مبادىء الرياضيات : المحاضرة 12

تابع الفصل السادس : المتواليات

تقسم المتواليات إلى قسمين :

1) المتواليات الحسابية .

الصيغة العامة لها . a,a+d,a+2d,..... ← الحد الأول

اساس المتوالية والذي يساوي الفرق بين أي حد والحد الذي يسبقه باستثناء الحد الأول .

يمكن قيمة إيجاد أي حد من خلال الصيغة :

$$tn = a + (n - 1) d$$

وكذلك يمكن إيجاد مجموع n من الحدود من خلال الصيغة :

$$T n = n/2 [2a + (n - 1) d]$$

وكذلك إذا علم الحد الأول والحد الأخير في متوالية حسابية فيمكن إيجاد مجموع n من الحدود من خلال الصيغة

$$T n = n/2 [a + b]$$

مثال : اوجد قيمة الحد الخامس عشر ومجموع أول عشرة حدود من المتوالية ..... , 13- , 8- , 3- , 2

الحل : a = 2

d= -3 -2

= - 5

المطلوب :

$$t 15 = a + (n - 1) d$$

$$= 2 + (15 - 1) . - 5$$

$$= 2 + 14 (-5)$$

$$= 2 - 70 = - 68$$

$$T10 = n/2 [2a + (n - 1) d]$$

$$= 10/n [2 (2) + (10 - 1) (-5)]$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ -3 \\ -8 \\ -13 \\ -18 \\ -23 \\ -28 \\ -33 \\ -38 \\ \underline{-43} \\ -205 \end{array}$$

$$= 5 [4 - 45]$$

$$= 5 (- 41) = - 205$$

ثانياً : المتواليات الهندسية :

تعريف : المتوالية الهندسية هي عبارة عن متتابعة من الأعداد كل حد من حدودها يمكن إيجاده من خلال ضرب الحد الذي يسبقه بعدد معين (باستثناء الحد الأول) .

فإذا كان a هي قيمة الحد الأول و r هي أساس المتوالية فيمكن الرمز لمتوالية هندسية على الصورة التالية :

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots\ldots$

حيث يمكن إيجاد قيمة أساس المتوالية r من خلال قيمة أي حد على العدد الذي يسبقه .

وبالاستمرار بهذه الطريقة , يمكن أن نجد قيمة أي حد في متوالية هندسية وليكن tn بالصيغة التالية :

$tn = ar^{n-1}$

حيث $n \in N$

↓

الأعداد الطبيعية

وكذلك يمكن إيجاد مجموع n من حدود متوالية هندسية حدها الأول a و أساسها r حسب الصيغة التالية :

$$T n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} , \quad r \neq 1$$

وأيضا يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدود متوالية هندسية من خلال الصيغة التالية :

$$T\infty = \frac{a}{1-r} , \quad |r| < 1$$

ويسمى هذا النوع من المتواليات بالمتوالية الهندسية اللانهائية .

مثال : متوالية هندسية فيها الحد الأول = 3 وأساسها = 3 , اوجد :

1) قيمة الحد السادس ؟

2) مجموع أول خمسة حدود ؟

المطلوب : 1) t6 ? 2) T 5?

بمكن كتابة عن حد هذه المتوالية كما يلي :

الحد السادس

↓

3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...729

$1)\ t6 = a\, r^{n-1}$

$= 3\,(3)^{6-1}$

$=3\,(3)\,5 = 3\,(243) = 729$

$2)\ T5 = \frac{a(r^n-1)}{r-1} , r \neq 1$

$= \frac{3(3^5-1)}{\quad}$

3 – 1

$= \frac{3\,(243-1)}{2}$

$= \frac{3\,(242)}{2} = 3\,(121) = 363$

للتأكد من صحة القانون :

T 5 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 363

مثال : متوالية مكتوبة على الصورة التالية :

متوالية متناقصة ..... 1 , 1/2 , 1/4 , 1/8

اوجد: 1) نوع المتوالية ؟

2) قيمة الحد السادس ؟

3) مجموع أول أربعة حدود ؟

الحل :

1) متوالية هندسية حيث أن

-1 $\frac{a2}{a1} = \frac{a3}{a2} = \frac{a4}{a3} = r$

$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1/8}{1/4} = 1/2$

↓

أساس المتوالية

وبالتالي $a = 1$, $r = 1/2$

-2

$t\,6 = a\,r^{n-1}$

$= 1\,(1/2)^{6-1} = (1/2)^{5} = 1/2 \,.\, 1/2 \,.\, 1/2 \,.\, 1/2 \,.\, 1/2$

$= 1/32$

– 3

$T\,4 = \frac{a\,(r^{n}-1}{r-1} = \frac{1\,(1/2^{4}-1\,)}{1/2-1}$

$= \frac{\frac{1}{16}-\frac{1.16}{1.16}}{\frac{1}{2}-\frac{1.2}{1.2}} = \frac{\frac{1}{16}-\frac{16}{16}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}$

$= \frac{-15/16}{-1/2} = \frac{15}{16} * \frac{2}{1} = 15/8$

(التأكد من صحة الحل : $8.1/8.1 + 4.1/4.2 + 2.1/2.4 + 1/8 = 8/8 + 4/8 + 2/8 + 1/8 = 15/8$

مثال : متوالية هندسية لانهائية فيها الحد الأول $=2$ وأساسها $= 1/4$, اوجد $T \infty$ ؟

الحل : (المجموع اللانهائي)

$$T \infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3/4} = 2 . 4/3 = 8/3 \qquad |r| < 1$$

$|1/4| < 1$

$2 , 1/2 , 1/8 , 1/16 , \ldots\ldots$

$a1 \quad a2$

$$r = \frac{a2}{a1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

مسائل وتمارين :

1) متوالية هندسية فيها $a = -1$, $r = 2$

اوجد : 1) $t10$?

2) $T7$?

2) إذا كان لديك المتوالية

$1 , 5 , 25 , 125 , \ldots\ldots$

اوجد :

1) نوع المتوالية ؟

2) أساسها ؟

3) قيمة الحد الخامس ؟

4) مجموع أول أربعة حدود ؟

5) المجموع اللانهائي لحدود المتوالية في هذا السؤال إذا أمكن ذلك ؟

ملاحظة ..(أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ)...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....