

المحاضرة السادسة المتغيرات العشوائية المنفصلة

مثال :- حدد هل الدالة التالية تمثل توزيع احتمالي أم لا ؟

$$P(x) = (3_x) \times \frac{1}{8} \quad x = 0, 1, 2, 3$$

- 1) $P(x_i) \geq 0$
- 2) $\sum P(x_i) = 1$

$$\begin{aligned}
 1) P(0) &= (3_0) \cdot \frac{1}{8} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\
 P(1) &= (3_1) \cdot \frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\
 P(2) &= (3_2) \cdot \frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\
 P(3) &= (3_3) \cdot \frac{1}{8} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\
 \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} &= \frac{8}{8} = 1
 \end{aligned}$$

∴ الدالة تمثل توزيعاً احتمالياً

$$2) P(x) = \frac{x}{10} \quad x = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \frac{1}{10} \\
 P(2) &= \frac{2}{10} \\
 P(3) &= \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

∴ لا يمثل الاقتران توزيعاً احتمالياً

x	0	1	2
$P(x_i)$	0.6	0.5	-0.1

∴ لا يمثل توزيعاً احتمالياً

التوقع :- يعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منفصل x هو

مثال :- اوجد التوقع الرياضي لظهور الصورة عند رمي قطعة نقود 3 مرات :

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الحل :-

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \sum x_i p(x_i) \\
 &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \\
 &= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1,5
 \end{aligned}$$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي للتوزيع الاحتمالي :

$$P(x) = \frac{x}{10}, \quad x = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum P(x_i) = 1 \rightarrow \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

x	1	2	3	4
$p(x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum x_i p(x_i) \\ &= 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{9}{10} + \frac{16}{10} = \frac{30}{10} = 3 \end{aligned}$$

❖ إذا كان التوزيع الاحتمالي x أوجد $E(x), E(5x), E(5x + 3), E(x^2)$

x	1	2	3
$p(x)$	0.1	0.6	0.3

- 1) $E(x) = \sum x_i P(x_i)$
 $= 1 \times 0.1 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.3$
 $= 0.1 + 1.2 + 0.9 = 2.2$
- 2) $E(5x) = 5E(x)$
 $= 5 \times 2.2 = 11,5$
- 3) $E(5x + 3) = 5E(x) + 3$
 $= 5 \times 2.2 + 3 = 14$
- 4) $E(x^2) = \sum x^2 P(x_i)$
 $= 1 \times 0.1 + 4 \times 0.6 + 9 \times 0.3$
 $= 0.1 + 2.4 + 2.7 = 5.2$

❖ خصائص التوزيع الرياضي :-

∴ إذا كان a, b اعداد ثابتة و x متغير عشوائي منفصل :

- 1) $E(b) = b$
- 2) $E(ax) = aE(x)$
- 3) $E(ax + b) = aE(x) + b$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل Y إذا كان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل x هو 3 والعلاقة بين المتغيرين هي :

$$E(x) = 3, \quad y = 2x + 5$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2x + 5) \\ &= 2E(x) + 5 \\ &= 2 \times 3 + 5 = 11 \end{aligned}$$

$$E(Y) = 11$$

- ❖ $E(4) = 4$
- ❖ $E(5x) = 5E(x) = 5 \times 3 = 15$

مثال :- أوجد التوقع الرياضي لجدول التوزيع الاحتمالي التالي :

x	3	4	5	6	7
$P(x)$	0.3	0.2	0.2	0.1	0.2

الحل :-

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \sum x_i P(x_i) \\
 &= 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 + 5 \times 0.2 + 6 \times 0.1 + 7 \times 0.2 \\
 &= 0.9 + 0.8 + 1 + 0.6 + 1.4 = 4.7
 \end{aligned}$$

التباين :-يعرف التباين لمتغير عشوائي x و وسطه الحسابي $E(x) = m$ هو :

