جـــامعة الدمـــــــام

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الرياضيات للإدارة

MATH 120

دكتور محمد تركي

أستاذ الرياضيات والاحصاء المساعد

الايميل الجامعي

mstorky@uod.edu.sa

الفصل الأول: الدوال (الازواج المرتبه – الضرب الديكارتي – العلاقة والدالة – الدوال – معادلات الخط المستقيم)

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (معدل الربح البسيط-معدل الربح المركب)

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (قوانين النهايات-الاتصال – تطبيقات اقتصادية

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) -مشتقات الدوال -التطبيقات الاقتصادية: (الإيراد الحدي، التكلفة الحدية، الربح الحدي)

الفصل الخامس: التكامل – التكامل الغير محدود – التكامل المحدود – تطبيقات اقتصادية – المعادلات التفاضلية

خطة توزيع الدرجات	
البنود	الدرجة
تحميل المحاضرات والمادة العلمية او مشاهدتها	10
الواجبات (4 واجبات)	10
الاختبار الفصلي	10
الاختبار النهائي	70
المجموع	100

اولا: المجموعات

$A = \{1, 2, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4$

$B = \{3, 8, 9, 11, 15\} \Rightarrow n(B) = 5$

$\phi = \{\} \Rightarrow n(\phi) = 0$

$X = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \Rightarrow$ مجموعة غير محدودة

$Y = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow$ مجموعة محدودة

$\{5, 7\} = \{7, 5\}$ الترتيب ليس له اهمية

الزوج المرتب

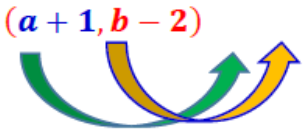
(a, b) ⟵ الترتيب له اهمية

(x, y) ⟵ $x = a, \quad y$

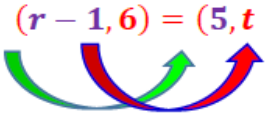
مقارنة بين المجموعة والزوج المرتب

	المجموعة	الزوج المرتب
الشكل	{ }	( )
الوجود	$\emptyset = \{\ \}$ يوجد مجموعة خالية	لا يوجد زوج مرتب خالي
عدد العناصر	$\emptyset, \{5\}, \{2, 6, 7\}, \{2, 4, 6, \dots\}$ يوجد مجموع خالية او بها عنصر او عنصرين او ثلاثة او عدد لا نهائي	الزوج المرتب يتكون فقط من مسقطين المسقط الأول والمسقط الثاني او احداثيين الإحداثي الأول والاحداثي الثاني
ترتيب العناصر	{3,5} = { 5,3} الترتيب ليس له أهمية	$(3,5) \neq (5,3)$ الترتيب مهم

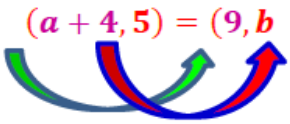
$x = 3,\ y$



$a = 2,\ b$



$r = 6,\ t$



$a = .. ,\ b$

الضرب الديكارتي لمجموعتين X و Y

هو عبارة عن كل الازواج المرتبة التي مسقطها الاول من X ومسقطها الثاني من Y

1-مثال إذا كان $x = \{1, 3, 5\}$, $y = \{a, b\}$ فأوجد حاصل الضرب الديكارتي

$X \times Y$ and $Y \times X$, $X \times X$, $Y \times Y$ ومثله بمخطط سهمي

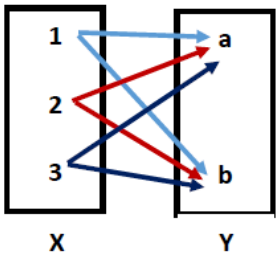
الحـــــــــــــــل

1) $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{a, b\}$,

$X \times Y = \{1, 3, 5\} \times \{a, b\}$,

$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b)\}$

المخطط السهمي X × Y

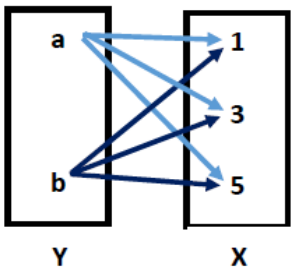


2) $Y = \{a, b\}$, $X = \{1, 3, 5\}$,

$Y \times X = \{a, b\} \times \{1, 3, 5\}$,

$X \times Y = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (b, 5)\}$

المخطط السهمي X × Y

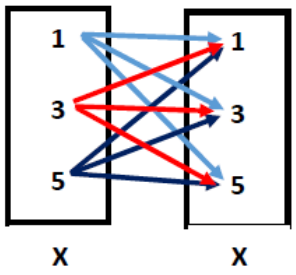


3) $X = \{1, 3, 5\}$, $X = \{1, 3, 5\}$,

$X \times X = \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}$,

$X \times Y = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5),\}$

المخطط السهمي X × X

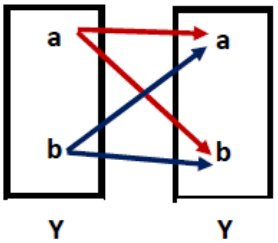


4) $Y = \{a, b\}$, $Y = \{a, b\}$,

$Y \times Y = \{a, b\} \times \{a, b\}$,

$X \times Y = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

المخطط السهمي Y × Y



ملاحظات على الضرب الديكارتي

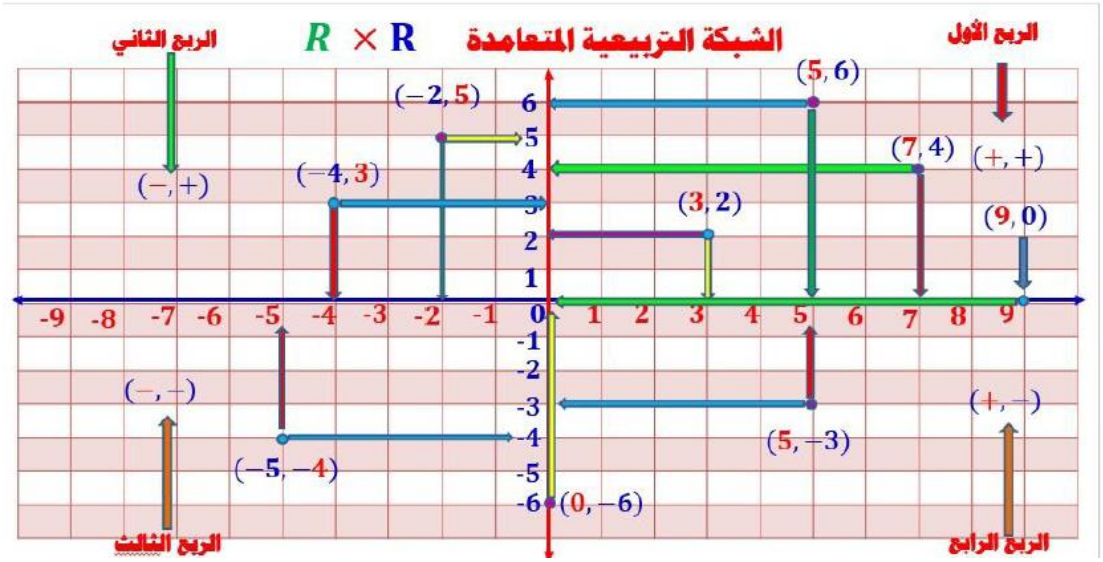
1) إذا كان المجموعة $A = \{2, 6, 9\}$ فانه يرمز لعدد عناصر المجموعة A $n(A) = 3$

