المحاضرة الرابعة عشر

التقدير بالفترة

*ايجاد فترات الثقة للوسط الحسابيμ:

نظرية1:اذا اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي$N(\mu,\sigma^2)$ بحيث ان التباين للمجتمع σ^2 معلوم فان فترة الثقة $100(1-\propto)\%$ للمعلمه μ هي

$$(\bar{X}-Z_{\frac{1-\propto}{2}}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\bar{x}+Z_{\frac{1-\alpha}{2}}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$\bar{X}$=الوسط الحسابي للعينة

$Z_{\frac{1-\propto}{2}}$=قيمة Zالتي تكون المساحة على يسارها $\frac{1-\propto}{2}$

σ = الانحراف المعياري للمجتمع

n=حجم العينة

مثال: عينة عشوائية حجمها25اخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري4فاعطت $\bar{x}$=60 اوجد فترة الثقة 95% الوسط الحسابي μ

$$100(1-\propto)\%=95\%$$

$$1-\propto=\frac{98}{100}=0.98\%$$

$$\propto=1-0.98=0.02$$

$$\left(\bar{x}-Z_{\frac{1-\propto}{2}}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\bar{x}+Z_{\frac{1-\alpha}{2}}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(60-Z_{0.99}\ \frac{4}{\sqrt{25}}\ ,60+Z_{0.99}\ \frac{4}{\sqrt{25}}\right)$$

$$=\left(60-2.33\times\frac{4}{5}\ ,60+2.33\times\ \frac{4}{5}\right)$$

=(58.14,61.86)

مثال:عينة عشوائية حجمها 49اخذت من مجتمع تباينة 9 فاعطت $\bar{x}$=30 اوجد فترة الثقة 95 % للوسط الحسابي للمجتمعμ

الحل:

$$100(1-\propto)=95$$

$$1-\propto=0.95$$

$$\rightarrow\propto=1-0.95=0.05$$

$$\rightarrow 1-\frac{\propto}{2}=1-\frac{0.05}{2}=0.975$$

$$\left(\bar{x}-Z_{\frac{1-\propto}{2}}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\bar{x}+Z_{\frac{1-\propto}{2}}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(30-1.96\times\frac{3}{7}\ ,30+1.96\times\frac{3}{7}\right)$$

=(29.16, 30.84)

نظرية2: اخذت عية عشوائية من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم فأن فترة $100(1-\propto)\%$ ثقة الوسط الحسابيμ تعطى

$$(\bar{x}-t\left[1-\frac{\propto}{2}\ ,n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}}\ \ ,\bar{x}+t\left[1-\frac{\propto}{2}\ ,n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}}$$

مثال:اخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي فاعطت $\bar{x}=17.4$ $s=2.1$, اوجد فترة 95%

$$100(1-\propto)=95$$

$\rightarrow 1-\propto= 0.95$

$\rightarrow \propto= 1-0.95=0.05$

$\rightarrow 1-\frac{\propto}{2}=1-\frac{0.05}{2}=0.975$

$$\left(\bar{x}-t\left[1-\frac{\propto}{2},n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t\left[1-\frac{\propto}{2},n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(17.4-t[0.975,14]\frac{2.1}{\sqrt{15}},17.4+t[0.975,14]\frac{2.1}{\sqrt{15}})$$

فترةالثقة95% للوسط الحسابي μ $(16.24,18.56)$

تمرين:عينة عشوائية حجمها16اخذت من مجتمع طبيعي اذا علمت ان الوسط الحسابي للعينة يساوي20اوجد:

1-فترة الثقة 90% للوسط الحسابي μ اذا كان التباين يساوي9

2- فترة الثقة 90% للوسط الحسابي μاذا كان التباين العينة يساوي9

فترة الثقة للفريق بين وسطين

نظرية3:اذا كان X_1,X_2,X_3,X_{N1} عينة عشوائية من مجتمع طبيعي$N(\mu_1,\sigma_1^2)$ وكانت y_1,y_2,y_{n1} عينة عشوائية من مجتمع طبيعي اخر$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ بحيث ان معلومان فان فترة $100(1-\propto)$ ثقة الفريق بين الوسط الحسابي$\mu_1-\mu_2$ تعطى

$$(\bar{x}-\bar{y})-\frac{z_{1-\propto}}{2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\bar{x}-\bar{y})+\frac{z_{1-\alpha}}{2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

