال: في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات حيث يمثل X عدد مرات ظهور الصورة H, أوجد

1- P(X=3)

2- P(X=2)؟

الحل:

1- نلاحظ أن X=3 يقابل الحادث HHH وبالتالي

$$P(X=3) = \frac{1}{8}$$

2- في حالة X=2 فنلاحظ أن الحوادث التي تقابل هذه القيمة هي {HHT, HTH, THH} وبالتالي

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

ويمكننا وضع جدول يعطينا قيم X والاحتمالات المقابلة لها كما في الجدول التالي:

قيمة X	P(X=x)
3	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{8}$

تمرين: فى تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين, إذا كان المتغير العشوائى X يمثل مجموع العددين الظاهرين, عرف ذلك المتغير واحتمال كل منها؟

الجدول السابق يقودنا الى التعريف التالي.

❑ التوزيع الاحتمالي المنفصل Discrete Probability Distribution

تعريف: كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعا احتماليا منفصلا أو اقتران احتمالي, بحيث يحقق الشرطين التاليين:

1- احتمال كل قيمة من قيم X عدد غير سالب.

2- مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X تساوي 1.

وإذا عبرنا بالرمز $f(x)$ للاحتمال P(X=x) فإن الشرطين السابقين يصبحان على الصورة:

$f(x) \geq 0,$ x لجميع قيم

$\sum f(x) = 1,$ x لجميع قيم

مثال: هل تمثل المعادلة

$$f(x) = \frac{x}{15}; x = 1,2,3,4,5$$

$f(x) = 0;$ لغير ذلك

توزيعا احتماليا منفصلا؟

الحل:

لاحظ أن الشرط الأول متحقق لجميع قيم X. أما مجموع قيم $f(x)$ فهي:

$$\sum_{1}^{5} f(x) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

إذن, $f(x)$ توزيع احتمالي حقق الشرطين الاول والثاني.

يمكن وضع المعادلة السابقة على شكل جدول على الصورة:

x	1	2	3	4	5	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

مثال: أوجد قيمة a في الجدول التالي والتي تجعل ذلك الجدول يمثل توزيعا احتماليا واحسب احتمال X اكبر من 4 واحتمال X أقل من أو تساوي 4؟

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	a	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

الحل:

بما أن $\sum f(x) = 1$ فإن:

$$a + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

وبتوحيد المقامات نجد أن

$$a = 1 - \frac{14}{20} = \frac{20}{20} - \frac{14}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

ولإيجاد احتمال X أكبر من 4:

$$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

أما لإيجاد احتمال X أقل من أو يساوي 4:

$$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{3}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

المحاضرة السادسة – الأسبوع الثالث

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي Mathematical Expectation

تعريف: التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل الذي اقترانه الاحتمالي $f(x)$ هو المقدار التالي:

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$$

مثال: أوجد التوقع الرياضي للمتغير X والذي توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي:

X	$f(x)$	$xf(x)$
3	0.3	0.9
4	0.2	0.8
5	0.2	1.0
6	0.1	0.6
7	0.2	1.4

الحل: من خلال ضرب القيمة x في $f(x)$ كما هو موضح في العمود الثالث وبعملية الجمع نحصل على

$$\mu = E(X) = 4.7$$

مثال: أوجد توقع X إذا كان

$$f(x) = \frac{x}{15}; x = 1,2,3,4,5$$

$$f(x) = 0 \quad \text{لغير ذلك}$$

الحل:

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) = 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15}$$

$$= \frac{1+4+9+16+25}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

خواص التوقع الرياضي

نظرية (1): لكل متغير عشوائي X, إذا كان a, b عددين ثابتين فإن:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

وهذا يعني أنه إذا ضرب المتغير العشوائي بعدد ثابت وليكن a, وأضيف له عددا ثابتا آخر وليكن b فإن التوقع الرياضي يتأثر بنفس الطريقة فيصبح بعد التعديل مساويا للتوقع الاصلي مضروبا في a ومضافا إليه العدد b.

مثال: إذا كان E(X)=6 , أوجد

1- E(3X+5)

2- E(0.5X – 2)

الحل:

1- E(3X+5)=3× 6+5 = 23

2- E(0.5X – 2)=0.5× 6 – 2 =1

مثال: إذا كان $E(X) = 10$ وكان $E(aX + 5) = 25$, اوجد قيمة a؟

الحل:

$E(aX+b)=aE(X)+b = a \times E(X) + b = a \times 10 + 5 = 25 \longrightarrow 10a = 20 \longrightarrow a = 2$

تمرين: اعتمادا على الجدول التالي والذي يمثل توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي x

x	*f*(*x*)
1	0.3
2	0.4
3	0.1
4	a

أوجد:

1- قيمة المجهول a
2- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي x
3- E(2X + 10)؟

تباين المتغير العشوائي X

تعريف: إذا كان μ توقع المتغير العشوائي X فإن تباين X ويعبر عنه بالرمز σ^2 بالصيغة التالية:

$$\sigma^2 = \sum_x (X-\mu)^2 f(x)$$

مثال: جد تباين X إذا كان توزيعه الاحتمالي كما يلي:

x	*f*(*x*)
10	$\frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{4}$
30	$\frac{1}{4}$
40	$\frac{1}{4}$

الحل:

نجد أولا توقع X كما يلي:

$$\mu = E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} + 30 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} = 25$$

ولحساب التباين, نجد أن:

$$\sigma^2 = \sum_x (X-\mu)^2 f(x)$$

$$= (10-25)^2 \times \frac{1}{4} + (20-25)^2 \times \frac{1}{4} + (30-25)^2 \times \frac{1}{4} + (40-25)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{225+25+25+225}{4} = 125.$$

أما الجذر التربيعي الموجب للتباين فيسمى الانحراف المعياري ويعبر عنه بالرمز σ حيث نلاحظ أن الانحراف المعياري للمثال السابق هو

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{125}$$

خواص التباين:

إذا اكان X متغيرا عشوائيا منفصلا معدله μ وتباينه σ_x^2 وكان لدينا التحويل $Y = aX + b$ حيث a, b ثابتان فإن

$$\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_x^2$$

اما الانحراف المعياري للمتغير Y فهو

$$\sigma_Y = |a| \sigma_Y$$

مثال: إذا كان للمتغير X, $\mu_x = 50$, $\sigma_x^2 = 16$ أوجد معدل Y وتباينه وانحرافه المعياري إذا كان Y=3X – 4؟

الحل:

$$\mu_Y = E(3X-4) = 3\mu_X - 4 = 3 \times 50 - 4 = 146$$

$$\sigma_Y^2 = 3^2 \times \sigma_X^2 = 9 \times 16 = 144$$

$$\sigma_Y = \sqrt{144} = 12$$

توزيعات احتمالية خاصة

هنالك كثير من المتغيرات العشوائية التي شاع استعمال توزيعاتها الاحتمالية بحيث من المفيد دراسة كل منها على حدة, ومن هذه التوزيعات

1- توزيع ذات الحدين Binomial Distribution

في كثير من التجارب تكون النتيجة أحد الامرين إما نجاح أو فشل, وتتألف هذه التجارب من تكرار وإعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض, فمثلا في تجربة القاء قطعة نقد فإن النتيجة إما ظهور صورة أو كتابة وتكون نتيجة اي محاولة مستقلة عن الأخرى وهكذا. إن هذه المحاولات تسمى محاولات بيرنوللي.

تعريف: محاولات بيرنوللي Bernoulli Trials:

كل تجربة تحقق الشروط التالية تسمى محاولات بيرنوللي:

1. نتيجة كل محاولة أحد الأمرين, نسمي "احدها" نجاح والأخرى "بالفشل"
2. نتيجة كل محاولة مستقلة عن أي المحاولة الأخرى.
3. احتمال النجاح في كل محاولة عدد ثابت يرمز له بالرمز P وبذلك فإن احتمال الفشل هو $q=1-p$

ومن الأمثلة على هذه التجارب: فحص مجموعة من المصابيح الكهربائية, فحص مجموعة من الطلاب لمعرفة حاجته إلى نظارات طبية ...

تعريف: إذا اجريت تجربة بيرنوللي n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة p وكان X يمثل عدد النجاحات في المحاولات كلها فإن:

$$P(X=x) = nCx \times p^x \times (1-p)^{n-x};\ x=0,1,2,\dots,n$$

وهذا هو التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ويرمز له بالرمز b(x;n;p).

مثال: رميت قطعة نقد متزنة أربع مرات, جد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة ثم اوجد احتمال ظهور الصورة اربع مرات؟

الحل:

إن هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين حيث أن n=4, $p=\frac{1}{2}$, ومنها

$$b(x;4;\tfrac{1}{2}) = P(X=x) = 4Cx \times (\tfrac{1}{2})^x \times (1-\tfrac{1}{2})^{4-x};\ x=0,1,2,\dots$$

وعند $X=4$, ينتج أن:

$$b(4;4;\tfrac{1}{2}) = P(X=4) = 4C4 \times (\tfrac{1}{2})^4 \times (1-\tfrac{1}{2})^{4-4} = 1 \times (\tfrac{1}{2})^4 \times (\tfrac{1}{2})^0 = \frac{1}{16}$$

ويمكن حساب احتمال عدم ظهور الصورة $P(X=0)$ أو ظهور الصورة مرة واحدة $P(X=1)$ وهكذا.

تمرين 1: رميت زهرة نرد منتظمة ثلاث مرات, ما احتمال عدم ظهور العدد 6 فيها, ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرات؟

تمرين 2: في تجربة ذات الحدين, إذا كان $n = 15$, $p=0.1$ أوجد $P(X \leq 2)$ حيث X يمثل عدد النجاحات؟

خواص التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ذات الحدين:

نظرية: إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذات الحدين $b(x; n; p)$ فإن:

1) توقع X هو $\mu = E(X) = np$
2) تباين X هو $\sigma^2 = npq$

مثال: ما هو التوقع الرياضي والتباين لمتغير ذات الحدين إذا كان $n=60$, $p = \frac{2}{3}$

الحل:

$$\mu = E(X) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$$

$$\sigma^2 = npq = 60 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$$

2- **توزيع بواسون: Poisson Distribution**

إن التجارب التي تعطينا عدد النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة تسمى بواسون. والفترة الزمنية قد تكون دقيقة أو يوما أو أسبوعا أو شهرا أو غير ذلك أما المنطقة المحددة فقد تكون صفحة كتاب أو مترا مربعا أو غير ذلك.

وبشكل عام, تجربة بواسون تحقق الشروط التالية:

1- معدل النجاحات التي تحدث في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة معلوم وليكن λ.
2- احتمال حدوث نجاح حادث واحد في فترة زمنية قصيرة أو منطقة زمنية صغيرة يتناسب مع طول تلك الفترة أو مساحة تلك المنطقة.
3- احتمال حدوث نجاحين أو اكثر في فترة زمنية قصيرة أو منطقة صغيرة مهمل.
4- حدوث النجاحات في أي فترة زمنية مستقل عن حدوث أي نجاحات أخرى في عدة فترات زمنية منفصلة.

ـــ تعريف: توزيع بواسون

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بواسون X الذي يمثل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة هو

$$P(x; \lambda) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; x = 0,1,2, \ldots$$

حيث λ هي معدل النجاحات في الفترة الزمنية المعينة أو المنطقة المحددة. $e = 2.718$.

مثال: تصل المكالمات الهاتفية إلى مقسم أحد المستشفيات بمعدل مكالمة واحدة في الدقيقتين.

ما احتمال وصول كل من الحوادث التالية:

أ) صفر مكالمة في أربع؟
ب) 4 مكالمات في فترة أربع دقائق؟

الحل:

نفرض أن X = عدد المكالمات في فترة أربع.

إذن $\lambda = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

إن X يتبع توزيع بواسون الذي معدله $\lambda = 2$ وينتج أن

أ) عدم وصول أي مكالمة في اربع دقائق هو:

$$P(0;2) = P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} = e^{-2} = 0.1353$$

ب) وصول أربع مكالمات في اربع دقائق هو

$$P(4;2) = P(X = 4) = \frac{e^{-2}2^4}{4!} = \frac{16}{24}e^{-2} = 0.0902$$

تمرين: معدل حوادث السيارات عند اشارة ضوئية 3 في الأسبوع الواحد. ما احتمال عدم حدوث أي حادث في اسبوع معين, ما احتمال حدوث حادثين أو اقل في اسبوع معين؟

خواص التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون:

نظرية: إذا كان X متغير بواسون العشوائي الذي توزيعه الاحتمالي $P(x;\lambda)$ حيث λ معدل عد د الحوادث في فترة زمنية معينة فأن توقع X هو E(X) = λ وتباين X هو $\sigma_x^2 = \lambda$

مثال: ما هو التوقع الرياضي والانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون إذا كان $\lambda = 25$ ؟

الحل:

$$E(X) = 25, \quad \sigma_x = 5$$

لأحظ أن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

المحاضرة المباشرة الأولى – الأسبوع الرابع

مراجعة عامة (الباب الأول والثاني)

الباب الأول: نظرية الاحتمالات

- ❑ طرق العد
  - ○ طريقة الضرب
  - ○ طريقة الجمع
  - ○ التباديل
  - ○ التوافيق

- كم عدد عناصر الفضاء العيني في تجربة القاء قطعتي نقد وحجر نرد؟

الحل:

عدد عناصر الفضاء العيني = 2 × 2 × 6 = 24 عنصراً.

- سؤال: بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائبه من بين 20 شخصا؟

الحل:

لاحظوا أن عملية الترتيب في هذا السؤال ضرورية حيث أن اختيار الأول رئيس (فرضاً احمد) والثاني (فرضاً خالد) يختلف عن اختيار خالد أولا كرئيس واحمد ثانيا كنائب. وبذلك فإن عدد الطرق يساوي

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$20P2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{18!} = 20 \times 19 = 380$$

- سؤال: كم عدد المباريات التي ستقام بين مجموعة مكونة من أربع فرق بحيث يلعب كل فريقين مباراة واحدة فقط؟

الحل:

لاحظ أن عملية الترتيب غير مهمة حيث أن كل فريق سيلعب مباراة واحدة مع الفريق الآخر, وبذلك يكون الحل هو

$$4C2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 6$$ مباريات.

❑ نظرية الاحتمالات

سؤال: عند القاء قطعة النرد المنتظمة مرة واحدة, اوجد:-

1- احتمال ظهور عدد يقسم على أربعة بدون باقي.
2- احتمال ظهور عدد فردي.
3- احتمال ظهور عدد يزيد عن 8.
4- احتمال ظهور عدد يقل عن 7.

الحل:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

1- لاحظ أنه يوجد عدد واحد فقط يقبل القسمة على 4 وهو العدد 4 نفسه. وبذلك حادث بسيط

$$P(\text{4 عدد يقبل القسمة على}) = \frac{1}{6}$$

2- الاعداد الفردية هي 1, 3, 5 حادث مركب

$$P(\text{عدد فردي}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3- لا يوجد أي عدد يزيد عن العدد 8

$$P(\text{8 عدد يزيد عن}) = 0$$

4- الاعداد التي تقل عن 7 هي من 1 إلى 6 (الفضاء العيني)

$$P(\text{7 عدد يقل عن}) = 1$$

سؤال: اظهر تصنيف لطلاب الجامعة أن 10% من الطلاب يدخنون, وأن 30% من الطلاب يشربون القهوة, وأن 5% من الطلاب يدخنون ويشربون القهوة.