2) اذا كان المجموعة $B = \{4, 8\}$ فانه يرمز لعدد عناصر المجموعة B $n(B) = 2$

3) فان عدد عناصر حاصل الضرب $A \times B$ يرمز له بالرمز $n(A \times B)$

$n(A \times B) = 6,\ n(B \times A) = 6 \Rightarrow n(A \times B) = n(B \times A)$

$(3,4) \neq (4,3) \Rightarrow A \times B \neq B \times A$



ملاحظات على الشبكة التربيعية

أي نقطة تقع في الربع الاول يكون احداثياتها موجبين معا $(+, +)$

أي نقطة تقع في الربع الثاني يكون احداثياتها $(-, +)$

أي نقطة تقع في الربع الثالث يكون احداثياتها سالبين معا $(-, -)$

أي نقطة تقع في الربع الرابع يكون احداثياتها $(+, -)$

أي نقطة تقع على محور السينات احداثها الصادي يساوي صفر $(\pm, 0)$

أي نقطة تقع علي محور الصادات احداثها السيني يساوي صفر $(0, \pm)$

تمارين متنوعة

1) النقطة التي احداثياتها $(2,-5)$ تقع في الربع.....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

2) النقطة (-1,-3) تقع في الربع .....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

3) النقطة (0,7) تقع في .....

أ) الربع الأول ب) محور السينات ج) الربع الثالث د) محور الصادات

4) اذا كانت النقطة (x ,x+3) تقع في الربع الثالث فان x يمكن ان تساوي .....

أ) 1- ب) 3 ج) 4- د) 2-

5) اذا كان (a, b) = (3, 5) فان ... =a+ b

أ) 3 ب) 5 جـ) 8 د) 2

6) اذا كان $n(y^2)=25$ فان ... =n(y)

أ) 2 ب) 5 جـ) 10 د) 15

7) اذا كان $n(X)=6, n(X\times Y)=24$ فان ... =n(y)

أ) 2 ب) 8 جـ) 6 د) 4

8) اذا $X\times Y=\{(2,6),(2,a),(3,6),(3,a),(5,6),(5,a)\}$ كان فان .....=x

أ) {2,3,5} ب) {2,3} جـ) {6,a} د) {5,6}

9) اذا كان $n(X\times Y)=12$, $n(X^2)=9$ فان .....=n(y)

أ) 3 ب) 6 جـ) 4 د) 21

10) $\{0\}\times\{5\}=\cdots..$

أ) (0,5) ب) {(0,5)} جـ) 5 د) 0

11) اذا كان $(3,5)\in\{3,7\}\times\{a,6\}$ فان .....=a

أ) 3 ب) 7 جـ) 5 د) 6

12) اذا كان $X\times Z=Z\times X$, فان .....

أ) $X=Z$ ب) $X\neq Z$ جـ) $X\cap Z=X$ د) $X\cap Z=Z$

13) اذا كان X={2, 3} و Y={ 4, 5, 6} فان $(6,3)\in\cdots$

أ) $X\times Y$ ب) $Y\times X$ جـ) X^2 د) Y^2

العلاقة والدالة

العلاقة من مجموعة X الي مجموعة Yهي

هي علاقة تربط بعض او كل عناصر المجموعة Xببعض او كل عناصر المجموعة Y

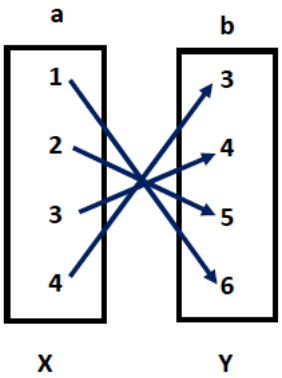
العلاقة من مجموعة X الي مجموعة Yهي

او هي بعض او كل الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من Xومسقطها الثاني من Y

مثال إذا كانت المجموعة $X = \{1,2,3,4\}$ والمجموعة $Y = \{3,4,5,6\}$ وكانت Rعلاقة من Xالي Y

حيث aRb تعني ان $a + b = 7$ اكتب بيان العلاقة Rومثله بمخطط سهمي وبين هل العلاقة R دالة ام لا

الحـــــــــــــــــــل



$$R = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3)\}$$

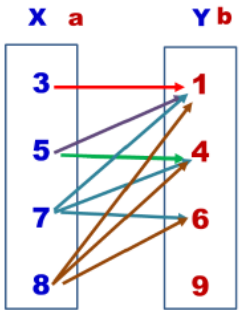
العلاقة دالة لان كل عنصر من عناصر x خرج منه سهم واحد فقط

مجال الدالة هو عناصر المجموعة Xيساوي {1,2,3,4}

مدي الدالة هو ما وصلت اليه الأسهم في y يساوي {3,4,5,6}

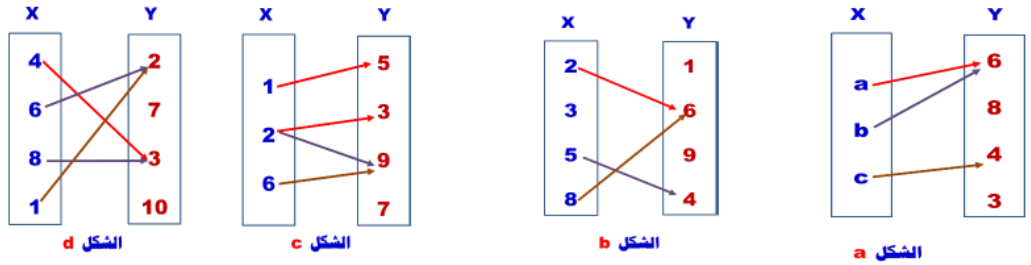
الحـــــــــــــــــــل

$$R = \{(3,1),(5,1),(5,4),(7,1),(7,4),(7,6),(8,1),(8,4),(8,6)\}$$



العلاقة ليست دالة لان العناصر 5 و 7 و 8 خرج منها اكثر من سهم

امثلة بين أي العلاقات التالية تمثل دالة مع ذكر السبب واذكر مجال ومدي الدالة في حالة العلاقة دالة



1) اذا كان $(a-2,3)=(2,b)$ فان $a-b=\ldots$

أ) 3 ب) 2 ج) 1 د) zero

2) اذا كانت $n(X)=2$ $n(X\times Y)=6,$ فان $n(Y^2)=\cdots\ldots\ldots$

أ) 9 ب) 3 ج) 2 د) 4

3) اذا كانت $(3,5)\in\{3,6\}\times\{x,8\}$فان x=.....

أ) 4 ب) 5 ج) 6 د) 8

4) اذا كانت $X=\{3,4\},Y=\{5,6,2\}$فان $(4,3)\in\ldots\ldots$

أ) Y^2 ب) X^2 ج) Y×X د) X×Y

5) المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي .....

أ) ب) ج) د)

6) المخطط الذي لا يمثل دالة فيما يأتي .....

7) $\{1\}\times\{7\}=\cdots\ldots\ldots\ldots$

أ) (1, 7) ب) {(1, 7)} ج) 7 د) 1

8) اذا كانت العلاقة $R=\{(1,3),(2,5),(5,7),(4,9)\}$ تمثل دالة فان مداها يساوي

أ) {3, 5,7,9} ب) {1,2,4,5} ج) {2,3,4,5} د) {3,4,6,7}

9) اذا كان $(a-3,4)=(1,b)$فان $a-b=\ldots$

أ) 3 ب) 2 ج) 1 د) zero

10) اذا كانت $x=\{3,7,9\}$ $n(X\times Y)=6,$ فان $n(Y^2)$ =.....

