المحاضرة السادسة
المتغيرات العشوائية المنفصلة

مثال :- حدد هل الدالة التالية تمثل توزيع احتمالي أم لا ؟

$$x = 0\,,1\,,2\,,3 \qquad P(x) = (3_x) \times \frac{1}{8}$$

1) $P(x_i) \geq 0$
2) $\sum P(x_i) = 1$

---

1) $P(0) = (3_0)\cdot\frac{1}{8} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$P(1) = (3_1)\cdot\frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$P(2) = (3_2)\cdot\frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$P(3) = (3_3)\cdot\frac{1}{8} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

∴ الدالة تمثل توزيعاً احتمالياً

---

2) $P(x) = \frac{x}{10} \qquad x = 1\,,2\,,3$

$P(1) = \frac{1}{10}$

$P(2) = \frac{2}{10}$

$P(3) = \frac{3}{10}$

∴ لا يمثل الاقتران توزيعاً احتمالياً

∵ لا يمثل توزيعاً احتمالياً $= 1$

x	0	1	2
$P(x_i)$	0.6	0.5	-0.1

التوقع : يعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منفصل x هو

$$E(x) = \sum x_i \; P(x_i)$$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي لظهور الصورة عند رمي قطعة نقود 3 مرات :

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الحل :

$$E(x) = \sum x_i\, p(x_i)$$

$$= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8}$$

$$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي للتوزيع الاحتمالي :

$$P(x) = \frac{x}{10} \quad , \quad x = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum P(x_i) = 1 \rightarrow \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

x	1	2	3	4
$p(x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$E(x) = \sum x_i\, p(x_i)$$
$$= 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10}$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{9}{10} + \frac{16}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

❖ إذا كان التوزيع الاحتمالي x

x	1	2	3
$p(x)$	0.1	0.6	0.3

أوجد $E(x), E(5x), E(5x+3), E(x^2)$:

1) $E(x) = \sum x_i\ P(x_i)$
$= 1 \times 0.1 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.3$
$= 0.1 + 1.2 + 0.9 = 2.2$

2) $E(5x) = 5E(x)$
$= 5 \times 2.2 = 11{,}5$

3) $E(5x+3) = 5E(x) + 3$
$= 5 \times 2.2 + 3 = 14$

4) $E(x^2) = \sum x^2\, P(x_i)$
$= 1 \times 0.1 + 4 \times 0.6 + 9 \times 0.3$
$= 0.1 + 2.4 + 2.7 = 5.2$

❖ خصائص التوزيع الرياضي :-

∴ إذا كان a, b اعداد ثابتة و x متغير عشوائي منفصل :

1) $E(b) = b$
2) $E(ax) = aE(x)$
3) $E(ax+b) = aE(x) + b$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل Y إذا كان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل x هو 3 والعلاقة بين المتغيرين هي :

$$E(x) = 3 \quad , \quad y = 2x + 5$$

$E(Y) = E(2x+5)$
$= 2E(x) + 5$
$= 2 \times 3 + 5 = 11$

$E(Y) = 11$

❖ $E(4) = 4$

❖ $E(5x) = 5E(x) = 5x3 = 15$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي لجدول التوزيع الاحتمالي التالي :

x	3	4	5	6	7
$P(x)$	0.3	0.2	0.2	0.1	0.2

الحل :-

$$E(x) = \sum x_i\, P(x_i)$$
$$= 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 + 5 \times 0.2 + 6 \times 0.1 + 7 \times 0.2$$
$$= 0.9 + 0.8 + 1 + 0.6 + 1.4 = 4.7$$

التباين :-

يعرف التباين لمتغير عشوائي x و وسطه الحسابي $E(x) = m$ هو :

$$\mu(x) = E(x-m)^2$$
$$= E(x^2) - \big(E(x)\big)^2$$

مثال :-

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

أوجد التباين : $\mu(x) = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2$

$$E(x^2) = \sum x^2 P(x_i)$$
$$= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 9 + \frac{1}{8}$$
$$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3$$
$$\mu(x) = 3 - (1.5)^2$$
$$= 3 - 2.25 = 0.75$$