مثال:اخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي$N(\mu_1,25)$ ثم اخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي اخر $N(\mu_2,40)$ فاذا اعطت العينة الاول وسط حسابي = والعينة الثانية وسط حسابي 47اوجد

1-فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين $\mu_1 - \mu_2$

$$100(1-\propto) = 95$$

$$\rightarrow 1-\propto= 0.95$$

$$\rightarrow= \alpha 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\rightarrow= 1 - \frac{\propto}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$$

$$\left((\bar{x} - \bar{y}) - \frac{z_{1-\propto}}{2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_1}} \ , (\bar{x} \ - \ \bar{y} \ ) + \frac{z_{1-\propto}}{2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

$$\left((32 - 47) - Z_{0.975} \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} \ , (32 - 47) + Z_{0.975} \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} \right)$$

=(-20.1,-9,9)

2- فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين $\mu_2 - \mu_1$

$$100(1-\propto) = 90$$

$$1-\propto= 0.90 \rightarrow \propto= 1 - 0.9$$

$$\rightarrow \propto= 0.1$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\propto}{2} = 1 \frac{0.1}{2} = 1 - 0.05 \ = 0.95$$

$$((\bar{y} - \bar{x}) - \frac{z_{1-\propto}}{2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \ , (\bar{y} - \bar{x}) + \frac{z_{1-\propto}}{2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

$$= \left((47-32) - Z_{0.95}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}\,, (47-32) + Z_{0.95}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}} \right)$$

$$= (10.73\,, 19.27)$$

تقدير النسبة

نظرية4:اذا كانت $\bar{p} = \frac{x}{n}$ نسبة نجاح في عينة عشوائية حجمها n فان فترة الثقة $(1-\propto) = 100\%$ نسبة النجاح Pتعطى

$$\overline{P} - Z_{\frac{1-\propto}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\,, \bar{P} + Z_{\frac{1-\propto}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$$

مثال :اوجد فترة 95%ثقة لنسبة عدد الطلاب في احد المدارس الذين لديهم ضعف في البصر .اخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد 15 طالب لديهم ضعف البصر

$$\bar{P} = \frac{15}{100} = 0.15$$

$$(1-\propto) = = \rightarrow 1-\alpha = 0.95$$

$$\rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1\frac{0.05}{2} = 0.975$$

فترة الثقة للنسبة للنجاح p هي

$$\left(\bar{P} - \frac{Z_{1-\propto}}{2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\,, \bar{P} + \frac{Z_{1-\propto}}{2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \right)$$

$$= \left(0.15 - 1.96 \sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{100}} \ , 0.15 + 1.96 \sqrt{\frac{(0.05) \times (0.85)}{100}} \right)$$

=(0.08,0.22)

تقدير التباين

نظرية :اذا كانت n عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فان $x_1, x_2 \ldots$ فترة الثقة $100(1-\propto)\%$ للتباين σ^2 هي

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{x^2[1-\frac{\propto}{2}, n-1]} \ , \frac{(n-1)s^2}{x^2[\frac{\propto}{2}, n-1]} \right)$$

مثال :عينة عشوائية حجمها *20* اخذت من مجتمع طبيعي فاعطت تباين s^2*=15*

اوجد فترة 90% ثقة للتباين σ^2

$$(1-\propto) = 100 = 90 \rightarrow 1 - \alpha = 0.9$$

$$\rightarrow \propto = 0.1$$

$$1 - \frac{\propto}{2} = 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95$$

$$\frac{\propto}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{x^2[1-\frac{\propto}{2}, n-1]} \ , \frac{(n-1)s^2}{x^2[\frac{\propto}{2}, n-1]} \right)$$

$$= \left(\frac{(20-1)15}{x^2[0.05,19]} \ , \frac{(20-1)15}{x^2[0.05,19]} \right)$$

$$= \left(\frac{(19)(15)}{30.14} \ , \frac{(19)(15)}{6.84} \right)$$