أ) 9 ب) 3 ج) 2 د) 4

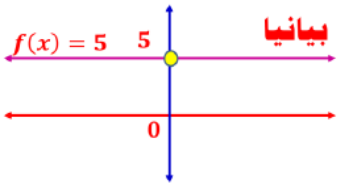
الدوال كثيرات الحدود

الدالة الثابتة هي دالة لها قيمة ثابتة مهما تغيرت قيمة المتغير x

$f(x) = 5,$ $f(-5) = 5$

$f(\sqrt{5}) = 5,$ $f(2) = 5$

$f(-2) = 5,$ $f(-5) = 5$



الدالة F(x)= 5 يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (0,5) ومداها يساوي {5}

$f(x) = -2$

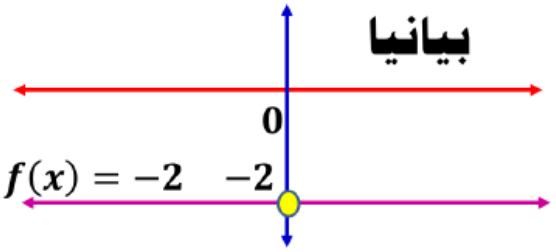
$f(5) = -2$

$f(4) = -2$

$f(2) = -2$

مجال الدالة R =

مدي الدالة ={-2}



الدالة F(x)= -2 يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (0,-2) ومداها يساوي {-2} الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية

$f(x) = 4$

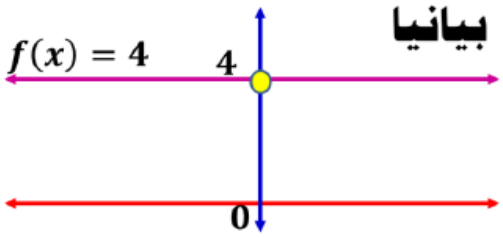
$f(2) = 4$

$f(5) = 4$

$f(-7) = 4$

مجال الدالة R =

مدي الدالة ={4}



الدالة F(x)= 4يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (0,4) ومداها يساوي {4} **الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية**

الدالة الخطية: هي دالة من الدرجة الاولي أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو واحد

$f(x) = 2x$ $f(x) = 3x - 2$

$f(x) = 5 - 4x$ $f(x) = 5x + 1$

الدالة الخطية من الدرجة الاولي **مجال الدالة** = R **مدي الدالة** = R

الدالة التربيعية: هي دالة من الدرجة الثانية أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 2

$f(x) = x^2 + 2x - 1$ $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$

$f(x) = 2 + 5x - 2x^2$ $f(x) = x^2$ **الدالة التربيعية من الدرجة الثانية**

الدالة التكعيبية: هي دالة من الدرجة الثالثة أي أن أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 3

$f(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 4$

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 11$

$f(x) = 2 + 5x^2 - 5x^3$

$f(x) = x^3 + 4$

الدالة التكعيبية من الدرجة الثالثة

تزايد وتناقص الدالة على فترة

في حالة دراسة تزايد وتناقص الدالة في فترة

اولا: نحدد قيمة اختيارية للمتغير x في الفترة ولتكن x_1

ثانيا: نوجد قيمة الدالة عند x_1 وهي $f(x_1)$

ثالثا: نحدد قيمة اختيارية اخري للمتغير x في الفترة ولتكن x_2 بحيث $x_2 > x_1$

رابعا: نوجد قيمة الدالة عند x_2 وهي $f(x_2)$

إذا كان $f(x_2) > f(x_1)$ فان الدالة تزايديه في الفترة

إذا كان $f(x_2) < f(x_1)$ فان الدالة تناقصية في الفترة

تمرين ابحث اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \qquad in\ [-2, 1]$$

الحـــــــــــــــــل

$$x_1 = -1 \quad \in [-2, 1]$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$x_2 = 0 \in [-2, 1] \ , \quad x_2 > x_1$$

$$f(0) = (0)^2 - 5(0) + 6 = 0 + 0 + 6 = 6$$

$$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

الدالة تناقصية في الفترة

.....

تمرين ابحث اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \qquad in\ [1, 4]$$

الحـــــــــــــــــل

$$x_1 = 2 \in [1, 4]$$

$$f(2) = (2)^2 + 3(2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$$

$$x_2 = 3 \in [1, 4] \ , \quad x_2 > x_1$$

$$f(3) = (3)^2 + 3(3) + 2 = 9 + 9 + 2 = 20$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

الدالة تزايديه في الفترة

.....

تمرين ابحث اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5 \qquad in\ [0, 5]$$

الحـــــــــــــــــل

$$x_1 = 1 \in [0, 5]$$

$$f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 5 = 1 + 1 - 5 = -3$$

$$x_2 = 4 \in [0, 5] \ , \quad x_2 > x_1$$

$$f(4) = (4)^3 + (4)^2 - 5 = 64 + 16 - 5 = 75$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

الدالة تزايديه في الفترة

.....

تمرين ابحث اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = 2 - x^3 \qquad in\ [-1, 3]$$

الحـــــــــــــــــل

$$x_1 = 0 \in [-1, 3]$$

$$f(1) = 2 - (0)^3 = 2 - 0 = 2$$

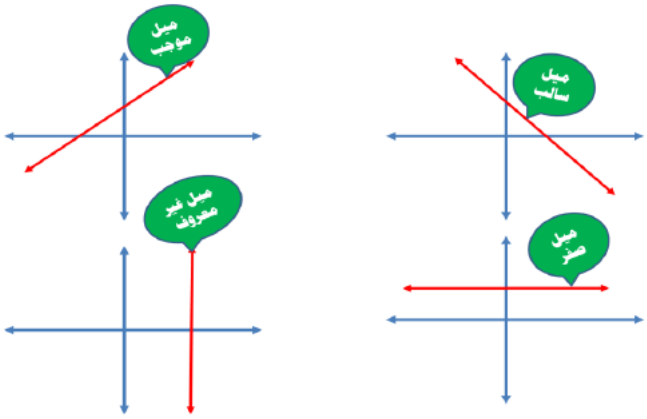
$$x_2 = 1 \in [-1, 3] \ , \quad x_2 > x_1$$

$$f(1) = 2 - (1)^3 = 2 - 1 = 1$$

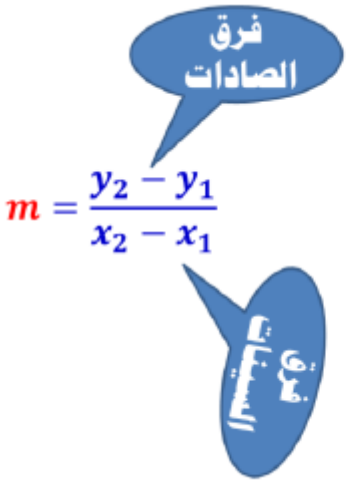
$$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

