مبادئ الرياضيات : المحاضرة 17

تابع الفصل السابع : المحددات .

خواص المحددات :

سنتعرف خلال هذا البند على بعض من خواص المحددات والتي تفيدنا في تسهيل عملية حسابها ومنها :

1) إذا وجد صف أو عمود في مصفوفة مربعة بحيث كانت جميع عناصره أصفار , فان محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثال : اوجد محدد كل مما يلي :

$$1)\ A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & -5\end{bmatrix} \rightarrow |A|=0$$

$$2)\ B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0\end{bmatrix} \rightarrow |B|=0$$

2) لا تتغير قيمة محدد المصفوفة إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف .

مثال : إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix} \rightarrow |A|=2\times 5-3\times -1=10+3=13$.

$$A^{T}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix} \rightarrow |A|=2\times 5-3\times -1=10+3=13 .$$

3) عند استبدال صف بصف آخر أو عمود بعمود آخر فإن أشارة المحدد تتغير .

مثال : إذا كانت . $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix} \rightarrow |A|=13$

لو تم تبديل الصف الأول مع الصف الثاني , لنحصل على المصفوفة B .

$$B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix} \rightarrow |B|=-3-10=-13$$

أما لو تم تبديل العمود الأول مع العمود الثاني , فسوف نحصل على المصفوفة ولتكن C بحيث :

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix} \rightarrow |C|=-3-10=-13$$

4) إذا تساوت العناصر المتقابلة في صفين أو عمودين في مصفوفة ما , فإن محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثال : لتكن $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow |A|=0$ (نلاحظ أن عناصر الصف الأول مساوية لعناصر الصف الثالث) .

5) إذا ضرب عناصر صف أو عمود في المصفوفة A بعدد ثابت , فإن قيمة المحدد الناتج بعد عملية الضرب تساوي المحدد الأصلي مضروباً في ذلك العدد .

مثال : إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix} \rightarrow |A|=6+5=11$

على فرض , ضربنا عناصر الصف الثاني بالعدد 2- فتصبح المصفوفة A على الصورة التالية :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = -12 - 10 = -22$$

$$11x - 2 = -22$$

مثال : إذا كان محدد المصفوفة A يساوي 3- , وضربنا عناصر العمود الأول بالعدد 5- اوجد محدد المصفوفة بعد عملية الضرب ؟

محدد المصفوفة عد عملية الضرب $\rightarrow |A| = -3$

$$-3 \times -5 = 15$$

6) محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر .

مثال : اوجد محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$ ← مصفوفة قطرية

الحل :

$$|A| = 6 \times -3 \times 1/9 = -18/9 = -3$$

كيفية إيجاد النظير الضربي لمصفوفة مربعة :

تعريف : النظير الضربي .

إذا كان لدينا المصفوفة A و أوجدنا مصفوفة أخرى ولتكن B بحيث :

$$A \times B = B \times A = I$$

عندئذ نقول بأن المصفوفة B هي النظير الضربي للمصفوفة A , وسيرمز للمصفوفة B بالرمز A^{-1} .

ولإيجاد النظير الضربي A^{-1} للمصفوفة A (من الرتبة 2 X 2) فإنه يمكن استخدام الصيغة التالية :

$$A^{-1} = 1/|A| \begin{bmatrix} a22 & -a12 \\ -a21 & a11 \end{bmatrix}$$

حيث $A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$ 2 x 2

مثال : اوجد النظير الضربي للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل : 1) $|A| = -1 - 0 = -1$

2) $A^{-1} = 1/-1 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$

وللتأكد من صحة الحل :

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \; 2 \times 2$$

مثال : اوجد النظير الضربي للمصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \; ?$$

الحل : $|B| = 3 - (-2) = 5$

$$B^{-1} = 1/5 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

للتأكد من صحة الحل :

$$B \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

طريقة كريمر لحل نظام من المعادلات الخطية :

لنفرض أن لدينا النظام التالي من المعادلات :

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$

1) سنعرف محدد المعاملات دلتا (Δ) كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$$

من المعادلة الأولى

من المعادلة الثانية

2) سنحدد مصفوفة جديدة من خلال استبدال عناصر العمود الأول في Δ بالحدود الطلقة $\begin{vmatrix} b1 \\ b2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد المصفوفة الجديدة وسنرمز له Δ x1 :

$$\Delta X1 = \begin{vmatrix} b1 & a12 \\ b1 & a22 \end{vmatrix}$$

3) سنستبدل كذلك عناصر العمود الثاني في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} b1 \\ b2 \end{vmatrix}$ وسنرمز لمحدد هذه المصفوفة بالرمز Δ x2 بحيث تصبح كما يلي :

$$\Delta \; X2 = \begin{vmatrix} a11 & b1 \\ a21 & b2 \end{vmatrix}$$

4) لإيجاد قيمة x1 , فإننا نقسم Δ x1 على Δ ولايجاد قيمة x2 , فإننا نقسم Δ x2 على Δ

$$X1 = \frac{\Delta x1}{\Delta} \quad , \quad x2 = \frac{\Delta x2}{\Delta}$$

مثال : باستخدام طريقة كرايمر , اوجد حل النظام التالي من المعادلات :

$3 x_1 + 4 x_2 = 2$

$2 x_1 + 5 x_2 = 3$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$\Delta \text{ X } 1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$$

$$\Delta \text{ X } 2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$X\ 1 = \frac{\Delta x\ 1}{\Delta} = -2/7 \ , \ x\ 2 = \frac{\Delta x\ 2}{\Delta} = 5/7$$

وللتأكد من صحة الحل :

$$3\ (-2/7) + 4\ (5/7) = 2$$

$$-6/7 + 20/7$$

$$14/7 = 2$$

$$2\ (-2/7) + 5\ (5/7) = 3$$

$$-4/7 + 25/7 = 21/7 = 3$$

مثال: حل النظام التالي :

$$4 \text{ x } 1 - 2 \text{ x } 2 = 10$$

$$3 \text{ x } 1 - 5 \text{ x } 2 = 11$$

باستخدام طريقة كريمر ؟

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -20 - (-6) = -20 + 6 = -14$$

$$\Delta \text{ X } 1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -50 - (-22) = -50 + 22 = -28$$

$$\Delta \text{ X } 2 = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 30 = 14$$

$$X\ 1 = \frac{\Delta x1}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$X\ 2 = \frac{\Delta x\ 2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = 1$$

حتى نستطيع تطبيق هذه الطريقة لابد من أن $\Delta \neq 0$

ملاحظة ..(أرجو التنبيه إذا كان هناك خطأ)...

بالتوفيق لكم جميعاً

.... انا ....