مثال :- إذا كان التوزيع الاحتمالي لقطع جهاز كمبيوتر المعيبة هو :

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.02	0.2	0.3	0.3	0.1	0.08

$= 1$

أوجد التوقع و الانحراف المعياري للقطع المعيبة في الشحنة :-

$$E(x) = \sum x_i\ P(x_i)$$
$$= 0 \times 0.02 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.08 = 2.5$$

التوقع :-

$$v(x) = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2$$
$$E(x^2) = \sum x^2\, P(x_i)$$
$$= 0 \times 0.02 + 1 \times 0.2 + 4 \times 0.3 + 9 \times 0.3 + 16 \times 0.1 + 25 \times 0.08 = 7.7$$
$$v(x) = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2 = 7.7 - (2.5)^2 = 1.45$$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{v(x)} = \sqrt{1.45}$

خصائص التباين :-

إذا كان a , b اعداد ثابتة و كان x يمثل متغير عشوائي فإن :-

$$1)\ v(b) = 0$$
$$2)\ v(ax) = a^2 v(x)$$
$$3)\ v(ax+b) = a^2 v(x)$$

مثال :- أوجد التباين للمتغير العشوائي Y إذا كان تباين المتغير العشوائي x هو 0.5 والعلاقة $Y = 2x + 3$

$$1)\ v(Y) = v(2x+3) = 2^2 v(x) = 4 \times 0.5 = 2$$
$$2)\ v(5) = 0$$
$$3)\ v(5x) = 25v(x) = 25 \times \tfrac{1}{2} = 12.5$$

مثال :- x متغير عشوائي وسطه 70 وانحرافة المعياري 3 ، أوجد

$$y = -2x + 5\ , \qquad z = \frac{x-70}{2}$$

$$1)\ E(Y) = E(-2x+5) = -2E(x) + 5 = -2 \times 70 + 5 = -140 + 5 = -135$$
$$2)\ E(z) = E\left(\tfrac{1}{2}x - 35\right) = \frac{1}{2}E(x) - 35 = \frac{1}{2}(70) - 35 = 0$$
$$3)\ v(Y) = v(-2x+5) = 4v(x) = 4 \times 9 = 36$$
$$4)\ v(z) = v\left(\tfrac{1}{2}x - 35\right) = \frac{1}{4}v(x) = \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4}$$

الانحراف المعيارى يساوى جذر التباين :-

$$\sigma = \sqrt{v(x)}$$

مثال :- بائع مضلات ربح 35 ريال يومياً إذا كان الجوء ماطر ويخسر ٦ ريالات إذا كان الجوء صحو ، ما هو توقع ربحه إذا علمت إن احتمال أن يكون الجوء ماطر 0.3 ؟

x	-6	30
$P(x)$	0.7	0.3

$= 1$

$x =$ هو عدد الريالات التي يربحها البائع

$$E(x) = \sum x_i\, P(x_i) = -6 \times 0.7 + 30 \times 0.3 = -4.2 + 9 = 4.8$$
$$E(x^2) = \sum x_i\, P(x_i) = 36 \times 0.7 + 900 \times 0.3 = 25.2 + 270 = 295.2$$
$$v(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 = 295.2 - (4.8)^2 = 272.16$$

مثال :- إذا كان x متغير عشوائي وسطه 50 وتباينه 10 وكان $Y = 8x + 15$ أوجد التوقع :

1) $E(Y) = E(8x + 15)$
$= 8E(x) + 15$
$= 8x50 + 15 = 400 + 15 = 415$

2) $v(Y) = v(8x + 15)$
$= 8^2 v(x)$
$= 64 \times 10 = 640$

3) $E(5) = 5$

4) $v(5) = 0$