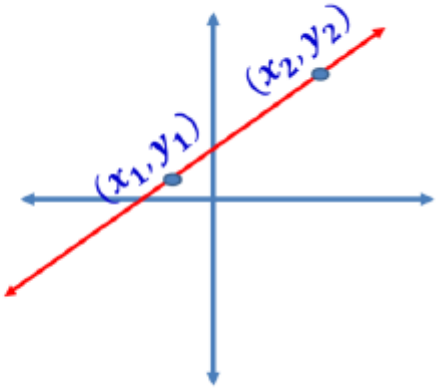
الدالة تناقصية في الفترة

ميل الخط المستقيم



المار بنقطتين **ميل الخط المستقيم**





مثال اوجد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين $(2,5)$, $(1,3)$

الحـــــــــــــــــل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

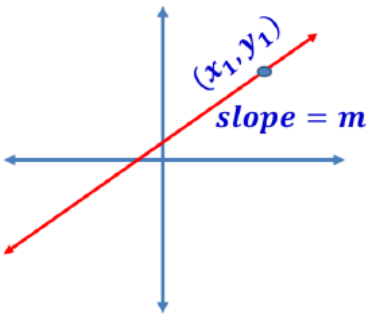
مثال اوجد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين $(6,3)$, $(-2,1)$

الحـــــــــــــــــل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{6-(-2)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

الحالات المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

1-) معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله m ويمر بنقطة معلومة (x_1, y_1)



$$(y - y_1) = m.(x - x_1)$$

مثال1) اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(2, -1)$ وميله = 3

الحـــــــــــــــل

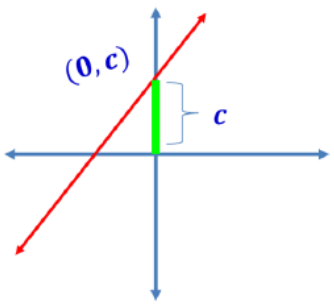
$$(y - y_1) = m.(x - x_1)$$
$$(y - (-1)) = 3.(x - 2)$$
$$y + 1 = 3x - 6$$
$$y = 3.x - 6 - 1$$
$$y = 3x - 7$$

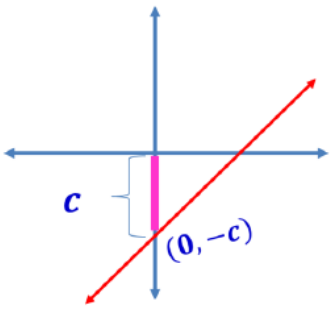
مثال2 اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(-3, 5)$ وميله = -1

الحـــــــــــــــل

$$(y - y_1) = m.(x - x_1)$$
$$(y - 5) = -1.(x + 3)$$
$$y - 5 = -x - 3$$
$$y = -x - 3 + 5$$
$$y = -x + 2$$

2-) معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله m وطول الجزء المقطوع من محور الصادات c





$$y = m\,x + c$$

مثال1) اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 وطول الجزء المقطوع من محور الصادات الموجب جزءا طوله 4 وحدات

الحـــــــــــــــــــل

$$m = 2,\ \ c = 4, \qquad y = m\,x + c\,, \qquad y = 2\,x + 4$$

.....

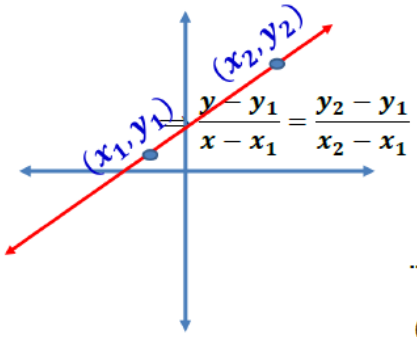
مثال2) اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات السالب جزءا طوله 7 وحدات

الحـــــــــــــــــــل

$$m = \frac{1}{3},\ \ c = -7, \qquad y = m\,x + c\,, \qquad y = \frac{1}{3}x - 7$$

.....

3-) معادلة الخط المستقيم يمر بنقطتين معلومتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2)



.....

.....

مثال اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(5, 8)$ و $(1, 3)$

الحـــــــــــــــــــل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{8 - 3}{5 - 1} \quad \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4y - 12 = 5x - 5 \quad \Rightarrow 4y = 5x - 5 + 12 \quad \Rightarrow 4y = 5x + 7$$

.....

مثال اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 6)$ و $(4, 5)$

الحـــــــــــــــــــل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 4} = \frac{6 - 5}{-1 - 4} \quad \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 4} = \frac{1}{-5}$$

$$\Rightarrow -5y + 25 = x - 4 \quad \Rightarrow -5y = x - 4 - 25 \quad \Rightarrow -5y = x - 29$$

تطبيقات اقتصادية وتجارية

مثال 1) حدد نقطة توازن السوق بالنسبة للقانوني الطلب والعرض التاليين:

قانون الطلب : $y = 25 - 2x$ ... (1)

قانون العرض : $y = 3x + 5$ ... (2)

الحـــــــــــــــل

عدد نقطة توازن السوق: الطلب = العرض

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

$$3x + 2x = 25 - 5$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

بالتعويض في معادلة : $y = 25 - 2(4)$

$$y = 25 - 8$$

$$y = 17$$

نقطة توازن السوق هي $(4, 17)$

.....

تمارين متنوعة

1) إذا كانت $f(x) = 2$ فان ... $= 5 \times f(3)$

أ) 3 ب) 10 ج) 15 د) 5

2) الدالة $f(x) = 2x^3 + 5x^5 + 4x - 11$ من الدرجة

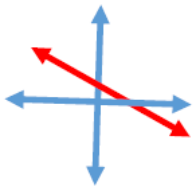
أ) الاولي ب) الثانية ج) الثالثة د) الخامسة

3) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويقطع جزءا من محور الصادات السالب طوله 5 وحدات هي

أ) $y = -2x + 5$ ب) $y = 2x - 5$ ج) $y = 5x - 2$

د) $y = 2x + 2$.

4) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل



أ) موجب ب) غير معروف ج) سالب د) صفر

5) ميل المستقيم المار بالنقطتين $(4, 6)$, $(1, 3)$ يساوي .....

أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

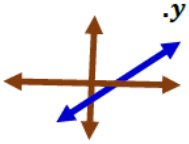
6) الدالة $f(x) = 7$ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

أ) (7,0) ب) (0,7) ج) (7,7) د) (0 , 0)

7) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويمر بالنقطة (1, 2) هي

أ) $y = 3x + 1$ ب) $y = x - 3$ ج) $y = 3x - 1$ د) $y = x + 3$.

8) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل



أ) موجب ب) غير معروف ج) سالب د) صفر

9) اذا كان $(3, 5) \in \{3, 7\} \times \{a, 6\}$ فان a= .....

أ) 3 ب) 7 ج) 5 د) 6

10) اذا كان $X \times Z = Z \times X$ فان .....

أ) $X = Z$ ب) $X \neq Z$ ج) $X \cap Z = X$ د) $X \cap Z = Z$

11) اذا كان X={2, 3} و Y={ 4, 5, 6} فان $(6,3) \in \cdots$

أ) $X \times Y$ ب) $Y \times X$ ج) X^2 د) Y^2

12) {1} × {7} =.....

