الفصل الرابع :
توزيعات المعاينه

تعريفات :
١/ **المعلمه :** هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالوسط الحسابي للتوزيع أو الانحراف المعياري له.
٢/ **إحصاء العينه :** هو أي متغير تتعين قيمته من جميع العينات ذا حجم معين مأخوذة من مجتمع ما ، مثل الوسط الحسابي .
٣/ ويسمى التوزيع الاحتمالي لإحصاء العينه بتوزيع المعاينه

توزيع المعاينة للوسط الحسابي :

$$\frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$$

نظرية (١) : إذا كان X يخضع للتوزيع وسطه (معدله) μ وتباينه σ^2 وكان $\overline{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم فان :

$$\mu(\bar{x}) = \mu$$
$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2(x)}{n}$$

مثال : سحبت عينة عشوائية من مجتمع لا نهائي معدله 70 وتباينه 40 ، إذا كان حجم العينة 10 ، فأوجد :
١- الوسط الحسابي للعينة :

$$\mu(\bar{x}) = \mu = 70$$

٢- تباين الوسط الحسابي للعينة :

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2(x)}{n} = \frac{40}{10} = 4$$

نظرية (٢) : إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_n$ تخضع لتوزيع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 فإن توزيع $\bar{x}$ يكون التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ وتباينه $\frac{\sigma^2}{n}$ ويعرف القيمه المعياريه بالشكل التالي :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

مثال : تخضع علامات الطلاب في أحد المقررات لتوزيع طبيعي وسطه 65 وانحراف معياري 18 ، اخذت عينة عشوائية حجمها 36 طالب ، احسب :

$$P(\bar{X} > 74)$$

١- احتمال أن يزيد وسط علامات العينة على 74 ؟

$$\bar{X} = 74 \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{74 - 65}{18/6} = \frac{9}{3} = 3$$
$$P(Z > 74) = P(Z > 3)$$
$$= 1 - P(Z \leq 3)$$
$$= 1 - 09987 = 0.0013$$

٢- ما هو احتمال أن يكون الوسط الحسابي بين 68 و 59 ؟

$$P(59 < \bar{x} < 68)$$
$$\bar{X} = 59 \Rightarrow Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{59-65}{\frac{18}{\sqrt{6}}} = \frac{-6}{3} = -2$$
$$\bar{X} = 59 \Rightarrow Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{68-65}{\frac{18}{\sqrt{6}}} = \frac{3}{3} = 1$$
$$P(59 < x < 68) = P(-2 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -2)$$
$$= 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$$

المعاينة لمجتمع طبيعي σ^2 غير معلومه :

نظرية (٣) :- إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية تخضع لتوزيع طبيعي وسطه μ وتباينه غير معلوم وكان $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي لعينه حجمها n وانحرافها (S) فإن :

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

درجة الحرية =
$$v = n - 1$$

مثال : إذا كانت أطوال الطلاب في أحد الصفوف المدرسية تتبع التوزيع الطبيعي المتوسط يساوي 160 سم ، إذا سحبت عينة عشوائية من 4 طلاب فما احتمال أن يقل متوسطها الحسابي عن 166 سم ، إذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة يساوي 10 سم ؟

$$P(\bar{X} < 166)0.85$$
$$\bar{x} = 166 \Rightarrow t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{166-160}{10/2} = \frac{6}{5} = 1.2$$

درجة الحرية =
$$v = n - 1$$
$$v = 4 - 1 = 3$$

$$t[\lambda, 3] = 1.2$$
$$\lambda = 0.85$$

توزيع المعاينة للفرق بين وسطي عينين $(\bar{X} - \bar{Y})$.

نظرية (٤) :- إذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، ثم اخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي وسطه μ_2 وتباينه σ_2^6 بحيث ان المجتمع الأول مستقل عن المجتمع الثاني ، ورمزنا للوسط الحسابي للعينة الأولى بالرمز $\bar{X}$ والوسط الحسابي للعينة الثانية $\bar{Y}$ فإن توزيع الفرق وسطي العينة بين $(\bar{X} - \bar{Y})$ يكون التوزيع الطبيعي متوسطه $(\mu_1 - \mu_2)$ والتباين $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

مثال :- تخضع علامات الناجحين من امتحان الدراسة الثانوية في مدرسة ما لتوزيع طبيعي معدله 74 وانحرافه المعياري 12 ، وفي مدرسة أخرى تخضع لتوزيع الطبيعي معدله 70 وانحرافه المعياري 16 ، اخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالب من المدرسه الأولى و 9 طلاب من المدرسة الثانيه على فرض أن الوسط الحسابي للعينة الأولى $\overline{X}$ ، وللعينة الثانية $\overline{Y}$

أوجد : $P\left((\overline{Y}-\overline{X})>8\right)$ ؟

$$\mu_1 = 74$$
$$6_1 = 12$$
$$n_1 = 16$$
$$\mu_1 = 70$$
$$6_2 = 16$$
$$n_2 = 9$$

$$\bar{x}-\bar{y}=8 \Rightarrow Z=\frac{\left(\overline{Y}-\overline{X}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z=\frac{8-(74-70)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}}=0.65$$

$$P\left(\overline{X}-\overline{Y}>8\right)=p(Z>0.65)=1-P(Z\leq 0.65)=1-0.7422=\ 0.2578$$

أوجد :-

$$P(3<\bar{x}-\bar{y}<7)$$