المحاضرة الثانية عشرة

التكامل

التكامل غير المحدد:

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وتسمى عملية ايجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل . ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x).dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير x .

قواعد التكامل:

1. $\int dx = x + c$ حيث c ثابت التكامل

2. $\int a\,dx = ax + c$ حيث a ثابت

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , n \neq -1$

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ حيث a ثابت

5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

6. $\int e^x dx = e^x + c$

7. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c \ , x \neq 0$

8. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

9. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

10. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

11. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

12. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

13. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

أمثلة:

$$1.\quad \int 5\,dx = 5x + c$$

$$2.\quad \int (7x+3)\,dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + c$$

$$3.\quad \int 3x^2\,dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$$

$$4.\quad \int (3\sin x + 2x)\,dx = -3\cos x + \frac{2x^2}{2} + c = -3\cos x + x^2 + c$$

$$5.\quad \int (x + \sec^2 x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \tan x + c$$

$$6.\quad \int (x^{\frac{1}{2}} + 4)\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$$

$$7.\quad \int (4e^x + x^{-1})\,dx = \int \left(4e^x + \frac{1}{x}\right)dx = 4e^x + \ln|x| + c$$

ملاحظات :

$$1.\quad \int [f(x)]^n . f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \,, n \neq -1$$

أمثلة:

$$i.\quad \int 3(x^3+4)^4 x^2\,dx = \frac{(x+4)^5}{5} + c$$

$$ii.\quad \int (x^2+1)^3 x\,dx = \frac{1}{2}\int 2(x^2+1)^3 x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

$$= \frac{(x^2+1)^4}{8} + c$$

$$iii.\quad \int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

$$iv.\quad \int \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

$$2.\quad \int [f(x)]^n . f'(x)\,dx = \ln|f(x)| + c \,, n = -1$$

أمثلة:

$$i.\quad \int x^3(1+x^4)^{-1}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(1+x^4)^{-1}\,dx = \frac{1}{4}|1+x^4| + c$$

$$ii.\quad \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int 2x(1+x^2)^{-1}\,dx = |1+x^2| + c$$

$$3.\ \int f'(x).e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

أمثلة:

$$i.\ \int e^{\sin x}\cos x\ dx = e^{\sin x} + c$$

$$ii.\ \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$iii.\ \int x^2e^{3x^3}dx = \frac{1}{9}\int 9x^2e^{3x^3}dx = \frac{1}{9}e^{3x^3} + c$$

حل المعادلات التفاضلية:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = xy^{-2}$

الحل:

نفصل المتغيرين x، y عن بعضهما بحيث يصبح تفاضل كل منهما مضروباً في دالة لذلك المتغير فقط، كما نبين أدناه.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-2} = \frac{x}{y^2}$$

$$y^2dy = xdx$$

بإجراء التكامل للطرفين

$$\int y^2dy = \int xdx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c$$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3 = \frac{4x^3}{y^{-3}}$$

$$y^{-3}dy = 4x^3dx$$

$$\int y^{-3}dy = \int 4x^3dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{4x^4}{4} + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x^4 + c$$

تمارين

١. أوجد ناتج التكاملات الآتية:

i. $\int \left(5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6\right) dx$

ii. $\int \left(x^{1/2} - 3x^{2/3} + 5x^{-1/2}\right) dx$

iii. $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$

v. $\int \cos 3x \, dx$

vi. $\int \left(\sec^2 2x - 1\right) dx$

vii. $\int e^{2x} dx$

viii. $\int \frac{x^2 \, dx}{x^3 + 1} \quad , x \neq -1$

٢. حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

i. $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$

ii. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

iii. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$