أ) (1, 7) ب) {(1, 7)} ج) 7 د) 1

13) اذا كانت العلاقة R={(1,3) , (2,5) , (5,7), (4,9)} تمثل دالة فان مداها يساوي

أ) {3, 5,7,9} ب) {1,2,4,5} ج) {2,3,4,5} د) {3,4,6,7}

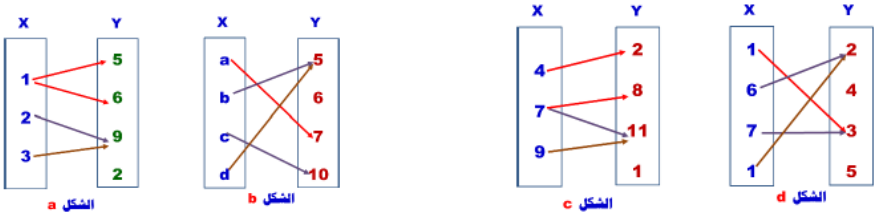
14) اذا كان (a -3 , 4) = (1 , b) فان a − b = …

أ) 3 ب) 2 ج) 1 د) zero

15) اذا كانت X= {4 , 11} n (X × Y) = 6, فان....= $n(Y^2)$

أ) 9 ب) 3 ج) 2 د) 4

تمرين) بين أي العلاقات التالية تمثل دالة مع ذكر السبب واذكر مجال ومدي الدالة في حالة العلاقة دالة



الشكل a الشكل b الشكل c الشكل d

الرياضيات المالية

الفائدة

الفائدة البسيطة: تحسب في نهاية كل سنة من قيمة أصل المبلغ المودع

مثال: اودع شخص في احد البنوك مبلغ 1000ريال بمعدل فائدة بسيطة 10% من اصل المبلغ

نهاية السنة الاولي: الفائدة البسيطة تساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100$

نهاية السنة الثانية: الفائدة البسيطة تساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100$

نهاية السنة الثالثة: الفائدة البسيطة تساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100$

مجموع الفوائد في ثلاث سنوات يساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} \times 3 = 300$

مجموع الفوائد في خمس سنوات يساوي $I = 1000 \times \frac{10}{100} \times 5 = 500$

.....

الفائدة المركبة

مثال: اودع شخص في احد البنوك مبلغ 1000 ريال بمعدل فائدة بسيطة 10% من اصل المبلغ

نهاية السنة الاولي: فائدة السنة الاولي $I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100$

تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الاولي فيصبح أصل المبلغ = 1000+ 100 = 1100

نهاية السنة الثانية: فائدة السنة الثانية $I = 1100 \times \frac{10}{100} = 110$

تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الثانية فيصبح أصل المبلغ = 1100 +110 = 1210

نهاية السنة الثالثة: فائدة السنة الثالثة $I = 1210 \times \frac{10}{100} = 121$

تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الثالثة فيصبح أصل المبلغ = 1210 +121 = 1331

هنا تسمي الفائدة - الفائدة المركبة

أولا: الفائدة البسيطة الفائدة البسيطة = أصل المبلغ × معدل الفائدة × المدة بالسنوات

$$I = P \times R \times T$$

الفائدة — اصل المبلغ — معدل الفائدة — المدة بالسنوات

P	Principal	R	Rate
T	Time	I	Simple Interest

.....

الجـــمـــلة: جملة المبلغ = اصل المبلغ + الفائدة البسيطة

$$S = P + I \qquad S: Sum$$

$$S = P + (P \times R \times T)$$

$$S = P.(1 + R.T)$$

مثال 1) اودع شخص مبلغ 10000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة 10 % سنويا لمدة خمس سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــل

$$P = 10000, \quad R = 0.10, \quad T = 5$$

$$I = P \times R \times T = 10000 \times 0.10 \times 5 = 5000$$

$$S = P + I = 10000 + 5000 = 15000$$

.....

مثال 2) اقترضت علا مبلغ 30000 ريال من احد البنوك بمعدل فائدة 12 % سنويا لمدة عشر سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ

الحـــــــــــــــل

$$P = 30000, \quad R = 0.12, \quad T = 10$$

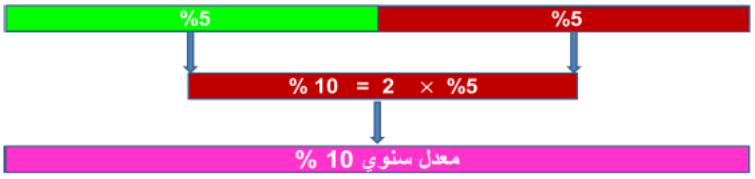
$$I = P \times R \times T = 30000 \times 0.12 \times 10 = 36000$$

$$S = P + I = 30000 + 36000 = 66000$$

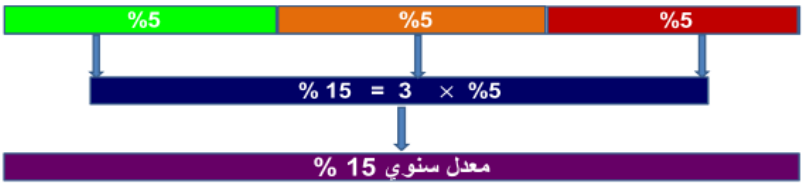
ملحوظة هامة: إذا لم يعطي معدل الفائدة معدل سنوي فيجب تحويله الي معدل سنوي لحساب قيمة الفائدة البسيطة سنويا

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل نصف سنوي	المعدل النصف سنوي × 2	المعدل السنوي

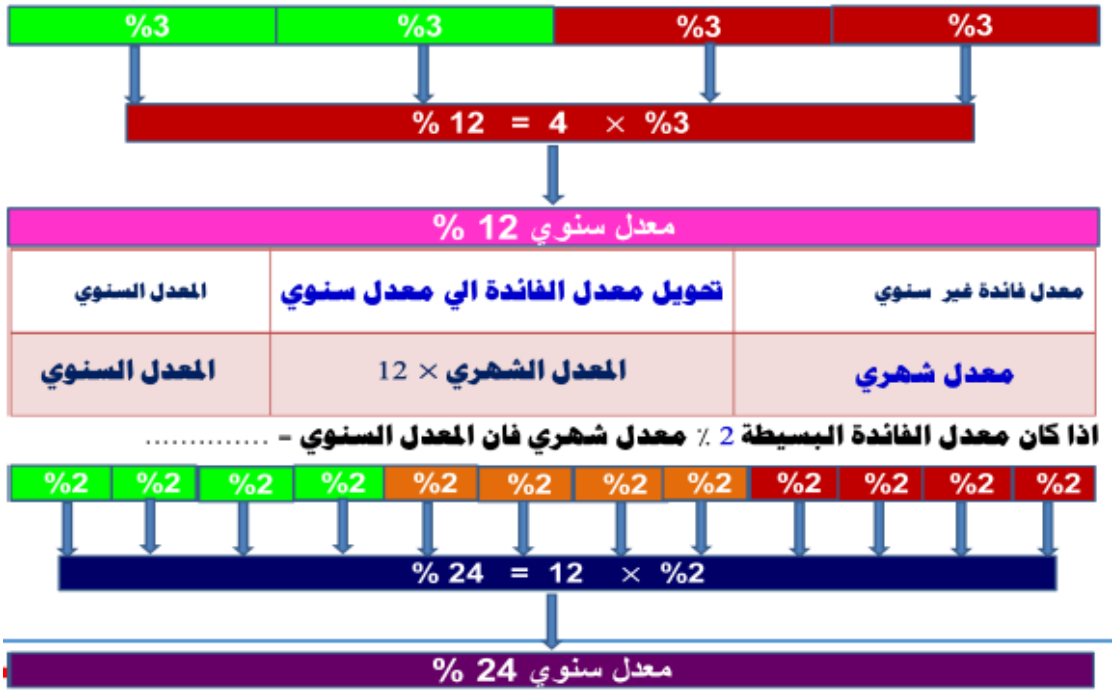
اذا كان معدل الفائدة البسيطة 5 ٪ معدل نصف سنوي فان المعدل السنوي -



اذا كان معدل الفائدة البسيطة 5 ٪ معدل ثلث سنوي فان المعدل السنوي -



اذا كان معدل الفائدة البسيطة 3 ٪ معدل ربع سنوي فان المعدل السنوي - .....