1- احسب النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون ولا يشربون القهوة.

2- من بين الطلاب المدخنين, ما هي نسبة الطلاب الذين يشربون القهوة.

3- من بين الطلاب الذين لا يشربون القهوة, ما هي نسبة المدخنين؟

الحل:

نفرض أن الطالب المدخن يمثل الحدث A وأن الطالب الذي يشرب القهوة بالحدث B.

وينتج أن P(A)=0.10 ,P(B)=0.30 ,$P(A \cap B) = 0.05$

1- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$
$1 - [0.10 + 0.30 - 0.05] = 1 - 0.35 = 0.65$

2- $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.10} = 0.5 = 0.50$

3- $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.10 - 0.05}{1 - 0.30} = \frac{0.05}{0.70} = 0.071$

الباب الثاني (المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة)

- التوزيع الاحتمالي المنفصل

تمرين: في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين, إذا كان المتغير العشوائي X يمثل مجموع العددين الظاهرين, عرف ذلك المتغير واحتمال كل منها؟

سؤال: اعتمادا على الجدول التالي والذي يمثل توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي x

x	*f*(*x*)
1	0.3
2	0.4
3	0.1
4	a

أوجد:

1- قيمة المجهول a؟

2- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X؟

3- تباين المتغير العشوائي X؟

4- E(2X + 10)؟

الحل:

1- $0.3 + 0.4 + 0.1 + a = 1 \longrightarrow a = 1 - 0.8 = 0.2$

2- $E(X) = 1\times0.3 + 2\times0.4 + 3\times0.1 + 4\times0.2 = 0.3 + 0.8 + 0.3 + 0.8 = 2.2$

3- $\sigma^2 = (1 - 2.2)^2 \times 0.3 + (2 - 2.2)^2 \times 0.4 + (3 - 2.2)^2 \times 0.1 +$
$(4 - 2.2)^2 \times 0.2 = 0.432 + 0.016 + 0.064 + 0.648 = 1.16$

4- $E(2X+10) = 2E(X) + 10 = 2\times 2.2 + 10 = 14.4$

❑ توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون

تمرين: رميت زهرة نرد منتظمة ثلاث مرات, ما احتمال عدم ظهور العدد 6 فيها, ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرات؟

الحل:

لاحظ أن هذه التجربة تمثل احد تجارب بيرنوللي والتي تتبع توزيع ذات الحدين.

$$P(X=x)=b(x,3,\tfrac{1}{6}) = 3Cx \times (\tfrac{1}{6})^x \times (\tfrac{5}{6})^{3-x}$$

$$P(X=0)=b(0,3,\tfrac{1}{6}) = 3C0 \times (\tfrac{1}{6})^0 \times (\tfrac{5}{6})^{3-0} = 1 \times 1 \times \frac{125}{216} = 0.58$$

$$P(X=3)=b(3,3,\tfrac{1}{6}) = 3C3 \times (\tfrac{1}{6})^3 \times (\tfrac{5}{6})^{3-3} = 1 \times \frac{1}{216} \times 1 = \frac{1}{216}$$

تمرين: في تجربة ذات الحدين, إذا كان $n = 10$, $p=0.1$ أوجد $P(X\le 2)$ حيث X يمثل عدد النجاحات؟

الحل:

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=10C0\times 0.1^0\times 0.9^{10}+10C1\times 0.1^1\times 0.9^9+10C2\times 0.1^2\times 0.9^8$$

تمرين: معدل حوادث السيارات عند اشارة ضوئية 3 في الأسبوع الواحد. ما احتمال عدم حدوث أي حادث في اسبوع معين, ما احتمال حدوث حادثين أو اقل في اسبوع معين؟

الحل:

لاحظ أن هذه التجارب تمثل نموذج من تجاب بواسون, وبالتالي فإنها تنتمي إلى توزيع بواسون حيث

$$P(X=x)=P(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^x}{x!}$$

$$P(X=0)=P(0;3)=\frac{e^{-3}\times 3^0}{0!}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$$

$$P(X\le 2)=P(0;3)+P(1;3)+P(2;3)=\frac{e^{-3}\times 3^0}{0!}+\frac{e^{-3}\times 3^1}{1!}+\frac{e^{-3}\times 3^2}{2!}$$

$$=e^{-3}+3e^{-3}+\frac{9}{2}e^{-3}=e^{-3}[1+3+4.5]=8.5e^{-3}=\frac{17}{2e^3}$$

المحاضرة الثامنة - الاسبوع الخامس

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تعريف: اذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً وكان $f(x)$ اقتراناً حقيقياً يحقق الشرطين التاليين:

1- $f(x) \geq 0$, $-\infty < X < \infty$

2- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

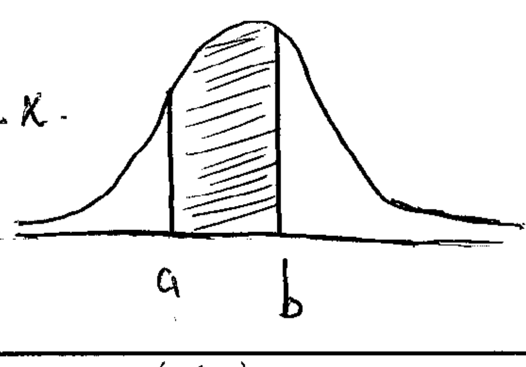
(ان المساحة تحت منحنى $f(x)$ وفوق محور السينات $= 1$).

فإن $f(x)$ يسمى الكثافة الاحتمالية أي التوزيع الاحتمالي المتصل للمتغير X.

ويكون احتمال وقوع X بين قيمتين $x=a$ ، $x=b$ يساوي المساحة تحت منحنى $f(x)$ وفوق المحور الافقي والمحصورة بين a ، b والشكل التالي يوضح ذلك

أي أنه:

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



ومن أنواع التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي سنتعرف عليها في هذا الفصل :-

1 - التوزيع الطبيعي (The Normal Distribution)

ويعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يوصف التوزيع الطبيعي من خلال معادلة رياضية تحدد منحناه وشكله تماماً بمعرفة كل من المعدل μ والتباين σ^2 والتي يمكن كتابتها في الصورة التالية :-

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$-\infty < X < \infty$$

حيث μ : معدل التوزيع ، σ^2 : التباين ، $e \simeq 2.718$ ، $\pi = 3.14$

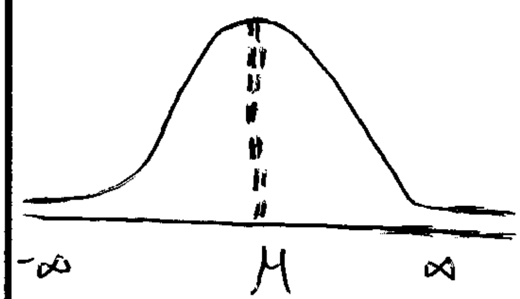
واحتمال الحادث X الذي يقع بين النقطتين a ، b هو :-

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx .$$

ويعبر عن المتغير العشوائي X والذي يخضع للتوزيع الطبيعي الذي معدله μ وتباينه σ^2 بالرمز $X : N(\mu, \sigma^2)$.

خواص التوزيع الطبيعي :-

١- متماثل حول العمود المقام على الوسط الحسابي μ بحيث يشبه شكله شكل الجرس .



٢- له قمة واحدة، وبذلك له منوال واحد ينطبق على الوسط الحسابي μ .

٣- يقترب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندما $X \to -\infty$ ، $X \to \infty$.

٤- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي 1 .

- حالة خاصة من التوزيع الطبيعي :-

(التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution)

تعريف : التوزيع الطبيعي المعياري هو التوزيع الطبيعي الذي معدله (وسطه الحسابي) يساوي صفر وتباينه يساوي 1 ، ويعبر عن التوزيع بالرمز $Z : N(0, 1)$.

نظرية :- اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي ذو المعدل μ والتباين σ^2 فإن توزيع المتغير العشوائي

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

هو التوزيع الطبيعي المعياري .

كل قيمة من قيم X تقابلها قيمة من قيم Z حسب التحويل السابق
وتسمى قيم Z القيم المعيارية المقابلة لقيم X.

مثال: اذا كانت $X : N(70, 25)$ ، اوجد القيم المعيارية المقابلة لكل من القيم التالية:-

1) $X_1 = 65$

2) $X_2 = 13$.

الحل: لتحويل قيم X إلى Z ، نستخدم التحويل التالي:-

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$\sigma \rightarrow$ الانحراف المعياري

1) $Z_1 = \frac{65 - 70}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

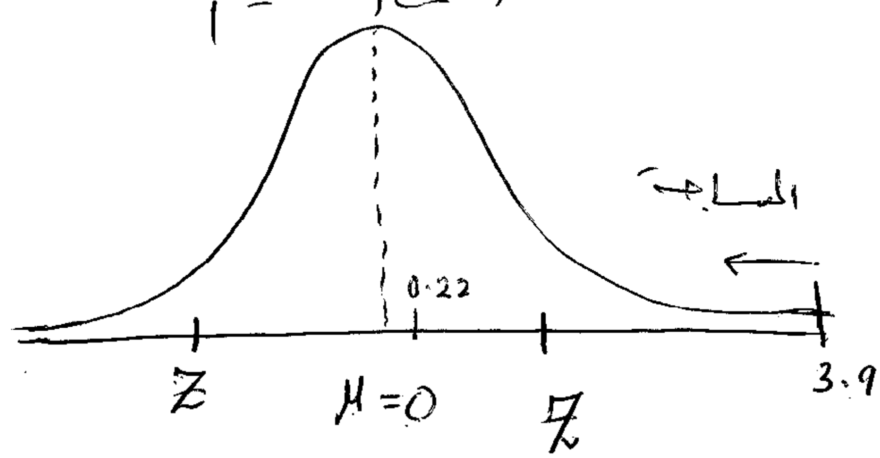
2) $Z_2 = \frac{13 - 70}{5} = \frac{-57}{5}$.

* المساحة تحت التوزيع الطبيعي:-

سنستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري لايجاد المساحة المحصورة بين متغير عشوائي حيث تعطي هذه الجداول المساحة الى يسار قيم Z بشكل عام موجبة كانت أم سالبة وتعني $P(Z \leq z)$.

لاحظوا أن العمود الأيسر في الجدول يعطي قيم Z ذات خانة عشرية واحدة والصف العلوي يعطي الخانة العشرية الثانية، وتقاطع الصف مع العمود يعطي المساحة المطلوبة.

المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.



(قيم Z سالبة) ⇓ نستخدم الجداول الإحصائية لقيم Z السالبة.

(قيم Z موجبة) ⇓ نستخدم الجداول الإحصائية لقيم Z الموجبة.

Z	0.00	0.01	0.02	------	0.09
0.0	0.5000				
0.1					
0.2			0.5871		
⋮					
⋮					
3.9					

داخل جسم الجدول هو عبارة عن المساحات التي تقع على يسار قيمة معيارية معينة

امثلة عن المساحة التي تقع على يسار قيم معيارية مختلفة :

$Z_{3.9} = 1$

$Z_{0.52} = 0.6982$

$Z_{-3.48} = 0.0003$

$Z_{0.11} = 0.4562$.

القيم المعيارية Z المقابلة لقيم X المختلفة

هي عبارة عن المساحة على اليسار من قيم معيارية معينة

نهاية المحاضرة الثامنة .

المحاضرة التاسعة - الاسبوع الخامس

الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

$$X : N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow Z : N(0, 1)$$

متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الذي معدله μ وتباينه σ^2 .

قيم معيارية مقابلة للمتغير العشوائي X حيث تتبع التوزيع الطبيعي المعياري الذي وسطه صفر وتباينه 1 .

هنالك تحويل من قيم المتغير العشوائية X الى قيم معيارية مقابلة لها تعطى بالصيغة

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

مثال : اذا كان لدينا $Z : N(0, 1)$ ، أوجد مايلي :

i) $P(Z < 1)$

ii) $P(Z < -1.96)$

iii) $P(Z > 2.57)$

iv) $P(-1.23 < Z < -0.68)$

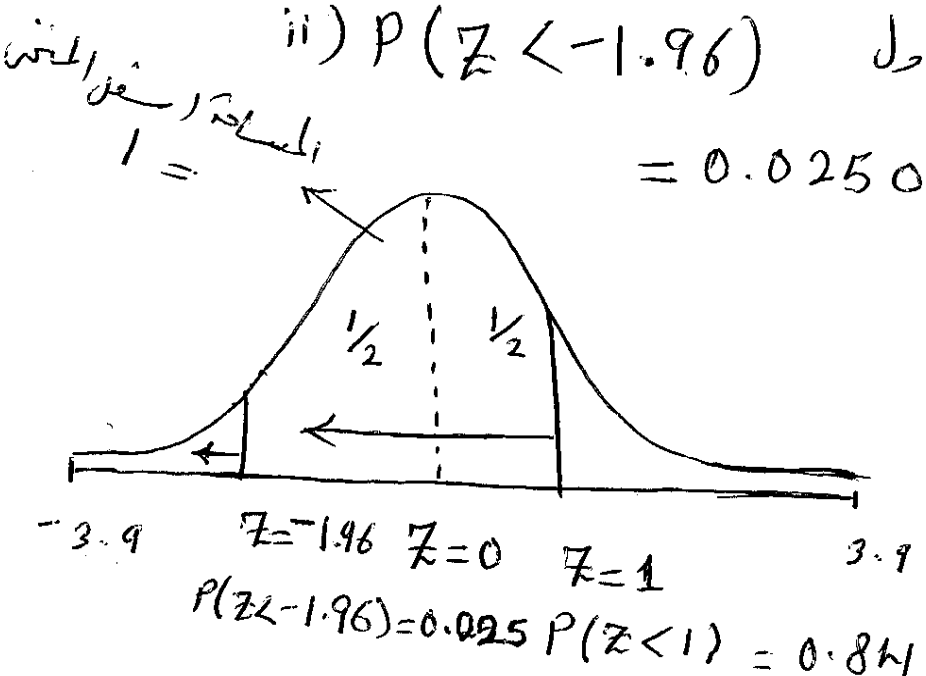
الحل :-

i) $P(Z < 1)$ مباشرة من الجداول

$= 0.8413$

ii) $P(Z < -1.96)$ مباشرة من الجداول

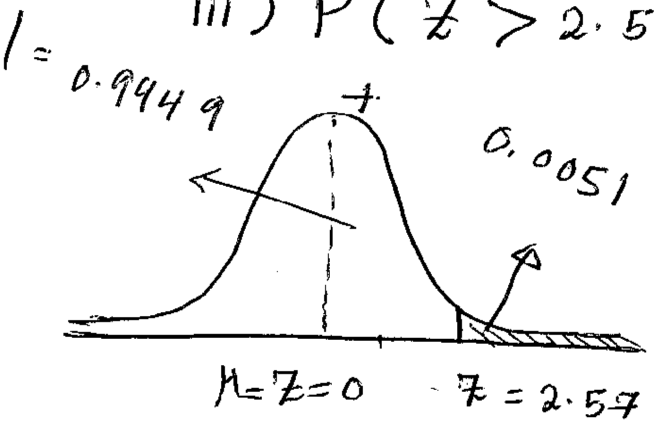
$= 0.0250$



iii) $P(Z > 2.57) = 1 - P(Z < 2.57)$

$= 1 - 0.9949$

$= 0.0051$



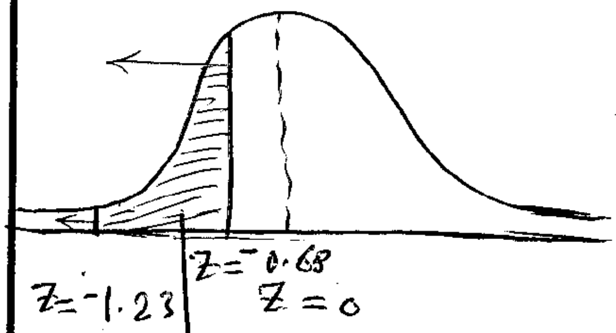
iv) $P(-1.23 < Z < -0.68)$

$= P(Z < -0.68) - P(Z < -1.23)$

= من الجداول الاحصائية

$= 0.2483 - 0.0934$

$= 0.1549$



المساحة ع يسار العدد الأكبر
ناقص
المساحة ع اليسار للعدد الأصغر

$$\begin{array}{r} 0.1549 \\ 0.0934 \\ \hline 0.2483 \end{array}$$

مثال :- اذا كان $X:N(65,36)$ اوجد :-

i) $P(X > 55)$

ii) $P(X < 68)$

iii) $P(50 < X < 70)$.