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال :-أوجد التباين : $\mu(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$$\begin{aligned}
 E(x^2) &= \sum x^2 P(x_i) \\
 &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} \\
 &= 0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\
 \mu(x) &= 3 - (1.5)^2 \\
 &= 3 - 2.25 = 0.75
 \end{aligned}$$

مثال :- إذا كان التوزيع الاحتمالي لقطع جهاز كمبيوتر المعيبة هو :

x	0	1	2	3	4	5	= 1
$P(x)$	0.02	0.2	0.3	0.3	0.1	0.08	

أوجد التوقع والانحراف المعياري للقطع المعيبة في الشحنة :-

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \sum x_i P(x_i) \\
 &= 0 \times 0.02 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.08 = 2.5
 \end{aligned}$$

التوقع :-

$$\begin{aligned}
 v(x) &= E(x^2) - (E(x))^2 \\
 E(x^2) &= \sum x^2 P(x_i) \\
 &= 0 \times 0.02 + 1 \times 0.2 + 4 \times 0.3 + 9 \times 0.3 + 16 \times 0.1 + 25 \times 0.08 = 7.7 \\
 v(x) &= E(x^2) - (E(x))^2 = 7.7 - (2.5)^2 = 1.45
 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{v(x)} = \sqrt{1.45}$$

الانحراف المعياري

خصائص التباين :-

إذا كان a, b اعداد ثابتة و كان x يمثل متغير عشوائي فإن :-

- 1) $v(b) = 0$
- 2) $v(ax) = a^2v(x)$
- 3) $v(ax + b) = a^2v(x)$

مثال :- أوجد التباين للمتغير العشوائي Y إذا كان تباين المتغير العشوائي x هو 0.5 والعلاقة $Y = 2x + 3$

- 1) $v(Y) = v(2x + 3)$
 $= 2^2v(x) = 4 \times 0.5 = 2$
- 2) $v(5) = 0$
- 3) $v(5x) = 25v(x) = 25 \times \frac{1}{2} = 12.5$

مثال :- x متغير عشوائي وسطه 70 وانحرافه المعياري 3 ، أوجد

$$y = -2x + 5, \quad z = \frac{x - 70}{2}$$

- 1) $E(Y) = E(-2x + 5)$
 $= -2E(x) + 5 = -2 \times 70 + 5$
 $= -140 + 5 = -135$
- 2) $E(z) = E\left(\frac{1}{2}x - 35\right)$
 $= \frac{1}{2}E(x) - 35$
 $= \frac{1}{2}(70) - 35 = 0$
- 3) $v(Y) = v(-2x + 5)$
 $= 4v(x) = 4 \times 9 = 36$
- 4) $v(z) = v\left(\frac{1}{2}x - 35\right)$
 $= \frac{1}{4}v(x) = \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4}$

الانحراف المعياري يساوي جذر التباين :-

$$\sigma = \sqrt{v(x)}$$

مثال :- بائع مضلات ربح 35 ريال يومياً إذا كان الجو ماطر ويخسر 6 ريالات إذا كان الجو صحو ، ما هو توقع ربحه إذا علمت إن احتمال أن يكون الجو ماطر 0.3 ؟

x	-6	30
$P(x)$	0.7	0.3

 $= 1$

x = هو عدد الريالات التي يربحها البائع

$$E(x) = \sum x_i P(x_i) = -6 \times 0.7 + 30 \times 0.3 = -4.2 + 9 = 4.8$$

$$E(x^2) = \sum x_i^2 P(x_i) = 36 \times 0.7 + 900 \times 0.3 = 25.2 + 270 = 295.2$$

$$v(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 295.2 - (4.8)^2 = 272.16$$

مثال :- إذا كان x متغير عشوائي وسطه 50 وتباينه 10 وكان $Y = 8x + 15$ أوجد التوقع :

- 1) $E(Y) = E(8x + 15)$
 $= 8E(x) + 15$
 $= 8 \times 50 + 15 = 400 + 15 = 415$
- 2) $v(Y) = v(8x + 15)$
 $= 8^2 v(x)$
 $= 64 \times 10 = 640$
- 3) $E(5) = 5$
- 4) $v(5) = 0$