اذا كان معدل الفائدة البسيطة 2 ٪ معدل شهري فان المعدل السنوي - .....

مثال3) اقترضت احلام مبلغ 4000 ريال من احد البنوك بمعدل فائدة % 4 نصف سنوي لمدة 6 سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــــــل

$$P = 4000, \quad R = 0.04 \times 2 = 0.08, \quad T = 6$$

$$I = P \times R \times T = 4000 \times 0.08 \times 6 = 1920$$

$$S = P + I = 4000 + 1920 = 5920$$

مثال4) اودعت سهام مبلغ 8000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة 3 % ربع سنوي لمدة 4 سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ

الحـــــــــــــــل

$$P = 8000, \quad R = 0.03 \times 4 = 0.12, \quad T = 4$$

$$I = P \times R \times T = 8000 \times 0.12 \times 4 = 3840$$

$$S = P + I = 8000 + 3840 = 11840$$

.....

ملحوظة هامة: اذا كانت المدة بالشهور فيجب تحويل هذه المدة الي سنوات وذلك بقسمة المدة بالشهور ÷ 12

مثال: إذا كانت مدة الاستثمار هي 15 شهر فان المدة بالسنوات هي $T = \frac{15}{12}$

إذا كانت مدة الاستثمار هي 18 شهر فان المدة بالسنوات هي $T = \frac{18}{12}$

إذا كانت مدة الاستثمار هي 30 شهر فان المدة بالسنوات هي $T = \frac{30}{12}$

.....

مثال5) اودعت سهام مبلغ 2000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة 7 % سنوي لمدة 9 شهور . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــل

$$P = 2000, \quad R = 0.07, \quad T = \frac{9}{12}$$

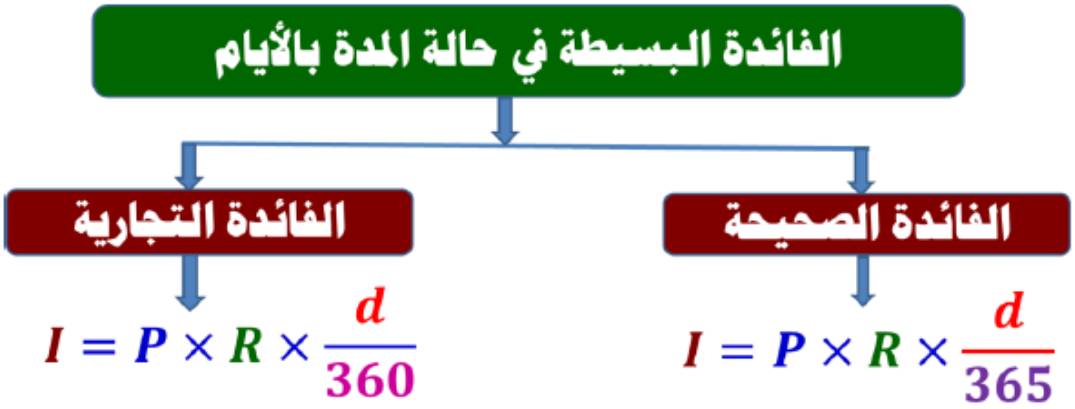
$$I = P \times R \times T = 2000 \times 0.07 \times \frac{9}{12} = 105$$

$$S = P + I = 2000 + 105 = 2105$$

السنة البسيطة	
الشهر	عدد الأيام
يناير	31
فبراير	28
مارس	31
ابريل	30
مايو	31
يونيه	30
يوليو	31
اغسطس	31
سبتمبر	30
أكتوبر	31
نوفمبر	30
ديسمبر	31
أيام السنة	365

السنة الكبيسة	
الشهر	عدد الأيام
يناير	31
فبراير	29
مارس	31
ابريل	30
مايو	31
يونيه	30
يوليو	31
اغسطس	31
سبتمبر	30
أكتوبر	31
نوفمبر	30
ديسمبر	31
أيام السنة	366

السنة التجارية	
الشهر	عدد الأيام
يناير	30
فبراير	30
مارس	30
ابريل	30
مايو	30
يونيه	30
يوليو	30
اغسطس	30
سبتمبر	30
أكتوبر	30
نوفمبر	30
ديسمبر	30
أيام السنة	360



1) اذا لم يذكر نوع الفائدة تحتسب فائدة تجارية

2) اذا لم يذكر تاريخ السنة تحتسب سنة بسيطة

مثال6) اودعت مي مبلغ 3000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة 6 % سنوي لمدة 120 يوم . اوجد الفائدة الصحيحة والفائدة التجارية المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــــل

أولا: الفائدة الصحيحة:

$$P = 3000, \quad R = 0.06, \quad T = \frac{120}{365}$$

$$I = P \times R \times T = 3000 \times 0.06 \times \frac{120}{365} = 59.1$$

$$S = P + I = 3000 + 59.1 = 3059.1$$

ثانيا: الفائدة التجارية:

$$P = 3000, \quad R = 0.06, \quad T = \frac{120}{360}$$

$$I = P \times R \times T = 3000 \times 0.06 \times \frac{120}{360} = 60$$

$$S = P + I = 3000 + 60 = 3060$$

الفائدة المركبة

جملة المبلغ $\Leftarrow S = P.\left(1+\frac{R}{n}\right)^{n\times T}$

الفائدة المركبة $\Leftarrow I = S - P,$

n عدد مرات اخذ الفائدة في السنة

ملاحظات علي حساب الفائدة المركبة

1) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب سنويا فإنها تعطي مرة واحدة خلال السنة n = 1

فاذا كانت الفائدة سنويا والمدة 5 سنوات فان عدد الفترات n.t = 1 x 5= 5

2) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب نصف سنوي فإنها تعطي مرتين خلال السنة n = 2

فيجب تقسيم كل سنة الي فترتين وذلك بضرب المدة بالسنوات في 2

3) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب ربع سنوي فتعطي أربع مرات خلال السنة n = 4

فيجب تقسيم كل سنة الي أربع فترات ن وذلك بضرب المدة بالسنوات في 4

4) اذا كانت الفائدة المركبة تحسب ثلث سنوي فإنها تعطي ثلاث مرات خلال السنة n = 3

فيجب تقسيم كل سنة الي ثلاث فترات وذلك بضرب المدة بالسنوات في 3

5) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب شهري فإنها تعطي 12 مرات خلال السنة n =12

فيجب تقسيم كل سنة الي 12 فترات وذلك بضرب المدة بالسنوات في 12

.....

مثال 1) اودعت مرام مبلغ 5000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8 % سنوي لمدة 3 سنوات . اوجد الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــــــل

$$P = 5000, \quad R = 0.08, \quad T = 3, \quad n = 1$$

$$S = P \times \left(1+\frac{R}{n}\right)^{n\times T} = 5000 \times \left(1+\frac{0.08}{1}\right)^{1\times 3} = 6298.5$$

$$I = S - P = 6298.5 - 5000 = 1298.5$$

.....