الحل :- لابد من عملية تحويل المتغير العشوائي والذي يتبع التوزيع الطبيعي الى قيم معيارية Z لإيجاد المساحات.

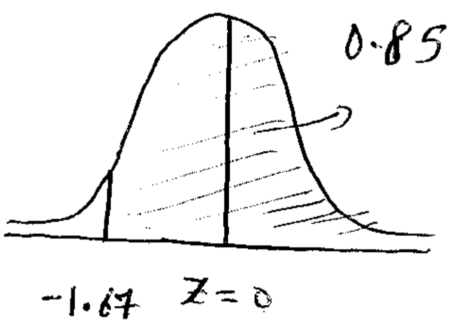
i) $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{55 - 65}{6} = \frac{-10}{6} = -1.67$

$P(X > 55) = P(Z > -1.67)$

$= 1 - P(Z < -1.67)$

$= 1 - 0.0475$

$= 0.8525$



ii) $P(X < 68) = P(Z < 0.5)$

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{68 - 65}{6} = 3/6 = 0.5$

$= 0.6915$

عملية التحويل

iii) $P(50 < X < 70) = P(-2.5 < Z < +0.83)$

$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{50 - 65}{6} = \frac{-15}{6} = -2.5$

$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{70 - 65}{6} = 5/6 = 0.83$

$= P(Z < 0.83) - P(Z < -2.5)$

$= 0.7967 - 0.0062 = 0.7905$

عملية التحويل

* تطبيقات على التوزيع الطبيعي :.

في هذا البند سنقوم بإعطاء بعض الأمثلة كتطبيقات على استعمال التوزيع الطبيعي .

مثال : تخضع أوزان عبوات إحدى أنواع الحلويات لتوزيع طبيعي وسطه 85 غم وانحرافه المعياري 2.5 غم

أ) ما هو احتمال أن وزن إحدى العبوات التي أخذت بشكل عشوائي تزيد عن 90 غم ؟

ب) ما هو احتمال أن وزن أحد العبوات والتي أخذت بشكل عشوائي تقل عن 82 غم ؟

الحل: نفرض أن وزن العبوة $= X$ ،

$$X : N(85 , 2.5^2)$$

المطلوب :- أ) $P(X > 90)$

ب) $P(X < 82)$

الحل :- لابد من القيام بعملية تحويل قيم X الى قيم Z المعيارية المقابلة لها .

أ) $Z = \dfrac{90-85}{2.5} = \dfrac{5}{2.5} = 2$

$$P(X>90) = P(Z>2) = 1 - P(Z<2)$$
$$= 1 - 0.9772$$
$$= 0.0228.$$

ب) $P(X<82) = P(Z<-1.2)$

$$Z = \frac{82-85}{2.5} = \frac{-3}{2.5} = -1.2$$

= مباشرة من الجدول

= 0.1151

مثال: تخضع تكاليف الولادة الطبيعية في المستشفيات في بلد ما للتوزيع الطبيعي بوسط 115 دولار وتباين 49 دولار.
ما احتمال أن تكون تكاليف إحدى الولادات الطبيعية ما بين 104 و 122 دولار؟

الحل:

$$X : N(115, 49)$$

المطلوب: $P(104 < X < 122)$?

$$= P(X<122) - P(X<104)$$
$$= P\left(Z<\frac{122-115}{7}\right) - P\left(Z<\frac{104-115}{7}\right)$$
$$= P(Z<1) - P(Z<-1.57)$$
$$= 0.8413 - 0.0582$$
$$= 0.7831$$

المحاضرة العاشرة - الأسبوع السادس

الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

$\boxed{ج}$ توزيع t : t-Distribution

إن أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة الخاصة لمتغير عشوائي متصل هو توزيع t .

تعريف :- إذا كان توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي t معطى بالمعادلة :-

$$f(t) = c\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} , \quad -\infty < t < \infty$$

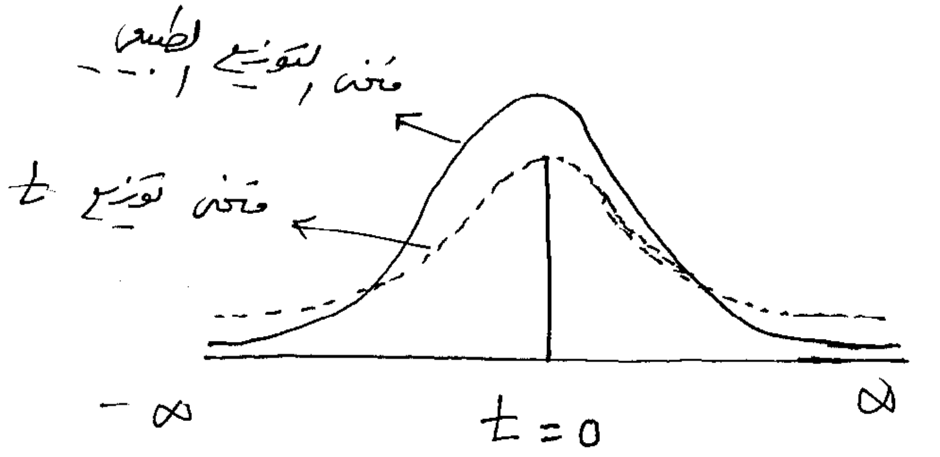
فإن هذا التوزيع يسمى توزيع t حيث v درجات الحرية و c ثابت يعتمد على v ليجعل المساحة تحت المنحنى تساوي 1.

خواص منحنى توزيع t :-

1- يشبه منحنى توزيع t شكل الجرس، وهو احادي المنوال له قيمة تقابل $t=0$ ، بحيث يتماثل منحنى الشكل حول العمود المقام على t .

2- شكله يشبه شكل التوزيع الطبيعي المعياري إلا أنه أكثر انخفاضاً منه ، بالإضافة أن تقارب طرفيه من الصفر عندما $t \to -\infty$ ، $t \to \infty$ أبطأ من تقارب منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

والشكل التالي يوضح منحنى التوزيع الطبيعي مع منحنى توزيع t :-



ملاحظة :- يعتمد منحنى توزيع t على معلمة هامة تحدد شكل ذلك المنحنى وهي درجات الحرية. فعندما تزداد درجات الحرية تقترب منحنى توزيع t من التوزيع الطبيعي المعياري.

* حساب الاحتمالات تحت توزيع t :-

تحسب الاحتمالات تحت توزيع t من خلال حساب المساحات المختلفة التي تقع على يسار قيم t بدرجات حرية مختلفة، ويوجد جداول خاصة لهذه المساحات ويكون استعمال هذه الجداول كالتالي :-

١- تسجل درجات الحرية v في العمود الأيسر، وعلى الخط الأفقي تسجل مساحات معينة A، أما داخل الجدول فتمثل قيم t التي تقع المساحة المعينة على يسارها، ونعبر عن قيمة t التي تقع إلى يسارها المساحة A تحت منحنى توزيع t بدرجات حرية v بالرمز $t[A ; v]$.

٢- ان جدول t يعطي قيم $t[\lambda;v]$ القريبة من 1، لهذا عندما تكون λ صغيرة مثل 0.05، 0.01 وغيرها، فإننا نستعمل القاعدة $t[\lambda;v] = -t[1-\lambda;v]$ وذلك بسبب تماثل توزيع t حول العمود المقام على الصفر.

مثال :- المتغير العشوائي t يتبع التوزيع t بدرجات حرية 4، اوجد

1) المساحة الواقعة على يسار 1.532 ؟

٢) ما هي قيمة t التي تقع إلى يسارها المساحة 0.01 ؟

٣) قيمة λ بحيث $t[\lambda;4] = -2.776$ ؟

الحل:

1) $t[\lambda;4] = 1.531$

$\Longrightarrow$ من جدول توزيع t مباشرة

نجد أن $\lambda = 0.90$.

2) $t[0.01;4] = ??$

$$t[0.01;4] = -t[1-0.01,4]$$
$$= -t[0.99,4]$$
$$= -3.747$$

3- $t[\lambda ; 4] = -2.776$.

من الجدول مباشرة، نجد أن قيمة المساحة التي تحقق الشرط

$$t[\lambda ; 4] = 2.776$$

هي :-

$$\lambda = 0.975$$

وبسبب وجود اشارة السالب، لابد أن أخذ المتممة من العدد 1، وبذلك فإن قيمة λ التي تحقق الشرط

$$t[\lambda , 4] = -2.776$$

هي :-

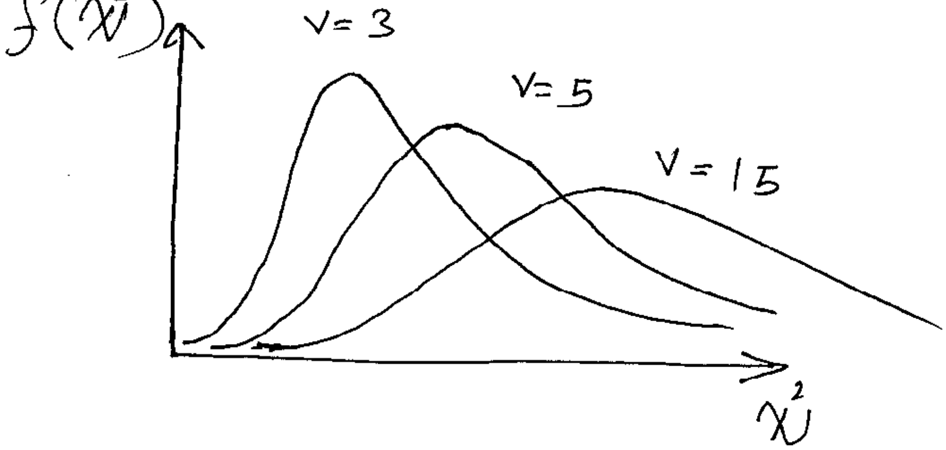
$$\lambda = 1 - 0.975 = 0.025 \ \#.$$

$\boxed{٣}$ توزيع كاي تربيع (Chi-Square Distribution)

تعريف: اذا كان توزيع الكثافة الاحتمالي للمتغير العشوائي χ^2 معطى بالمعادلة

$$f(\chi^2) = c\,(\chi^2)^{(\nu-2)/2}\, e^{-\chi^2/2} \quad , \quad \chi^2 > 0$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع كاي تربيع بدرجات حرية ν حيث تعتمد c على ν وتحدد بحيث تكون المساحة تحت المنحنى تساوي 1.



لإيجاد المساحات تحت منحنى كاي تربيع أو إيجاد القيم التي تقع إلى يسارها أو إلى يمين مساحة معينة، نستخدم جدول كاي تربيع حيث نسجل عدد درجات الحرية في العمود الأيسر، ونسجل المساحة التي تقع إلى يسار قيمة χ^2 على الخط الأفقي ونسجل قيم χ^2 داخل جسم الجدول.

مثال: إذا كان المتغير العشوائي χ^2 يخضع لتوزيع كاي تربيع على درجات حرية 10، أوجد:

أ) قيمة χ^2 التي يكون على يسارها 0.99 من المساحة.

ب) قيمة χ^2 التي يكون إلى يمينها 0.01 من المساحة.