مثال 2) علياء اودعت مبلغ 7000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة 10 % نصف سنوي لمدة 5 سنوات . اوجد الفائدة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــــــل

$$P = 7000, \quad R = 0.1, \quad T = 5, \quad n = 2$$

$$S = P \times \left(1+\frac{R}{n}\right)^{n\times T} = 7000 \times \left(1+\frac{0.1}{2}\right)^{2\times 5} = 11402$$

$$I = S - P = 11402 - 7000 = 4402$$

مثال 3) علياء اودعت مبلغ 12000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة % 12 ربع سنوي لمدة 6 سنوات .
اوجد الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحـــــــــــــــــــل

$$P = 12000, \quad R = 0.12, \quad T = 6, \quad n = 4$$

$$S = P \times \left(1 + \frac{R}{n}\right)^{n \times T} = 12000 \times \left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4 \times 5} = 24393.5$$

$$I = S - P = 24393.5 - 12000 = 12393.5$$

.....

تمارين على حساب الفائدة المركبة:

1) الفائدة المركبة لمبلغ 1000 ريال تم إيداعه في أحد البنوك بفائدة مركبة 6% سنويا لمدة 3 سنوات يساوي.....

2) اقترض شخص لمبلغ 6000 ريال من أحد البنوك بفائدة مركبة 8% ربع سنوي لمدة 5 سنوات فان الفائدة .....

3) أودع باسم مبلغ 4000 ريال في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% نصف سنوي لمدة 6 سنوات فان الفائدة .....

4) جملة مبلغ 9000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% ثلث سنوي لمدة 8 سنوات هو .....

المحاضرة الرابعة: التفاضـــل وتطبيقاته

الدوال كثيرات الحدود

الدالة الثابتة هي دالة لها قيمة ثابتة مهما تغيرت قيمة المتغير x

$f(x) = 5 \Rightarrow f(2) = 5 \quad \Rightarrow f(-5) = 5 \quad \Rightarrow f(-2) = 5 \quad \Rightarrow f(9) = 5$

$f(x) = -2$	$f(x) = 4$
$f(5) = -2$	$f(2) = 4$
$f(4) = -2$	$f(5) = 4$
$f(2) = -2$	$f(-7) = 4$
مجال الدالة = R	مجال الدالة = R
مدي الدالة = {-2}	مدي الدالة = {4}

الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية

الدالة الخطية: هي دالة من الدرجة الاولي أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو واحد

$f(x) = 2x,$	$f(x) = 3x - 2$
$f(x) = 5 - 4x,$	$f(x) = 5x + 1$
مدي الدالة الخطية = R	مجال الدالة الخطية = R

الدالة الخطية من الدرجة الاولى

.....

الدالة التربيعية: هي دالة من الدرجة الثانية أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 2

$$f(x) = x^2 + 2x - 1, \qquad f(x) = 3x^2 + 5x + 6$$

$f(x) = 2 + 5x - 2x^2,$ $f(x) = x^2$

الدالة التربيعية من الدرجة الثانية

.....

الدالة التكعيبية: هي دالة من الدرجة الثالثة أي أن أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 3

$f(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 4,$ $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 11$

$f(x) = 2 + 5x^2 - 5x^3,$ $f(x) = x^3 + 4$

الدالة التكعيبية من الدرجة الثالثة

.....

قواعد الاشتقاق (التفاضل) للدوال كثيرات الحدود

الدالة	المشتقة الاولي للدالة
F(x)	F'(x)
Y(x)	Y'(x)
$Y(x)$	$\frac{dY}{dx}$

القاعدة الاولى: المشتقة الاولي لأي عدد ثابت يساوي صفر

الدالة	المشتقة الاولي للدالة
F(x)=5	F'(x)= 0
Y(x)= -7	Y'(x)=0
$Y(x) = \sqrt{6}$	$\frac{dY}{dx} = 0$

القاعدة الثانية

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2$

$f(x) = -5x \Rightarrow f'(x) = -5$

$y = \frac{2}{3}x + 5 \Rightarrow y' = \frac{2}{3}$

القاعدة الثالثة

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$f(x) = x^7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$f(x) = x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3 \times 2x^{3-1} = 6x^2$$

$$y = \frac{3}{5}x^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 4 \times \frac{3}{5}x^{4-1} = \frac{12}{5}x^3$$

$$y = \frac{2}{x^6} = 2x^{-6} \quad \Rightarrow \quad y' = -6 \times 2x^{-6-1} = -12x^{-7}$$

1-إذا كان $y = 2x^3 + 4x + 6$ فأوجد المشتقة الاولي للدالة

الحـــــــــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 4$$

2-إذا كان $y = 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 7x + 11$ فأوجد المشتقة الاولي للدالة؟

الحـــــــــــــــل

$$y' = 15x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 7$$

3- اذا كان $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3} + 5x^2$ فأوجد المشتقة الاولي للدالة؟

الحـــــــــــــــل

$$y = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-3} + 5x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-4} + 10\,x$$

4-إذا كان $y = 2x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 8x + 31$ فأوجد المشتقة الاولي للدالة؟

الحـــــــــــــــــــل

$$y' = 12x^5 - 20x^4 + 12x^3 - 8$$

القاعدة الرابعة

$$y = f(x)^n \longrightarrow y' = nf(x)^{n-1} \times f'(x)$$

$1 - y = (2x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2$

$2 - y = (5-6x)^7 \quad \Rightarrow \quad y' = 7(5-6x)^6 \times (-6) = -42\ (5-6x)^6$

$3)\ y = (x^2+3x-5)^4 \quad \Rightarrow \quad y' = 4(x^2+3x-5)^3 \times (2x+3)$

$\Rightarrow \quad y' = 4(2x+3)(x^2+3x-5)^3$

$\Rightarrow \quad y' = (8x+12)(x^2+3x-5)^3$

.....

القاعدة الخامسة

مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الدالة الاولي x الثانية + مشتقة الدالة الثانية x الاولي

$$if\ y = f(x) \times g(x) \rightarrow \quad y' = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

.....

$ex: y = (2x+3)(5x-2) \quad find\ y' \ ? \quad \rightarrow y' = (2)(5x-2) + (5)(2x+3)$

$\rightarrow y' = 10x - 4 + 10x + 15 = 20x + 11$

.....

$ex2 \quad y = (x^2+3x+4)(4x-1) \quad find\ y' \ ?$

$\rightarrow y' = (2x+3)(4x-1) + (4)(x^2+3x+4)$

$\rightarrow y' = 8x^2 - 2x + 12x - 3 + 4x^2 + 12x + 16$

$\rightarrow y' = 12x^2 - 22x + 13$

.....

$ex3 \quad y = (2x-5)(2x+5) \quad find\ y' \ ?$

$\rightarrow y' = (2)(2x-5) + (2)(2x+5)$

$\rightarrow y' = 4x - 10 + 4x + 10 = 8x$

القاعدة السادسة

مشتقة خارج قسمة دالتين = $\dfrac{\text{مشتقة البسط x المقام - مشتقة المقام x البسط}}{\text{مربع المقام}}$

$$if\ y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{[g(x)]^2}$$

$ex1)\ \ y=\dfrac{3x-1}{2x+5},\qquad find\ y'\ ?$

$$y'=\frac{(3)(2x+5)-(2)(3x-1)}{(2x+5)^2}$$

$$y'=\frac{6x+15-6x+2}{(2x+5)^2}=\frac{17}{(2x+5)^2}$$

.....