ج) قيمة χ^2 التي يكون إلى يسارها 0.975 والقيمة التي يكون إلى يسارها 0.025 من المساحة؟

الحل :-

ملاحظة :-

نعبر عن قيمة المتغير العشوائي χ^2 التي تقع على يسارها المساحة λ بدرجة حرية ν تحت منحنى توزيع χ^2 بالرمز

$$\chi^2[\lambda ; \nu].$$

a) $\chi^2[0.99 ; 10] = ??$

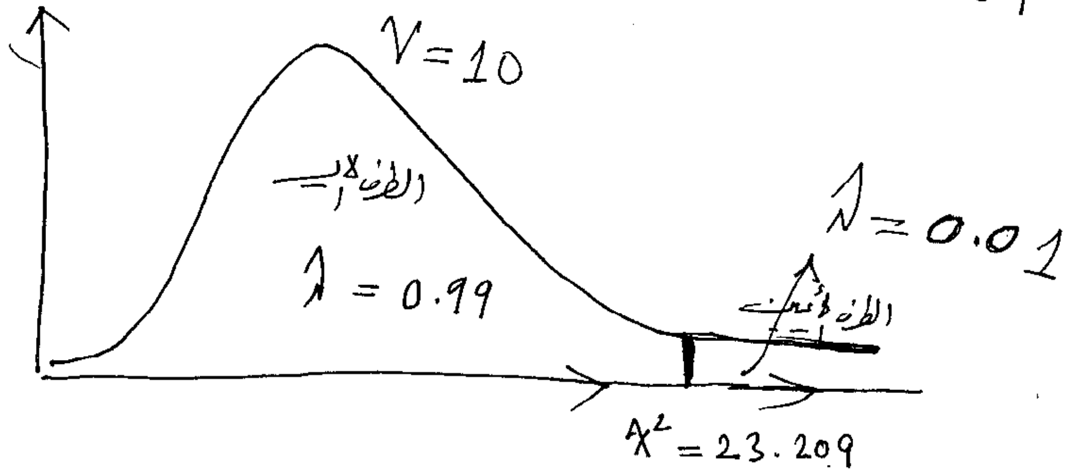
من الجدول مباشرة :-

$$\chi^2 = 23.209$$

b) قيمة χ^2 التي يكون إلى يمينها 0.01 من المساحة

لاحظوا أن المساحة التي تقع على يمين $\lambda = 0.01$ هي المساحة التي تقع على اليسار $\lambda = 0.99$ ، وبذلك فإن قيمة

$$\chi^2 = 23.209$$



المساحة اليمين

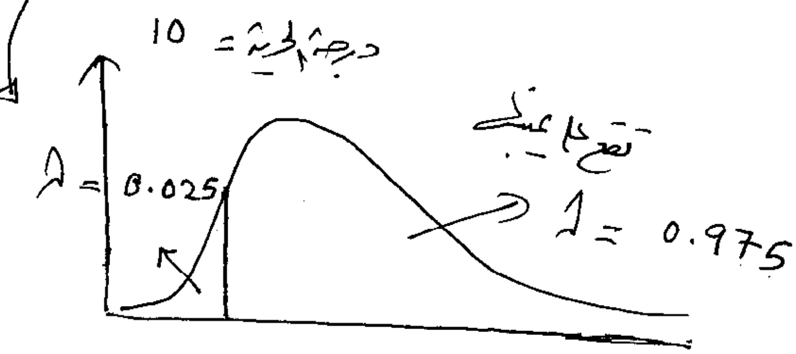
c) $\chi^2[0.975;10] = \chi^2[0.025;10]$

المساحة على اليسار

المساحة من اليمين

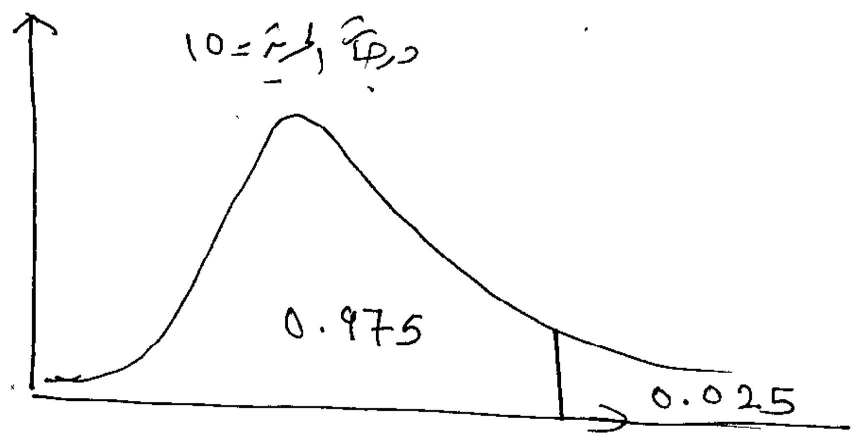
$\chi^2[0.025;10] = \chi^2[0.975;10]$

$= 3.247.$



(على اليسار) $\chi^2 = \cancel{0.025}$??

3.247



تمرين :- اذا كان المتغير العشوائي χ^2 يخضع لتوزيع كاي بدرجة حرية $V = 15$

اوجد :-

1) قيمة χ^2 التي تقع 0.99 من المساحة على يسارها؟

2) " χ^2 التي تقع 0.01 " " " ليمينها ؟

المحاضرة الحادية عشر - الأسبوع السادس

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة.

٤- توزيع F : (The F- Distribution)

يعتبر توزيع F من التوزيعات الاحتمالية المهمة والتي تستعمل في اختبار الفرضيات (موضوع الباب السادس).

تعريف :- اذا كانت توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي F معطى بالمعادلة :-

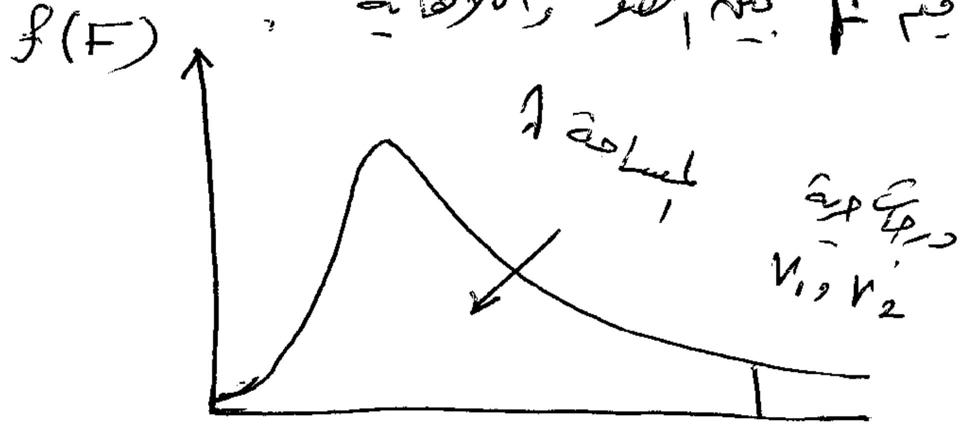
$$f(F) = \frac{c F^{(v_1 - 2)/2}}{(v_2 + v_1 F)^{(v_1 + v_2)/2}} \quad , \quad F > 0$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع F ويعبر عنه بالرمز $F(v_1, v_2)$ حيث أن v_1, v_2 هي درجات الحرية و c ثابت يعتمد على v_1, v_2 ويعين بحيث تصبح المساحة اسفل منحنى التوزيع تساوي 1.

يوجد لدينا في هذا التوزيع عددان من درجات الحرية، وبما أن v_2 يظهر في المقام فقط فإنه يعتبر درجات حرية المقام ويعتبر v_1 درجات حرية البسط ويظهر v_1 قبل v_2 في الرمز $F(v_1, v_2)$.

خواص منحنى توزيع F :-

منحنى توزيع F احادي المنوال ملتوٍ قليلاً الى اليمين، وكلما ازدادت درجات الحرية v_1 و v_2 يقترب منحنى توزيع F من منحنى التوزيع الطبيعي وهو موجب لجميع قيم F بين الصفر واللانهاية.



$F(\alpha; v_1, v_2)$

تستخدم جداول احصائية لتوزيع F لإيجاد المساحات تحت منحنى توزيع F، ونستخدم الرمز $F(\alpha; v_1, v_2)$ للدلالة على النقطة التي تكون إلى يسارها مساحة α

مثال: اوجد ما يلي :

1) $F(0.95; 9, 7) \Leftarrow$ معدل $(3.73 , 3.64)$

$\Leftarrow F = 3.68$

2) $F(0.99; 9, 7) \Leftarrow$ معدل $(6.84 , 6.62)$

$\Leftarrow F = 6.73$

وفي حالة تم ايجاد قيم F اذا كانت المساحة على يسارها قيم غير موجودة في الجدول (بعض قيم صغيرة) مثل $F(0.05; v_1, v_2)$ أو $F(0.01; v_1, v_2)$ ، ففي هذه الحالة نستخدم الصيغة التالية :-

$$F(\alpha; v_1, v_2) = \frac{1}{F(1-\alpha; v_2, v_1)}$$

مثال :- اوجد قيمة مايلي :-

1) $F(0.05; 10, 7)$

2) $F(0.01; 1, 15)$

الحل :-

1) $$F(0.05; 10, 7) = \frac{1}{F(1-0.05; 7, 10)} = \frac{1}{F(0.95; 7, 10)} = \frac{1}{3.14}$$

2) $$F(0.01; 1, 15) = \frac{1}{F(0.99; 15, 1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{6056+6209}{2}}$$

تمرين :- أوجد المساحة إلى اليسار $F=3$ إذا كانت
$v_1 = 7$ ، $v_2 = 20$ ؟

أوجد المساحة λ بحيث

$$F(\lambda\,;\,5,5) = 10.97$$

نهاية الباب الثالث .

الباب الرابع : توزيعات المعاينة

إحصاءات العينة : Sample Statistics

مقدمة :-

يخضع المجتمع الذي تؤخذ منه العينة لتوزيع معين وهو توزيع المجتمع حيث يسمى بالتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يمثل كافة افراد ذلك المجتمع .

أما احصاء العينة فهو أي اقتران تتعين قيمته من العينة .

فمثلاً الوسط الحسابي للعينة هو

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

هو إحصاء عينة . حيث نلاحظ أنه قيمته تتغير من عينة لأخرى .
فمثلاً اذا اخذت عينة حجمها n بحيث كان لدينا $x_1, x_2, \dots, x_n$
فإن هذه العينة تحدد قيمة ما للوسط الحسابي $\bar{x}$ واذا اخذت عينة عشوائية
اخرى بنفس الحجم n فإن الوسط الحسابي لهذه العينة ربما يتغير
عن الوسط الحسابي للعينة الأولى وهكذا . وهذا يعني أن $\bar{X}$
متغير عشوائي تتغير قيمته بتغير العينة .

تعريف (١) : المعلمة (Parameter) هي ثابت يصف المجتمع
أو يصف توزيع المجتمع كالوسط الحسابي للتوزيع أو الانحراف
المعياري له .

تعريف (٢) : احصاء العينة (Sample Statistic) هو أي متغير
تتعين قيمته من جميع العينات ذات حجم معين ما أخذوه
من مجتمع ما . وباختصار هو اقتران تتعين قيمته من العينة .
ومثال عليه :- الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$.

تعريف (٣) : يسمى التوزيع الاحتمالي لإحصاء العينة
توزيع المعاينة لذلك الاحصاء .

المحاضرة المباشرة الثانية

الاحصاء للإدارة

د. رائـــد الخصاونــة

المحاضرة المباشرة الثانية
والأسبوع السابع

مراجعة عامة للفصل الثالث :

التوزيعات الاحتمالية المتصلة

$\boxed{1}$ التوزيع الطبيعي $X : N(\mu, \sigma^2)$

كل متغير عشوائي X ينقل الى التوزيع الطبيعي يقابله قيمة معيارية

Z تنتمي الى التوزيع الطبيعي المعياري $Z : N(0, 1)$

حيث تتم عملية التحويل من خلال الصيغة

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ويمكن ايجاد المساحات التي تقع على يسار قيمة معيارية معينة من خلال جداول احصائية خاصة بذلك .

مثال : تخضع اوزان علب عصير في مصنع ما لتوزيع طبيعي وسطه 250 غم وانحرافه المعياري 15 غم . اذا اشتريت علبة عصير من هذا النوع :

أ) ما احتمال أن يقع وزنها بين 225 غم و 260 غم ؟

ب) ما احتمال أن يكون وزنها أكثر من 270 غم ؟

الحل :-

أ) المطلوب

$$P(225 < X < 260)$$

يجب ايجاد القيم المعيارية المقابلة عندما $X = 225$ ، $X = 260$

$$X = 225 \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{225 - 250}{15}$$

$$= -\frac{25}{15} = -1.67$$

$$X = 260 \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{260 - 250}{15} = \frac{10}{15}$$

$$= 0.67$$

$$P(225 < X < 260) = P(-1.667 < Z < 0.667)$$

$$= P(Z < 0.67) - P(Z < -1.67)$$

$$= 0.7486 - 0.0475$$

$$= 0.7011$$

ب) المطلوب

$$P(X > 270)$$

القيمة المعيارية المقابلة لـ $X = 270$ هي :-

$$Z = \frac{270 - 250}{15} = \frac{20}{15} = 1.33$$

$$P(X > 270) = P(Z > 1.33) = 1 - P(Z < 1.33)$$

$$= 1 - 0.9082 = 0.091$$

٢- توزيع t : $t[\alpha ; v]$

ويتم حساب المساحات الواقعة على يسار قيم t المختلفة بمدخلات احصائية خاصة بذلك ، حيث تسجل درجات الحرية في العمود الأيسر ويتم المساحات المختلفة في الخط الأفقي ، ويتم t المقابلة لدرجات حرية معينة والتي تقع المساحة المعينة على يسارها فتسجل داخل الجدول.

وفي حال السؤال عن مساحات صغيرة ، فيتم استخدام صيغة التحول التالية :-

$$t[\alpha ; v] = -t[1-\alpha ; v]$$

مثال :- اوجد

$$t[0.025 ; 8] = ??$$

الحل :-

$$t[0.025 ; 8] = -t[1-0.25 ; 8]$$
$$= -t[0.75 ; 8]$$
$$= -0.706 .$$

مثال :- اوجد

$$t[\alpha ; 15] = 1.753$$

الحل :- المطلوب ايجاد قيمة المساحة التي تقع على يسار $t = 1.753$ بدرجة حرية $= 15$.

من الجدول $\alpha = 0.95$

٣- توزيع كاي تربيع :- ويرمز له بالرمز $\chi^2[\alpha ; v]$

ويتم إيجاد المساحة α التي تقع على يسار قيمة χ^2 بدرجة حرية v من خلال جداول إحصائية خاصة بذلك. حيث تمثل قيم v العمود الأيسر وقيم المساحة في الخط الأفقي وقيم χ^2 داخل الجدول.

مثال :- أوجد قيمة المجهول فيما يلي

$$\chi^2[0.99 ; v] = 23.209$$

الحل :- من خلال جدول كاي تربيع نجد أن قيمة درجة الحرية تساوي 10

٤- توزيع F :- ويرمز له بالرمز $F[\alpha ; v_1 ; v_2]$

ويتم إيجاد المساحات التي تقع إلى يسار قيم F المختلفة بدرجات حرية v_1, v_2 من خلال جداول إحصائية خاصة بذلك، حيث تمثل v_1 المحور الأفقي و v_2 المحور العمودي وقيم F داخل الجدول.

مثال :- أوجد

$$F[\alpha ; 5 , 6] = 5.99$$

الحل :- $\alpha = 0.975$

وفي حال السؤال عن قيم المساحات الصغيرة، فإننا نستعمل التحويل التالي :-

$$F[\alpha ; v_1 ; v_2] = \frac{1}{F[1-\alpha , v_2 , v_1]}$$

الفصل الرابع: توزيعات المعاينة

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$:-

نظرية (1): اذا كان X يخضع لتوزيع وسطه (معدله) μ وتباينه σ^2 وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن :-

1) توقع $\bar{X}$ هو :- $\mu_{\bar{x}} = \mu$

2) تباين $\bar{X}$ هو :- $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

شريطة أن نسحب مع الارجاع.

مثال :- سحبت عينة عشوائية من مجتمع لانهائي معدله 70 وتباينه 40. اذا كان حجم العينة 10، فأوجد :-

1) الوسط الحسابي للعينة.
2) تباين العينة.
3) الانحراف المعياري للعينة.

الحل :-

1) $\mu_{\bar{x}} = \mu = 70$

2) $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{40}{10} = 4$

3) $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{4} = 2$

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي :-

نظرية (٣) :- اذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه (معدله) μ وتباينه σ^2 فان توزيع $\bar{X}$ سيكون التوزيع الطبيعي ذا الوسط μ والتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ حيث أن المتغير العشوائي

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

يخضع للتوزيع طبيعي معياري .

مثال :- تخضع علامات الطلاب في احد المقررات للتوزيع طبيعي وسطه 65 وانحراف معياري 18 . أخذت عينة عشوائية حجمها 36 طالب ، احسب

١) احتمال ان يزيد وسط علامات العينة عن 74 ؟

٢) = = يقل = = العينة عن 60 ؟

الحل :- المطلوب

1) $P(\bar{X} > 74)$

2) $P(\bar{X} < 60)$

1) $P(\bar{X} > 74) = P\left(Z > \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{74 - 65}{18/\sqrt{36}}\right)$

$= P(Z > 3)$

$= 1 - P(Z < 3)$

$= 1 - 0.9987 = 0.0013$

2) $P(\bar{X} < 60) = P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$

$= P\left(Z < \frac{60 - 65}{18/\sqrt{36}}\right)$

$= P(Z < -1.67)$

$= 0.0475$

شكرا لحسن استماعكم

نهاية المحاضرة المباشرة الثانية

المحاضرة الثالثة عشر - الاسبوع الثامن

توزيعات المعاينة

نظرية (٣) (المعاينة من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 غير معلوم).

اذا أخذت عينة عشوائية من توزيع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 غير معلوم بحيث كان $\bar{X}$ (الوسط الحسابي للعينة) لعينة بحجم n وانحراف المعياري S فإن المتغير :

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

يخضع لتوزيع t بدرجات حرية $v = n - 1$.

مثال :- اذا كانت اطوال الطلاب في احد الصفوف المدرسية تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 160 سم ، إذا سحبت عينة عشوائية من 4 طلاب فما احتمال ان يقل متوسطها الحسابي عن 166 سم اذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة يساوي 10 سم ؟

الحل :

$$P(\bar{X} < 166) \; ?$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{166 - 160}{10/\sqrt{4}} = 6/5 = 1.2$$

$$P(t[\lambda, 3] = 1.2) = 0.90$$

نظرية (٤) :- توزيع المعاينة للفرق بين وسطي عينتين $(\bar{X}-\bar{Y})$:-

اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي معدله μ_1 وتباينه σ_1^2، ثم اخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي معدله μ_2 وتباينه σ_2^2 بحيث كان مستقل عن المجتمع الأول، ورمزنا للوسط الحسابي للعينة الأولى بالرمز $\bar{X}$ وللوسط الحسابي للعينة الثانية بالرمز $\bar{Y}$ فإن توزيع الفرق بين وسطي العينتين $(\bar{X}-\bar{Y})$ يكون التوزيع الطبيعي ذا المعدل $(\mu_1-\mu_2)$ والتباين $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ بحيث :-

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري .

مثال :- تخضع علامات الناجحين في امتحان الدراسة الثانوية العامة في احدى المدارس (أ) لتوزيع طبيعي معدله 70 وانحرافه المعياري 12، وفي مدرسة ثانية (ب) تخضع العلامات لتوزيع طبيعي معدله 74 وانحراف المعياري 16. اخذت عينة عشوائية حجمها 16 من المدرسة (أ) وعينة عشوائية اخرى حجمها 9 من المدرسة (ب). على فرض أن الوسط الحسابي للعينة الأولى $\bar{X}$، وللعينة الثانية $\bar{Y}$، أوجد

أ) $P(\bar{Y} - \bar{X}) > 8$ ؟ ← احتمال الفرق بين وسطي عينتين .

ب) $P(\bar{X} - \bar{Y}) < 3$ ؟

الحل :

أ) $P(\bar{Y} - \bar{X}) > 8$ ؟ ??

$$P\left[Z = \frac{(\bar{Y} - \bar{X}) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{8 - (74 - 70)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16} + \frac{(16)^2}{9}}}\right]$$

ايجاد قيمة المتغير Z من معطيات السؤال

$$P\left(Z > \frac{8 - 4}{\sqrt{9 + 28.4}}\right) = P(Z > 0.65)$$

$$= 1 - P(Z < 0.65)$$

$$= 1 - 0.7422$$

$$= 0.2578$$

ب) $$P\left(Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < \frac{3 - (70 - 74)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16} + \frac{(16)^2}{9}}}\right]$$

$$P\left(Z < \frac{3 - (-4)}{\sqrt{9 + 28.4}}\right) = P\left(Z < \frac{7}{\sqrt{37.4}}\right)$$

$$= P(Z < 1.14)$$

$$= 0.8729$$

تمارين ومسائل :-

سؤال (١) :- اذا كان لدينا المتغير العشوائي X والذي يتبع التوزيع الطبيعي ذا المعدل 25 والتباين 36 . اجب عن الاسئلة التالية :-

١- اوجد القيمة المعيارية المقابلة للعدد X = 10 ؟

٢- اوجد القيمة المعيارية المقابلة للعدد $\overline{X}$ = 10 في حال كان لدينا عينة حجمها 16 ؟

٣- اوجد الوسط الحسابي للعينة إذا علمت ان n = 25 ؟

٤- " التباين " للعينة " " " n = 25 ؟

٥- " الانحراف المعياري للعينة اذا علمت ان n = 16 ؟

الحل :-

① دائماً في التوزيع الطبيعي، لكل متغير عشوائي X يوجد قيمة معيارية Z نحصل عليها من خلال التحويل التالي :-

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{10 - 25}{\sqrt{36}} = \frac{-15}{6}.$$

② توزيع المعاينة :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$= \frac{10 - 25}{\sqrt{36}/\sqrt{16}} = \frac{-10}{6/4} = \frac{-10 \times 4}{6} = \frac{-40}{6}.$$

③ $\mu_{\bar{x}} = \mu = 25.$

④ $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{36}{25}$

التباين للعينة

⑤ $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{36}{16}.$

الانحراف المعياري ← $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = 6/4.$

سؤال :- اذا كانت لدينا $X : N(15, 25)$.

سحب عينة حجمها 10 ~~...~~ .

اوجد $P(\bar{X} < 10)$ ؟

توزيع المعاينة (اوجد احتمال الوسط الحسابي للعينة أقل من 10).

الحل :-

$$P(\bar{X} < 10) = P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{10 - 15}{5/\sqrt{10}}\right)$$

$$P\left(Z < \frac{-5}{1.58}\right) = P(Z < -3.16) = 0.0008$$

تمرين :- اذا كان لدى التوزيع الطبيعي: $X : N(10, 25)$

والتوزيع الطبيعي الآخر $Y : N(15, 36)$ ، مستقل عن الأول.

سحبت عينة من المجتمع الأول حجمها 16 ، وسحبت عينة من المجتمع الثاني حجمها 25 . اوجد احتمال الفرق بين $(\bar{Y} - \bar{X})$ يقل عن العدد 3 ؟

المطلوب $[P(\bar{Y} - \bar{X}) < 3]$ ؟

المحاضرة الرابعة عشر - الاسبوع الثامن

الفصل الخامس: التقدير Estimation

مقدمة :-

الاستنتاجات الاحصائية هي العمليات والقرارات التي علينا اتخاذها بناءً على معلومات أو بيانات تم تجميعها أو كانت متوفرة لدينا.

فمثلاً إذا ارادت شركة أدوية أن تسوق دواء ما، فإنه يجب عليها أن تحصل على تصريح بذلك أولاً ويتم ذلك من خلال اثبات أن الدواء المنتج قد جرب واثبت جدوى استعماله، وهذا يعني أن عينة من المرضى قد استعملوا ذلك الدواء وحصلوا على نتائج ايجابية، وبذلك فإن الشركة بنت قرارها من خلال دراسة تلك العينة.

المثال السابق يوضح أنه من اهم فروع الاحصاء الاستنتاجي هو عملية التقدير واختبار الفرضيات. حيث سنقوم في الفصل الخامس بدراسة مفهوم التقدير على أن يتم دراسة اختبار الفرضيات في الفصل السادس لاحقاً إن شاء الله.

أولاً :- مفهوم التقدير

تتم عملية التقدير من خلال اختيار عينة عشوائية من مجتمع ما ومشاهدة مفردات تلك العينة ومن ثم حساب المقاييس المراد ايجادها وتعميم ذلك على المجتمع.

إن أي توزيع احتمالي يحتوي على معالم تحدد شكله، فمثلاً في توزيع ذات الحدين يعتمد شكله على P ، n

P ⇐ نسبة النجاح

n ⇐ عدد مرات اجراء التجربة

أما في توزيع بواسون فيعتمد شكله على معلمة λ ⇐ معدل النجاحات في فترة زمنية معينة

أما في التوزيع الطبيعي فيعتمد شكل ذلك التوزيع على μ ، σ

μ ⇐ المعدل

σ ⇐ الانحراف المعياري (الانحراف التربيعي (شم))

وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة، وفي هذه الحالة لا بد من تقدير هذه المعالم

هنالك طريقتان أساسيتان لتقدير معالم المجتمع المجهولة هما :-

1) التقدير بنقطة   2) التقدير بفترة .

أولاً : التقدير بنقطة .

يمكن ايجاد تقديرات للمعالم الخاصة بالمجتمع من خلال البيانات المأخوذة من عينة عشوائية وذلك بحساب ما يسمى بالاحصاءات، فمثلاً في المجتمع الطبيعي نستخدم متوسط العينة العشوائية $\bar{X}$ كتقدير لمتوسط المجتمع μ وكذلك الانحراف المعياري للعينة S يستخدم كتقدير ~~للوسط الحسابي~~ للانحراف المعياري للمجتمع σ .

في توزيع بواسون يستخدم الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ كتقدير لمعدل عدد النجاحات في تجربة بواسون λ ، $(\lambda = \bar{X})$

اما في توزيع ذات الحدين فيستخدم الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ كتقدير لنسبة النجاح P $(P = \bar{X})$ ... وهكذا .

وتسمى هذه التقديرات بالتقدير بنقطة حيث انها قيمة وحيدة محسوبة من العينة .

مثال :- اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ وكانت قيمها $6, 4, 7, 3, 5$. أوجد تقديراً لمعدل المجتمع μ وتقديراً لتباين المجتمع σ^2 ؟

الحل :- ① $\mu = \bar{X}$ (الوسط الحسابي للمجتمع تقديراً يساوي الوسط الحسابي للعينة) .

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{6+4+7+3+5}{5}$$

$$= \frac{25}{5} = 5 .$$

$$\mu = 5$$

الوسط الحسابي للمجتمع تقديراً .

② $\sigma^2 = \sigma^2_{\bar{x}}$. (تباين المجتمع تقديراً يساوي تباين العينة) .

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$= \frac{(6-5)^2 + (4-5)^2 + (7-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2}{4}$$

$$= \frac{1+1+4+4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

(تباين المجتمع تقديراً يساوي 2.5)

$$\sigma^2 = 2.5$$

(الانحراف المعياري للمجتمع تقديراً يساوي $\sqrt{2.5}$)

$$\sigma = \sqrt{2.5}$$

مثال :- في توزيع بواسون اقدّر عدد النجاحات في فترة زمنية معينة (λ) بناءاً على عينة عشوائية اعطت القيم التالية 7, 7, 7, 7 ؟

الحل :- عدد النجاحات في فترة زمنية معينة (λ) تقديراً = الوسط الحسابي للعينة .

$$\bar{X} = 7 \Rightarrow \lambda = 7$$

تمرين :- اذا اخذت عينة عشوائية حجمها $n = 5$ ، $\sum_{i=1}^{5} x_i = 30$ من مجتمع برنوللي (أي ذات الحدين $b(1, P)$) ، اوجد التقدير النقطي للمعلمة P ؟

المحاضرة الخامسة عشر - الأسبوع التاسع

الفصل الخامس: التقدير

ثانياً: التقدير بفترة (Interval Estimation)

من الصعب جداً الحصول على تقدير لمعلمة مجتمع ما دون الوقوع في الخطأ مهما كان هذا التقدير جيداً، ولذلك فإنه من المرغوب فيه اعطاء فترة معينة نتوقع أن تقع معلمة المجتمع بداخلها. إن مثل هذا النوع من التقدير يسمى تقدير بفترة أو فترة ثقة ومع أن دقة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة فإنه ليس هنالك سبب يبرر امكانية الحصول على تقدير محدد لمعلمة مجتمع بدون خطأ. سنتعرف في هذا البند على ايجاد فترات الثقة للمعدل (الوسط الحسابي) μ، وفترات الثقة للنسبة P، وفترات الثقة للتباين σ^2.

$\boxed{1}$ ايجاد فترات الثقة للوسط الحسابي μ:

نظرية (1): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ بحيث كانت σ^2 معلومة فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ هي:-

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

حيث $\bar{X}$: الوسط الحسابي للعينة، $Z_{1-\alpha/2}$: هي القيمة على محور Z والتي يقع على يسارها مساحة $1-\alpha/2$.

تفسير فترات الثقة :-

تعتبر فترة الثقة من الأدوات المهمة التي تعطي معلومات عن المعلمة المجهولة مثل (μ) باستعمال أسلوب العينة. وسيكون لدينا عدة أنواع من دقة فترات الثقة مثل 90% ، 95% ، 98% وهذا ما نقصده بالرمز $100(1-\alpha)\%$ وسنكتفي بشرح فترة 95% حيث أن البقية لها نفس السلوك.

1) بعد دراسة العينة وتسجيل المشاهدات وإيجاد قيمة الوسط الحسابي فإن

$$\left(\bar{X} - Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{X} + Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

هي فترة نهايتها متغيرات عشوائية تحاول احتواء المعلمة المجهولة μ .

2) إن تفسير الاحتمال

$$P\left(\bar{X} - Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{X} + Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 95\%$$

أن التكرار النسبي للحالات الخاصة الكثيرة المتكررة يحدد أن 95% من فترات الثقة ستحتوي المعلمة μ وأن 5% منها لا تحتوي.

(بمعنى إذا أخذنا 100 عينة عشوائية ذات الحجم n ومنها حسب $\bar{X}$ وحسب فترة الثقة لها، فإننا نتوقع نسبة 95% (95 فترة) أن تحوي الوسط الحسابي μ الصحيح وفقط 5 فترات تخطئ القيمة الحقيقية للوسط الحسابي μ

مثال :- عينة عشوائية حجمها $n = 25$ ، اخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري $\sigma = 4$ فاعطت معدل $\bar{X} = 60$. اوجد فترة 98% ثقة لوسط المجتمع μ ؟

الحل :- قبل البدء بتطبيق نص النظرية، يجب ان نقوم بعملية تحويل

$$1 - \alpha = 98\% \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = ??$$

$$1 - \alpha = 98\%$$
$$\alpha = 2\%$$
$$\alpha/2 = 1\%$$
$$1 - \alpha/2 = 99\%$$

وبتعويض القيم المعطاة في السؤال نحصل على :-

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(60 - \underline{Z_{0.99}} \times \frac{4}{\sqrt{25}} , 60 + \underline{Z_{0.99}} \times \frac{4}{\sqrt{25}}\right)$$

$$\left(60 - 2.33 \times \frac{4}{5} , 60 + 2.33 \times \frac{4}{5}\right)$$

$$(58.14 , 61.86)$$

ملاحظة: يمكن تطبيق النظرية السابقة في حال كان السحب من مجتمع غير طبيعي وذلك من خلال استخدام نظرية التقارب بشرط أن حجم العينة (n) سيكون كبيراً ($n \geq 30$) وبذلك نستخدم النظرية رقم (2).

نظرية (2): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع وسطه μ وتباينه σ^2 بحيث كانت σ^2 معلومة، فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للمعلمة μ هي تقريباً:

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{X} + Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

بشرط أن $n \geq 30$.

مثال: عينة عشوائية حجمها 100 من مجتمع تباينه 25، أعطت الوسط الحسابي 52، اوجد فترة 98% ثقة للوسط الحسابي μ؟

الحل: المعطيات $\bar{X} = 52 , \sigma^2 = 25 , n = 100$

$$1 - \alpha = 98\% \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 99\%$$

وبتطبيق النظرية رقم (2) نحصل تقريباً μ:

$$\left(52 - Z_{0.99} \times \frac{5}{10} \, , \, 52 + Z_{0.99} \times \frac{5}{10} \right)$$

$$\left(52 - 2.33 \times \frac{1}{2} \, , \, 52 + 2.33 \times \frac{1}{2} \right)$$

$$\left(50.84 \, , \, 53.16 \right)$$

تمرين :-

اعتماداً على المثال الأخير، اوجد فترة ~~ثقة~~ 95% ثقة للوسط الحسابي μ ؟

ثم اوجد فترة 90% ثقة للوسط الحسابي μ ؟

نهاية المحاضرة من الاسبوع الخامس عشر.

المحاضرة السادسة عشر - الأسبوع التاسع

الفصل الخامس : التقدير

نظرية (٣) : اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للوسط μ هي :

$$\left(\bar{X} - t\left[1-\tfrac{\alpha}{2}, n-1\right] \frac{S}{\sqrt{n}} \,,\; \bar{X} + t\left[1-\tfrac{\alpha}{2}, n-1\right] \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

حيث S : الانحراف المعياري للعينة .

مثال :- اخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي فاعطت $\bar{X} = 17.4$ ، $S = 2.1$. اوجد فترة 95% ثقة للوسط الحسابي μ ؟

الحل :- نقوم بعملية تحويل

$$1-\alpha = 95\%$$
$$\alpha = 5\%$$
$$\alpha/2 = 2.5\%$$
$$1-\alpha/2 = 97.5\% = 0.975 .$$

$$\left(17.4 - \underbrace{t[0.975, 14]}_{\text{من جدول توزيع } t} \times \frac{2.1}{\sqrt{15}} \,,\; 17.4 + t[0.975, 14] \times \frac{2.1}{\sqrt{15}}\right)$$

$$\left(17.4 - 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}} \,,\; 17.4 + 2145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}}\right)$$

$$(16.24 \quad \text{و} \quad 18.56)$$

فترة ثقة للوسط الحسابي للمجتمع 95%

بإمكاننا استخدام الأسلوب السابق في بناء فترات ثقة للوسط الحسابي لأكثر من مجتمع وذلك بالاستعانة بالنظرية التالية:

نظرية (4): (فترات الثقة للفرق بين وسطين)

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

وكانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول، بحيث كانت σ_1^2، σ_2^2 معلومتين

فإن فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ هي:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \; , \; (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

مثال:- أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, 25)$ ثم أخذت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع طبيعي $N(\mu_2, 40)$ مستقل عن الأول، فإذا أعطت العينة الأولى وسطاً حسابياً = 32 بينما أعطت العينة الثانية وسطاً حسابياً = 47 أوجد:

أ) فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$؟

ب) فترة ثقة 95% " " " $(\mu_2 - \mu_1)$؟

الحل:- المعطيات

المجتمع الثاني	المجتمع الأول
$\sigma_1^2 = 40$	$\sigma_1^2 = 25$
$n_2 = 10$	$n_1 = 9$
$\bar{Y} = 47$	$\bar{X} = 32$

المطلوب :-

أ) فترة 95% ثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ ؟

$$1-\alpha = 95\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 97.5\%$$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن :-

$$\left[(32-47) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}} \ , \ (32-47) + Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}\right]$$

من جدول التوزيع الطبيعي

$$\left(-15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4} \ , \ -15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4}\right)$$

$$(-20.1 \ , \ -9.9)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} = 32 - 47 = -15$$

تقع داخل هذه الفترة

ب) فترة ثقة 90% للفرق بين $\mu_2 - \mu_1$ ؟

$$1-\alpha = 90\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 95\%$$

وبتطبيق النظرية نحصل على :-

$$\left[(47-32) - Z_{0.95} \times \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}} \ , \ (47-32) + Z_{0.95}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}\right]$$

$$\left(15 - 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4} \ , \ 15 + 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{9}+4}\right)$$

$$(10.73 \ , \ 19.27)$$

$$\bar{Y} - \bar{X} = 15$$

وبتعويض في الفترة ، نجد أن :-

$$\left(0.15 - \underbrace{Z_{0.975}}_{\text{من جدول التوزيع الطبيعي}} \times \sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{100}} \;,\; 0.15 + Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{100}}\right)$$

$$\left(0.15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}} \;,\; 0.15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}}\right)$$

$$(0.08 \;,\; 0.22).$$

$$\bar{P} = 0.15$$

يجب ان تقع داخل هذه الفترة

نظرية (٦) :- اذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع برنولي $b(1, p_1)$ وكانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع برنولي $b(1, p_2)$ فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للفرق بين النسبتين $(p_1 - p_2)$ هي :-

$$\left[(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1} + \frac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}} \;,\; (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1} + \frac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}}\right]$$

ح) تقدير النسبة :-

ان تقدير النسبة بفترة هو عبارة عن ايجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع P ثم ايجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لايجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معين تحصر نسبة النجاح P بداخلها ، والنظرية التالية توضح ذلك .

نظرية (5) : اذا كانت $\bar{P} = X/n$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n بحيث كان n كبيراً ، فإن فترة $100(1-\alpha)100$ ثقة التقريبية لنسبة النجاح P هي :-

$$\left(\bar{P} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} \, , \, \bar{P} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} \right)$$

مثال :- لايجاد فترة 95% ثقة لنسبة عدد طلاب احد المدارس الثانوية الذين لديهم ضعف في البصر ، اخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد ان من لديهم ضعف في البصر كان 15 طالباً .

اوجد فترة الثقة المطلوبة ؟

الحل :- $1-\alpha = 95\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 97.5\%$

وايضاً يجب ايجاد $\bar{P}$:- (التقدير النقطي لنسبة النجاح للعينة) .

$$\bar{P} = \frac{15}{100} = 0.15$$

مثال :- أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب من المدرسة (أ) وجد أن 27 طالبًا لديهم تسوس في الأسنان، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى من المدرسة (ب) وجد أن 12 طالبًا لديهم تسوس في الأسنان. أوجد فترة 95% ثقة للفرق بين $(P_1 \text{ و } P_2)$ ؟ $(P_1 - P_2)$

الحل :- $1-\alpha = 95\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 97.5\%$

$$\bar{P}_1 = \frac{27}{100} = 0.27 \qquad \bar{P}_2 = \frac{12}{80} = 0.15$$

حسب النظرية السابقة نجد أنه :-

$$\left[(0.27-0.15) - \underset{1.96}{Z_{0.975}} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100} + \frac{0.15(0.85)}{80}} \right.,$$

$$\left. (0.27-0.15) + \underset{1.96}{Z_{0.975}} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100} + \frac{0.15(0.85)}{80}} \right]$$

$$(0.003 , 0.237)$$

$$\bar{P}_1 - \bar{P}_2 = 0.27 - 0.15 = 0.12$$

نهاية المحاضرة الثانية من الأسبوع التاسع

المحاضرة المباشـرة الثالثة

الاحصـــــــاء للإدارة

د. رائـــــد الخصاونة

المحاضرة المباشرة الثالثة

الفصل الخامس : التقدير

فترات الثقة للتباين Confidence Intervals for Variance

نظرية (7) : اذا كانت $X_1, X_2, ---, X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للتباين σ^2 هي :-

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2[1-\alpha/2 ; n-1]} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2[\alpha/2 ; n-1]} \right)$$

حيث S^2 : هو تباين العينة .

n : حجم العينة .

ولإيجاد فترة الثقة للانحراف المعياري ، نأخذ الجذر التربيعي لطرفي فترة الثقة للتباين .

مثال :- عينة عشوائية حجمها ٢٥ أخذت من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فاعطت التباين $S^2 = 15$ ، اوجد فترة 90% ثقة للتباين σ^2 ؟

الحل:-

$$1 - \alpha = 90\%$$
$$\alpha = 10\%$$
$$\alpha/2 = 5\% = 0.05$$
$$1 - \alpha/2 = 1 - 0.05 = 0.95$$

من جدول توزيع كاي تربيع نجد أن :

$$\chi^2 [0.05 , 19] =$$
$$\chi^2 [0.95 , 19] =$$

وحسب النظرية السابقة ، فإن فترة الثقة هي :

$$\left[\frac{19 \times 15}{30.144} , \frac{19 \times 15}{10.117} \right]$$

$$= [9.45 , 28.17]$$

$$[\sqrt{9.45} , \sqrt{28.17}]$$

$$= [3.07 , 5.31]$$

فترات الثقة للنسبة بين تباينين :-

نظرية (8) : إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وكانت $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ عينة عشوائية من $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن المجتمع الأول، فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ هي :-

$$\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} F[\alpha/2; n_1-1, n_2-1] , \frac{S_2^2}{S_1^2} F[1-\alpha/2; n_1-1, n_2-1]\right)$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1 = 9$ من مجتمع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ فوجد $S_1^2 = 6.34$ [illegible] وأخذت عينة عشوائية أخرى [illegible] من مجتمع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فوجدت [illegible]، أوجد فترة 90% ثقة للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

الحل :-

$1-\alpha = 90\%$

$\alpha = 10\%$

$\alpha/2 = 5\% = 0.05$

$1-\alpha/2 = 0.95$

من جدول توزيع F نجد أن :

$$F[0.05;8,10] = \frac{1}{F[0.95;10,8]}$$

$$= \frac{1}{3.35} = 0.3$$

$$F[0.95;8,10] = 3.07$$

ومن صيغة القانون للنظرية السابقة نجد أن :

$$\left[\frac{127.3}{65.4} \times 0.3 \; , \; \frac{127.3}{65.4} \times 3.07\right]$$

$$[0.583 \; , \; 5.98]$$

نهاية الفصل الخامس

أمثلة :-

1) أخذت عينة عشوائية حجمها 400 من طلبة المرحلة الاعدادية فوجد أن 80 منهم حاصلون على شهادة البكالوريوس :-

أ) قدر نسبة الطلبة في المرحلة الاعدادية الحاصلين على شهادة البكالوريوس .

ب) أوجد فترة 99٪ ثقة للنسبة الحقيقية للطلبة في هذه المرحلة الحاصلين على شهادة البكالوريوس ؟

الحل :-

أ) نقدر نسبة الطلبة لهذه المرحلة كالتالي :-

النسبة $= \frac{80}{400} = 0.2$.

(لاحظ أن $\bar{P} = \frac{X}{n}$) . التقدير النقطي للنسبة الحقيقية P هو $\bar{P}$.

ب) من خلال استخدام النظرية رقم (5) نجد أن

$$\left(0.2 - Z_{0.995}\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{400}}\ ,\ 0.2 + Z_{0.995}\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{400}}\right)$$

$$(0.2 - 2.58 \times 0.02\ ,\ 0.2 + 2.58 \times 0.02)$$

$$(0.148\ ,\ 0.252)$$

$1 - \alpha = 99\%$
$\alpha = 1\%$
$= 0.01$
$\alpha/2 = 0.005$
$1 - \alpha/2 = 0.995$

E: ينتج احد المصانع مصابيح كهربائية تخضع اعمارها تقريباً لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 35 ساعة. اخذت عينة عشوائية حجمها 25 مصباحاً فكان الوسط الحسابي لاعمار هذه المصابيح 890 ساعة. اوجد فترة 98% ثقة لمعدل اعمار المصابيح ؟

(نلاحظ أن الانحراف المعياري للمجتمع معلوم)

الحل: نلاحظ أن:

$\bar{x} = 890$ ، $n = 25$ ، $\sigma = 35$

من نظرية رقم (1) نلاحظ أن

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{x} + Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(890 - Z_{0.99} \times \frac{35}{\sqrt{25}} \,,\, 890 + Z_{0.99} \times \frac{35}{\sqrt{25}}\right)$$

$$\left(890 - 2.33 \times 7 \,,\, 890 + 2.33 \times 7\right)$$

$$\left(890 - 16.31 \,,\, 890 + 16.31\right)$$

$$\left(873.69 \,,\, 906.31\right)$$

ملاحظات :-

عند ايجاد فترات التقدير للوسط الحسابي للمجتمع μ نلاحظ أن :-

١- اذا كان السحب من مجتمع طبيعي تباينه معلوم فاننا نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري .

٢- اذا كان السحب من مجتمع ما تباينه معلوم فاننا نستخدم ايضاً جداول التوزيع الطبيعي المعياري بشرط $n \geq 30$.

٣- اذا كان السحب من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم فاننا نستخدم جداول توزيع t .

٤- في حال السؤال عن التقدير للنسبة سواء لمجتمع واحد أو مجتمعين فاننا نستخدم جداول التوزيع الطبيعي .

٥- في حال السؤال عن التقدير للتباين :-

أ) اذا كان السؤال عن مجتمع واحد ، فاننا نستخدم توزيع كاي تربيع

ب) اذا كان السؤال عن النسبة بين تبايني مجتمعين فاننا نستخدم توزيع F .

- شاكراً حسن حضوركم واستماعكم

المحاضرة الثامنة عشر من
الاسبوع الحادي عشر
الفصل السادس: اختبار الفرضيات
Test of Hypothesis

مقدمة :-
تصادفنا العديد من المشاكل في حياتنا اليومية ويجب اخذ قرار ملائم بشأن تلك المشاكل، وبما أن اغلب الدراسات هي مستمدة من العينة المسحوبة من المجتمع، ونجد عملية التقدير للمعالم المختلفة لذلك المجتمع فإنه علينا ان نحصل المزيد من الثقة، لذا لابد من اتخاذ قرار حول صحة فرضية معينة أو عدم صحتها. ويسمى هذه الطريقة باختبار الفرضيات. ولاتخاذ القرار الاحصائي يجب النظر الى الفروض الاحصائية أولاً وبناءً عليه لابد من توضيح بعض المفاهيم المتعلقة بها كالآتي :-

* الفرضية الاحصائية :-

تعريف :- الفرضية الاحصائية هي كل عبارة عن إحدى معالم المجتمع أو عدة معالم تكون قابلة للاختبار وبالتالي تكون صحتها او عدم صحتها بحاجة الى قرار. وبصورة عامة تتعلق الفرضيات الاحصائية بعبارة عن إحدى معالم المجتمع مثل الوسط الحسابي أو نسبة النجاح أو التباين أو غيرها، أو عدة معالم مثل المقارنة بين معلمتين أو اكثر.

في الغالب هنالك نوعان من الفرضيات الاحصائية في المسألة الواحدة :

١- الفرضية الصفرية (الابتدائية) : وهي الفرضية التي نشك على أمل أن نتخذ قرار بعدم صحتها، ونطلق من الآن في الاختبار أي فرضية نود اختبارها بالفرضية الصفرية ويتم التعبير عنها بالرمز H_0 .

٢- الفرضية البديلة : وهي الفرضية البديلة للفرضية الصفرية في حال عملية الرفض للفرضية الصفرية يتم قبول الفرضية البديلة ويرمز لها بالرمز H_1 .

مثال : يدعي أحد المصانع في نشرة المواصفات للمصابيح الكهربائية التي ينتجها أن معدل عمر المصابيح هو 500 ساعة للمصباح الواحد . أردت اختبار هذا الادعاء ، اكتب الفرضية الصفرية والفرضية البديلة ؟

الحل :- نفرض أن معدل عمر المصابيح التي ينتجها ذلك المصنع بالرمز μ .

إذن تصبح الفرضية الصفرية على الصورة :-

$$H_0 : \mu = 500$$

أما الفرضية البديلة فتعتمد على الحالة المتوقعة التي نريد اجراء الاختبار من أجلها . فمثلاً إذا كنت نريد اختبار H_0 بغرض التأكد من ذلك المصنع بأننا نضع الفرضية البديلة في الشكل :-

$$H_1 : \mu > 500$$

(لاحظ أن الفرضية البديلة لا تعني قيمة محددة للوسط الحسابي μ بل سمحت بفترة من القيم تتميز بكبرها عن (500 مثلاً)

* الأخطاء الناتجة عن عملية صياغة الفرضيات :-

كل قرار مبني على نتائج عينة ما يكون معرضاً للخطأ، فعند صياغة الفرضية فإن طريقة اتخاذ القرار قد تؤدي إلى الوقوع في نوعين من الأخطاء هما:

١- الخطأ من النوع الأول: حيث يحدث هذا النوع في حال تم رفض الفرضية الصفرية وهي في الواقع صحيحة، ويعبر عنه بالرمز α .

٢- الخطأ من النوع الثاني: يحدث هذا النوع في حال عدم رفض الفرضية الصفرية وهي في الواقع خاطئة، ويعبر عن هذا الخطأ بالرمز β .

والجدول التالي يوضح ذلك :-

	الحالة الحقيقية H_0 صحيحة	H_1 صحيحة
عدم رفض H_0	قرار صائب	خطأ من النوع الثاني β
رفض H_0	خطأ من النوع الأول α	قرار صائب

وفي هذا الباب سيتم التعامل مع النوع الأول فقط من الأخطاء (α) حيث سيتم تسميته بمستوى الدلالة .

* خطوات اختبار الفرضيات :-

الخطوة الأولى: تحديد توزيع المجتمع

يجب أولاً معرفة فيما إذا كان المتغير العشوائي يتوزع توزيعاً طبيعياً، او يتبع توزيع ذي الحدين أو غيره من التوزيعات الأخرى حيث تعتبر هذه نقطة مهمة في عملية اتخاذ القرار الملائم. وبما أن معظم التوزيعات تقترب من التوزيع الطبيعي وخاصة إذا كانت العينات كبيرة فلذلك سنستخدم في اختبار الفرضيات في هذا التوزيعات الطبيعية في الغالب.

الخطوة الثانية: صياغة الفرضيات.

يتم صياغة الفرضية الصفرية H_0 والمراد اختبارها والتي تتقدم في تحديد قيمة الحالة للمجتمع بحيث تكون في الشكل التالي:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

حيث μ_0 تمثل قيمة معينة لهذا المتوسط.

أما الفرضية البديلة فتأتي في احد الاشكال التالية:-

أ) $H_1 : \mu \neq \mu_0$

حيث يسمى هذا الاختبار بالاختبار من طرفين.

ب) $H_1 : \mu > \mu_0$

ويسمى اختبار من جهة اليمين.

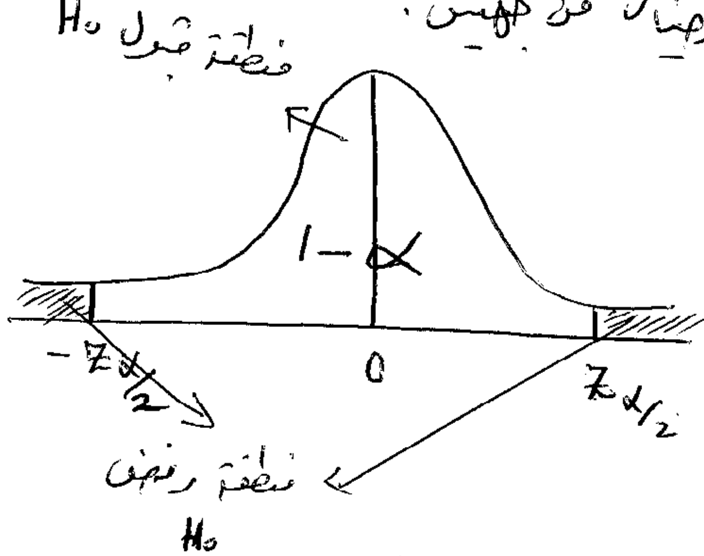
ج) $H_1 : \mu < \mu_0$

ويسمى اختبار من جهة اليسار.

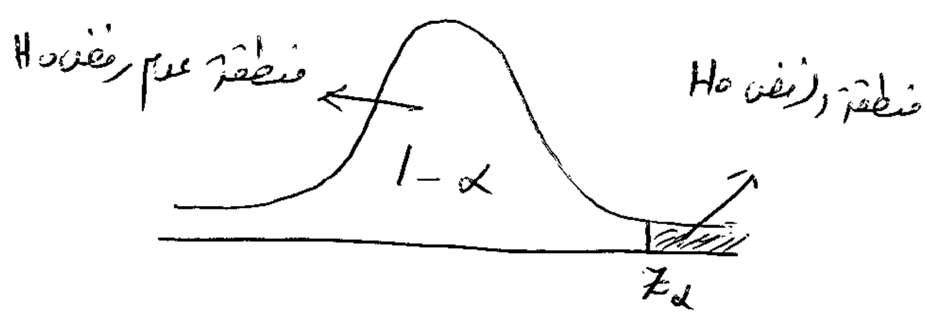
الخطوة الثالثة :- اختيار مستوى الدلالة α .

يتم من خلال هذه الخطوة تحديد قيمة α والتي من خلال سيتم تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض للحالات الثلاث التي تم ذكرها (الفرضية البديلة) والأشكال التالية توضح ذلك :-

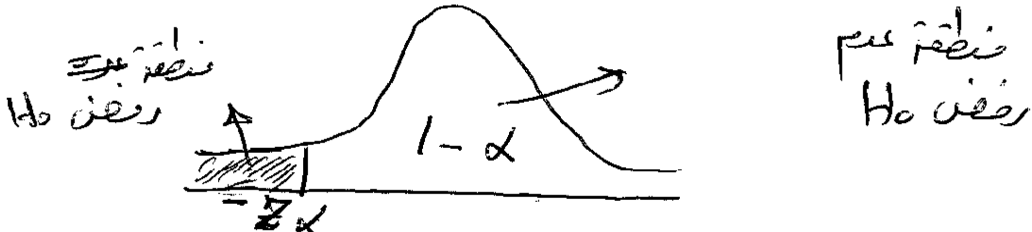
أولاً :- اختبار الفرضيات من جهتين .



ثانياً : اختبار الفرضية من الطرف الأيمن :-



ثالثاً : اختبار الفرضيات من الطرف الأيسر :-



الخطوة الرابعة :- احصاء الاختبار (دالة الاختبار) .

وهي الاحصاء المحسوب من قيم العينة حيث يتم مقارنة هذا الاحصاء الذي تم حسابه من عينة مسحوبة من المجتمع مع القيمة الجدولية على مستوى دلالة α معين لتحديد منطقة القبول أو منطقة الرفض .

الخطوة الخامسة :- اتخاذ القرار .

وهي عملية رفض الفرضية الصفرية او قبولها بناءً على عملية مقارنة بين احصاء الاختبار مع منطقة الرفض ، فإذا وقعت دالة الاختبار في منطقة الرفض فإننا نرفض H_0 وندعم H_1 أما في حال وقوع دالة الاختبار في منطقة القبول فإننا ندعم H_0 ونهمل H_1 .

المحاضرة التاسعة عشر من
الاسبوع الحادي عشر
اختبار الفرضيات

- اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي :

نظرية (١) : اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ بحيث كان التباين (σ^2) معلوم، فان احصاء الاختبار (دالة الاختبار) للفرضية المبدئية $H_0: \mu = \mu_0$ هو $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي للعينة ، بحيث تتم خطوات الاختبار على النحو الآتي :-

١) اختبر الفرضية $H_0: \mu = \mu_0$

٢) مقابل الفرضية البديلة

$$\text{i) } H_1: \mu \neq \mu_0$$
$$\text{ii) } H_1: \mu > \mu_0$$
$$\text{iii) } H_1: \mu < \mu_0$$

٣) مستوى الدلالة α .

٤) دالة الاختبار : تحت فرض ان H_0 صحيحة فان احصاء الاختبار هو $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ يخضع لتوزيع طبيعي معياري .

٥) القيم الحرجة ومنطقة الرفض...

i) ارفض الفرضية المبدئية H_0 اذا كان

$$Z < Z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z > Z_{1-\alpha/2}$$

دالة الاختبار من الفرع (٤)

تحسب بشكل من الجداول الاحصائية بناءً على مقدار الخطأ المحدد في السؤال

ii) ارفض H_0 اذا كان

$Z > Z_{1-\alpha}$ دالة الاختبار من رقم ٤

من الجداول الاحصائية

iii) ارفض H_0 اذا كان

$Z < Z_{\alpha}$ دالة الاختبار من رقم ٤

من الجداول الاحصائية

مثال:- تخضع اوزان عبوات احد المساحيق للغسيل للتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 7غم ومعدله μ غم، على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ اختبر الفرضية:-

$$H_0: \mu = 50$$

مقابل الفرضية البديلة

$$H_1: \mu \neq 50$$

اذا علمت ان الوسط الحسابي لعينة حجمها 12 علبة هو $\bar{X} = 56$ غم.

الحل :- أولاً يجب إيجاد قيمة دالة الاختبار

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{56 - 50}{7/\sqrt{12}} = 2.97$$

عملية المقارنة وتحديد المنطقة الحرجة :-

$Z_{1-\alpha/2}$ و Z_{α} ??

$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0.05} = Z_{0.95}$ لم تتم الاستفادة منه في هذا المثال

$Z_{1-\alpha/2} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975}$.

$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025}$.

من الجداول الاحصائية نجد أنه :-

$Z_{0.975} = 1.96$ و $Z_{0.025} = -1.96$

ارفض H_0 اذا كان :-

$$\underbrace{Z = 2.97 > Z_{0.975} = 1.96}_{\text{مقارنة صحيحة}}$$

القرار : نرفض H_0 وندعم H_1 .

نظرية (٢) (الاختبارات الفرضية المتعلقة بالوسط الحسابي لمجتمع طبيعي تباينه غير معلوم وحجم العينة صغير).

نظرية: اذا اخذت عينة عشوائية حجم n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ بحيث كان التباين غير معلوم، فإن دالة الاختبار هي $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ تخضع لتوزيع t بدرجات حرية $n-1$. وتتم خطوات الاختبار كالتالي:

١) $H_0: \mu = \mu_0$.

٢) هناك البديل

i) $H_1: \mu \neq \mu_0$

ii) $H_1: \mu > \mu_0$

iii) $H_1: \mu < \mu_0$

٣) مستوى الدلالة α.

٤) احصاء الاختبار

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

اتخاذ القرار ومناطق الرفض:

i) ارفض H_0 اذا كانت $T > t[1-\alpha/2, n-1]$ أو $T < -t[1-\alpha/2, n-1]$

ii) ارفض H_0 اذا كانت $T > t[1-\alpha, n-1]$.

(iii) ارفض H_0 اذا كان

$$T < -t[1-\alpha, n-1].$$

مثال :- الهدف ـ حلاج إحدى المدارس أن معدل تحصيل الطلبة في امتحان اللغة الانجليزية الذي يتقدمون له عند طلب الالتحاق بالجامعات الامريكية هو 410 . بدأت المدرسة باعطاء دورات تقوية للطلبة . اختبر فرضية أن هذا المعدل قد تحسن اذا اعطت نتائج 14 طالبة وسطا حسابية مقداره $\bar{X} = 418$ بانحراف معياري $S = 21$ ؟

(اعتبر مستوى الدلالة $\alpha = 1\%$) .

وان نتائج الطلاب تخضع لتوزيع طبيعي .

الحل :- 1) $H_0 : \mu = 410$

2) $H_1 : \mu > 410$

3) $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

$$= \frac{418 - 410}{21/\sqrt{14}} = 1.42$$

4) عملية المقارنة واتخاذ القرار :

$$T > t[1-\alpha, n-1].$$

$$1.42 > t[0.99, 13]$$

$$1.42 > 2.65$$

نلاحظ ان الجملة الحسابية غير صحيحة (بمعنى أن دالة الاختبار لم تقع في منطقة الرفض)

وبذلك فاننا ندعم H_0 ونهمل H_1 (لا نستطيع أن نستنتج ان معدل تحصيل الطلبة قد تحسن بعد اعطاء الدورات)

المحاضرة العشرون

الفصل السادس : اختبار الفرضيات

اختبار الفرضيات المتعلقة ~~بالحد~~ بالفرق بين وسطين :-

نظرية (٣) : اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ واخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 من مجتمع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ بحيث كانت مستقلة عن الاولى، وكان σ_1^2 ، σ_2^2 معلومتين فإن احصاء الاختبار للفرضية $H_0: \mu_1=\mu_2$ هي :-

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري ، حيث $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ هما وسطا العينتين على التوالي .

(نلاحظ أن خطوات الاختبار في هذه الحالة هي نفس خطوات الاختبار التي تم عرضها في نظرية (1)) .

خطوات الاختبار :-

1) $H_0: \mu_1 = \mu_2$

2)
i) $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
ii) $H_1: \mu_1 > \mu_2$
iii) $H_1: \mu_1 < \mu_2$

٣) دالة الاختبار

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

٤) على مستوى الدلالة α

٥) ارفض H_0 اذا كان:

i) $Z > Z_{1-\alpha/2}$

أو

$Z < Z_{\alpha/2}$.

ii) $Z > Z_{1-\alpha}$.

iii) $Z < Z_{\alpha}$.

مثال: اخذت عينتان مستقلتان حجمها 72 ، 27 على التوالي من المجتمعين $N(\mu_1, 144)$ ، $N(\mu_2, 81)$ فاعطتا الوسطين $\bar{X} = 73$ ، $\bar{Y} = 69$. اختبر الفرضية $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرضية $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ؟

الحل:

$$Z = \frac{73 - 69}{\sqrt{\frac{144}{72} + \frac{81}{27}}} = \frac{4}{2.236}$$

$$= 1.79$$

قيمة دالة الاختبار

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0.05}$$
$$= Z_{0.95}$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن

$$Z_{0.95} = 1.645$$

هل

$$Z > Z_{0.95}$$
$$1.79 > 1.645$$

نرفض H_0 وندعم H_1 .

أختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة :

إنّ اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة يشبه اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي للمجتمع حيث يتغير فقط طريقة ايجاد دالة الاختبار في هذه الحالة.

نظرية (4) : إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع ذات الحدين (مجتمع برنوللي) $b:(1, P)$ بحيث كان $\bar{P}$ هي نسبة النجاح في العينة يأتي دالة الاختبار

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

تخضع للتوزيع طبيعي معياري بشرط أن تكون n كبيرة ($n \geq 30$) ،
حيث P_0 : هي نسبة النجاح للمجتمع ، $\bar{P}$: هي نسبة النجاح للعينة .
أما خطوات الاختبار هي كالآتي :

1) الفرضية الصفرية :

$$H_0: P = P_0$$

2) الفرضية البديلة :

i) $H_1: P \neq P_0$

ii) $H_1: P > P_0$

iii) $H_1: P < P_0$

3) مستوى الدلالة α .

4) إحصاء الاختبار

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

5) نرفض H_0 إذا كان :

i) $Z > Z_{1-\alpha/2}$

أو

$Z < Z_{\alpha/2}$

ii) $Z > Z_{1-\alpha}$

iii) $Z < Z_\alpha$.

مثال :- من المعلوم أن نسبة مستخدمي حزام الأمان في السيارات (قبل تشريع إلزام الاستعمال) هي 0.8 . درست عينة عشوائية حجمها 200 سائق بعد صدور التشريع الإلزامي، فوجد أن 170 سائق يستعملون الحزام. اختبر الفرضية ما إذا كان التشريع قد زاد نسبة المستخدمين لحزام الأمان عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.10$ ؟

الحل: أختبر $H_0: P = 0.8$

مقابل $H_1: P > 0.8$

على مستوى الدلالة $\alpha = 0.10$ ؟

نلاحظ أن $\bar{P} = \frac{170}{200} = \frac{17}{20}$

$= 0.85$.

ثم نجد دالة الاختبار :-

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

$$= \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{200}}} = 1.8$$

هل $\underline{\underline{Z}} > Z_{1-\alpha}$

$1.8 > Z_{0.90} \Rightarrow 1.8 > 1.28$

المنحنى :-
المتباينة صحيحة
وعليه نرفض H_0
ونعمم H_1
(القرار: الزام السائقين
باستخدام حزام الأمان قد
رفع من نسبة السائقين
الذين يلتزمون باستخدامه)

المحاضرة الحادية والعشرون

الفصل السادس : اختبار الفرضيات

اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتين :-

نظرية (5) : اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع برنولي $b(1, p_1)$ واخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 مستقلة عن الأولى من مجتمع برنولي $b(1, P_2)$ فإن احصاء الاختبار للفرضية $H_0 : P_1 = P_2$ هو :-

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n_1} + \frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n_2}}}$$

يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري تقريباً بشرط أن تكون n_2, n_1 كبيرتين.

حيث $\bar{P}_1$: نسبة النجاح للعينة الأولى.

$\bar{P}_2$: نسبة النجاح للعينة الثانية.

ولحساب $\bar{P}$ (النسبة المشتركة بين العينتين)، يمكن استخدام الصيغة

$$\bar{P} = \frac{n_1 \bar{P}_1 + n_2 \bar{P}_2}{n_1 + n_2}$$

ولاجراء الاختبار للفرضية المبدئية، فإننا نتبع الخطوات السابقة من النظرية (4) مع اخذ بعين الاعتبار احصاء الاختبار في نظرية (5).

مثال :- للمقارنة بين نسبة المدخنين في الفئة العمرية (18-25) سنة مع الفئة العمرية (26-30) سنة، أخذت عينة عشوائية حجمها 200 شخص من الفئة الأولى ووجد أن 80 شخص منهم يدخنون، أخذت عينة عشوائية ثانية من الفئة الأخرى حجمها 100 شخص ووجد أن 52 شخص منهم يدخنون. اختبر الفرضية :-

$$H_0: P_1 = P_2$$

مقابل

$$H_1: P_1 < P_2$$

على مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ؟

الحل :-

① $H_0: P_1 = P_2$

② $H_1: P_1 < P_2$

③ مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$

④ إحصاء الاختبار :-

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n_1} + \frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n_2}}}$$

⑤ $Z < z_{\alpha}$

$$\bar{P} = \frac{n_1 \bar{P}_1 + n_2 \bar{P}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{200\left(\frac{80}{200}\right) + 100\left(\frac{52}{100}\right)}{200 + 100} = \frac{132}{300} = 0.44$$

$$Z = \frac{\frac{80}{200} - \frac{52}{100}}{\sqrt{\frac{0.44(1-0.44)}{200} + \frac{0.44(1-0.44)}{100}}}$$

$$= -1.967$$

قيمة احصاء الاختبار.

$$-1.645 = Z_{0.05} \Leftarrow Z_\alpha$$ ولإيجاد قيمة

$$-1.967 < -1.645$$ حل

صحيح وبذلك نهمل H_0 ونعتمد H_1.

مراجعة للفصل الخامس (التقدير)

التقدير بفترة :-

التقدير للوسط الحسابي

نظرية (١) + (٢) ← مجتمع طبيعي تباينه معلوم + مجتمع تباينه معلوم $(n \geq 30)$

⇓

كلاهما يتبعان توزيع Z

نظرية (٣) ← مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم

⇓

يتبع توزيع t بدرجات حرية $n-1$.

نظرية (٤) ← أكثر من مجتمع طبيعي تباينهما معلوم

⇓

يتبع توزيع الطبيعي المعياري Z .

التقدير بالنسبة :

نظرية (٥) ← مجتمع واحد

⇓

يتبع توزيع Z (الطبيعي المعياري) .

نظرية (٦) ← مجتمعين

⇓

يتبع توزيع Z (الطبيعي المعياري) .

التقدير للتباين

نظرية (٧) ← مجتمع واحد

⇓

يتبع توزيع كاي تربيع بدرجات حرية $n-1$.

نظرية (8) ← مجتمعين

⇓

يتبع توزيع F بدرجات حرية n_1-1 ، n_2-1

مراجعة للفصل السادس
(الاختبار الفرضيات)

اختبار الفرضيات للوسط الحسابي (μ) :-

نظرية (1)
مجتمع تباينه معلوم (طبيعي) (حجم العينة صغير)
⇓
يتبع توزيع Z .

نظرية (2)
مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم (حجم العينة صغير)
⇓
يتبع توزيع t بدرجات حرية n-1

نظرية (3)
الفرق بين وسطي مجتمعين (تباينهما معلوم)
⇓
يتبع توزيع Z .

اختبار الفرضيات لمعلمة النسبة

نظرية (4)
مجتمع واحد
⇓
يتبع توزيع Z .

نظرية (5)
الفرق بين نسبتي مجتمعين
⇓
يتبع توزيع Z .

المحاضرة المباشـرة الرابعة

الاحصـــــــاء للإدارة

د. رائـــــد الخصاونة

الواجب الأول

س: إذا كان التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X على التوالي يساوي 5 ، 2 ، وكان لدينا التحويل الخطي $Y = -2X+10$ فإن قيمة التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي Y هي :-

أ) صفر، 8 ب) 8، صفر ج) صفر، -4 د) -4، صفر

الحل :- دائماً التوقع الرياضي يتأثر بالتحويل الخطي كاملاً، فيكون

$$E(Y) = -2\,E(X) + 10$$
$$= -2 \times 5 + 10 = -10 + 10$$
$$= 0 .$$

أما التباين للمتغير Y سيكون عبارة عن حاصل ضرب مربع معامل X فقط، وبذلك

$$\sigma_Y^2 = (-2)^2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$$

س: المتغير العشوائي X يرمز لظهور عددين متشابهين في إلقاء حجري نرد، فإن احتمال X يساوي :-

أ) $\frac{1}{3}$ ب) $5/6$ ج) $1/6$ د) $1/4$

الحل :- لاحظ أن عناصر هذا الحادث ولكن A هي :-

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

فيكون

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

س ٣ :- اذا كان $P(A) = P(B) = P(B/A) = 0.2$

فإن $P(A \cup B)$ يساوي

أ) 0.40 ب) 0.20 ج) 0.04 د) $\boxed{0.36}$

الحل :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وبما أن $P(B) = P(B/A)$ ، إذن الحادثين مستقلين

ومنه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ، ينتج أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= 0.2 + 0.2 - 0.2 \times 0.2$$

$$= 0.4 - 0.04$$

$$= 0.36.$$

الحل :- لاحظ أن عناصر هذا الحادث ولكن A هي :-

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

فيكون

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

س٣ :- اذا كان $P(A) = P(B) = P(B/A) = 0.2$
فان $P(A \cup B)$ يساوي

أ) 0.40 ب) 0.20 ج) 0.04 $\boxed{\text{د) } 0.36}$

الحل :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وبما أن $P(B) = P(B/A)$ ، إذن الحادثين مستقلين
ومنه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ، ينتج أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$
$$= 0.2 + 0.2 - 0.2 \times 0.2$$
$$= 0.4 - 0.04$$
$$= 0.36.$$

الواجب الثاني

س١ : القيمة المعيارية المقابلة للمتغير $X=5$ والذي ينتمي للتوزيع الطبيعي $N(5,81)$ هي :

أ) ١ ب) ٩ ج) 5 د) $\boxed{\text{صفر}}$

الحل :-

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{5-5}{9} = \frac{0}{9} = 0$$

س٢ : أوجد قيمة المساحة حيث

$$t[\alpha, 10] = -1.372$$

الحل :- لاحظ أن قيمة المساحة صغيرة في السؤال وذلك بسبب وجود اشارة السالب في الناتج من الطرف الأيمن بالرجوع الى جدول توزيع t نجد أن :

$$t[\alpha, 10] = 1.372$$

هي $\alpha = 0.90$ ، وبأخذ المتممة نجد أن

$\alpha = 0.10$.

أ) 0.75 ب) 0.90 ج) 0.25 د) 0.10

س: اذا كان معدل المواليد في مستشفى ما هو 3 اطفال في اليوم الواحد، فإن احتمال عدم ولادة اي مولود في ذلك المستشفى في يوم ما هو :

أ) 1 ب) صفر ج) 0.5 د) 0.05

الحل :- من خلال كلمة " معدل " في نص السؤال، نلاحظ أن هذا التوزيع هو توزيع بواسون والذي صيغته تكتب على الصورة :

$$P(X, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

وبما ان المتغير العشوائي في هذه الحالة هو صفر فيكون الحل :-

$$P(0, 3) = \frac{e^{-3} \times 3^{0}}{0!} = e^{-3} = \frac{1}{e^{3}} = 0.049 \simeq 0.05$$

س: اذا كان X متغير ذات الحدين بحيث كان $n = 10$، $P = 0.7$ فإن تباين المتغير العشوائي X يساوي :-

أ) 7 ب) 0.21 ج) 2.1 د) 3

الحل :

$$\sigma_x^2 = npq = np(1-p)$$
$$= 10(0.7)(0.3)$$
$$= 2.1$$

س : قيمة $F[0.01,5,6]$ هي

أ) 0.23　　ب) 4.39　　ج) 4.95　　د) 0.20

الحل :- نلاحظ أن قيمة المساحة صغيرة في توزيع F وبذلك نستخدم التحويل :-

$$F[\alpha, v_1, v_2] = \frac{1}{F[1-\alpha, v_2, v_1]}$$

$$F[0.01, 5, 6] = \frac{1}{F[0.99, 6, 5]}$$

$$= \frac{1}{10.97} = \underline{\underline{0.09}}$$

س : سحبت عينة عشوائية من مجتمع لانهائي معدله 100 وتباينه 40 . إذا كان حجم العينة 10 فإن قيمة الانحراف المعياري هي :-

أ) 4　　$\boxed{\text{ب) } 2}$　　ج) 10　　د) 1

الحل :- نلاحظ أن تباين $\bar{X}$ هو :-

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{40}{10} = 4$$

وبذلك

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{4} = 2$$

س٧: عينة عشوائية حجمها 25 تخضع لتوزيع طبيعي وسطه 15 وانحراف معياري = 5 ، احسب احتمال أن يقل الوسط الحسابي للعينة عن 17 :

أ) ٠.٩٨١٧ ب) $\boxed{0.9772}$ ج) ٠.٥٠٠٠ د) ٠.٠٢٢٨

الحل :- المطلوب :-

$$P(\bar{X} < 17) = ??$$

القيمة المعيارية المقابلة لـ $\bar{X}$ هي :-

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{17 - 15}{5 / \sqrt{25}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$P(Z < 2) = 0.9772$$

س٨: عينة عشوائية حجمها ١٦ أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري 12 ساعة ، معدل 30 ساعة ، فترة ٩٠٪ ثقة للوسط الحسابي للمجتمع μ هي :-

أ) $\boxed{(25.08, 34.92)}$ ب) $(24.24, 35.76)$

ج) $(24.08, 31.92)$ د) $(25.24, 30.76)$

الحل : نلاحظ أن الانحراف المعياري يعود للمجتمع ، فنحن نستخدم توزيع Z في هذه الحالة :-

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X} + Z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(30 - Z_{0.95} \times \frac{12}{4} \,,\, 30 + Z_{0.95} \times \frac{12}{4}\right)$$

$$(30 - 1.64 \times 3 \,,\, 30 + 1.65 \times 3)$$

$$(25.08 \,,\, 34.92)$$

س : ان قيمة $P(Z > 2.99)$ هي :-

أ) 0.9986   ب) 0.9981   ج) 0.0019   د) $\boxed{0.0014}$

الحل :-

$$P(Z > 2.99) = 1 - P(Z < 2.99)$$
$$= 1 - 0.9986$$
$$= 0.0014$$

س : من خصائص منحنى التوزيع الطبيعي

أ) شكله يشبه الجرس

ب) المساحة أسفل المنحنى تساوي 1

ج) يتقارب منحنى طرفيه من الصفر عندما X تقترب من $\pm \infty$

$\boxed{\text{د}}$) جميع ما ذكر صحيح

تمارين على الفصل السادس

سؤال: تخضع درجات الطلاب في مقرر الاحصاء للتوزيع طبيعي انحراف المعياري 10 درجات ومعدله μ . اختبر الفرضية

$$H_0: \mu = 70$$

مقابل الفرضية

$$H_1: \mu < 70$$

عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ اذا علمت أن الوسط الحسابي لعينة من الطلاب حجمها 16 اعطت وسطاً مقداره 65 درجة.

الحل :- ① نجد دالة الاختبار :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{65 - 70}{10/4} = \frac{-5}{2.5} = -2$$

② نجري عملية المقارنة من خلال الحالة الثالثة

$$Z < Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$$

$$-2 < -Z_{0.95}$$

$$-2 < -1.64$$

المتباينة صحيحة
نرفض H_0 ونقبل H_1 .

- شاكراً حسن حضوركم واستماعكم