$ex2)\ \ y=\dfrac{4x+3}{x^2-5x+1},\qquad find\ y'\ ?$

$$y'=\frac{(4)(x^2-5x+1)-(2x-5)(4x+3)}{(x^2-5x+1)^2}$$

$$y'=\frac{4x^2-20x+4-8x^2-6x+20x+15}{(x^2-5x+1)^2}$$

$$y'=\frac{-4x^2-6x+19}{(x^2-5x+1)^2}$$

.....

القاعدة السابعة: مشتقة الدالة الاسية

مشتقة الدالة الاسية= مشتقة اس الدالة x الدالة نفسها

If $\ y=e^{f(x)}\ \Rightarrow\ y'=f'(x).e^{f(x)}$

.....

$ex1)\ \ If\ y=e^{2x}\ \Rightarrow\ y'=2.e^{2x}$

$ex2)\ \ If\ \ y=e^{2x}\ \Rightarrow\ y'=2.e^{2x}$

$ex3)\ If\ \ y=e^{5x+3}\ \Rightarrow\ y'=5.e^{5x+3}$

$ex4)\ If\ \ y=e^{x^2-3x+1}\ \Rightarrow\ y'=(2x-3).e^{x^2-3x+1}$

القاعدة الثامنة: مشتقة الدالة اللوغاريتمية

$$If\ \ y=ln\ f(x)\Rightarrow\ \ y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

.....

$ex1)\ y=ln\ x\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{1}{x}$

$ex2)\ y=ln\ (2x-1)\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{2}{2x-1}$

$ex3)\ y=ln\ (x^3+5x^2-1)\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{3x^2+10x}{x^3+5x^2-1}$

$ex4)\ y=ln\ (x^2-2x+3)+ln\ (6+7x-3x^2)$

$$\Rightarrow y'=\frac{2x-2}{x^2-2x+3}+\frac{7-6x}{6+7x-3x^2}$$

المشتقات من الرتب العليا

الدالة	المشتقة الثانية	المشتقة الاولي	المشتقة الثالثة
f(x)	f''(x)	f'(x)	f'''(x)
y(x)	y''(x)	y'(x)	y'''(x)
y(x)	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$

.....

1) $if \quad y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + 12 \quad find\ y', y'', y'''$

$$y' = x^2 - 8x + 5$$
$$y'' = 2x - 8$$
$$y''' = 2$$

.....

2) $if \quad y = x^6 + 4x^5 - 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6\ , \quad find\ y', y'', y'''$

$y' = 6x^5 + 20x^4 - 6x^2 + 10x + 7, \quad \Rightarrow \quad y'' = 30x^4 + 80x^3 - 12x + 10$

$y''' = 120x^3 + 240x^2 - 12$

تطبيقات التفاضل

أولا: إيجاد ميل المماس (m)

ميل المماس لمنحني الدالة عند أي نقطة احداثيتها (x , y) يساوي قيمة المشتقة الاولي للدالة عند هذه النقطة

.....

مثال 1) اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ عند النقطة (1, 0) ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: نوجد المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = 6x - 2$

ثانيا: نعوض بقيمة المتغير x $f'(1) = 6(1) - 2 = 6 - 2 = 4$

ثالثا: ميل المماس يساوي المشتقة الاولي $m = f'(1) = 4$

.....

مثال 2) اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ عند النقطة (2,3) ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: نوجد المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

ثانيا: نعوض بقيمة المتغير x $f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$

ثالثا: ميل المماس يساوي المشتقة الاولي $m = f'(2) = -3$

.....

مثال 3 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x)=x^3-9x^2+24x-10$ عندما x=1 ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: نوجد المشتقة الاولي للدالة $f'(x)=3x^2-18x+24$

ثانيا: نعوض بقيمة المتغير x $f'(1)=3(1)^2-18(1)+24=3-18+24=9$

ثالثا: ميل المماس يساوي المشتقة الاولي $m=f'(1)=9$

تمارين

تمرين 1 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x)=x^2-6x+1$ *عندما* $x=-1$؟

تمرين 2 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x)=3x^2-x^3$ عند النقطة $(2,4)$ ؟

تمرين 3 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$ *عند النقطة* $(3,-8)$ ؟

ثانيا: إيجاد النهاية العظمي والصغرى للدالة

الخطوة الاولي: نوجد المشتقة الاولي للدالة

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة الاولي بالصفر وإيجاد قيم x

الخطوة الثالثة: نوجد المشتقة الثانية للدالة

الخطوة الرابعة: نعوض بكل قيمة x في المشتقة الثانية

الخطوة الخامسة: إذا كانت قيمة المشتقة الثانية سالبة كان للدالة نهاية عظمي وان كانت موجبة فلها قيمة صغري

.....

مثال 1) اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x)=3x^2-12x+1$ ؟

الحـــــــــــــــل

$f'(x)=6x-12$	$f''(2)=6>0$
$6x-12=0$	للدالة قيمة صغري عند $x=2$
$6x=12$	لإيجاد هذه القيمة الصغرى للدالة
$x=\frac{12}{6}=2$	$f(2)=3(2)^2-12(2)+1$
$f''(x)=6$	$f(2)=12-24+1=-11$

مثال 2) اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ ؟

الحـــــــــــــــل

$f'(x)=3x^2-12x+9$	$f''(1)=6(1)-12=-6$
$3x^2-12x+9=0$	$f''(3)=6(3)-12=6$
$3(x^2-4x+3)=0$	للدالة قيمة عظمي عند $x=1$
$3(x-1)(x-3)=0$	للدالة قيمة صغري عند $x=3$
$x=1, \quad x=3$	$f(1)=(1)^3-6(1)^2+9(1)+1=5$
$f''(x)=6x-12$	$f(3)=(3)^3-6(3)^2+9(3)+1=1$

تمارين

تمرين 1 اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 1$ ؟

تمرين 2 اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x) = 3x^2 - x^3$ ؟

تمرين 3 اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$؟

بعض التطبيقات الاقتصادية على التفاضل

التكاليف الثابتة *Fixed Costs* : هي التكاليف التي لا تتغير بتغير الإنتاج.

التكاليف المتغيرة *Variable Costs* : وهي التكاليف التي تتغير بتغير الإنتاج.

التكاليف الكلية *Total Costs* : وتتكون من جميع التكاليف الثابتة الكلية والتكاليف المتغيرة الكلية للإنتاج معاً

التكاليف الحدية *Marginal Costs* : وهي التكلفة المضافة من أجل إنتاج وحدة واحدة زيادة في الناتج. ويمكن الحصول على التكلفة الحدية عن طريق تفاضل التكلفة الكلية

دالة الايراد الكلي *Total Revenue* : وهو الايراد او العائد من بيع وحدات المنتج

دالة الايراد= عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الحدة

الايراد الحدي *Marginal Revenue* : وهي الايراد او العائد من بيع وحدة انتاج إضافية. ويمكن الحصول على الإيراد الحدي عن طريق تفاضل دالة الايراد الكلي

دالة الربح الكلي *Total Profit* : دالة الربح= الايراد الكلي – التكاليف الكلية

الربح الحدي *Marginal Profit* : ويمكن الحصول على الربح الحدي عن طريق تفاضل دالة الربح الكلي

.....

أولا: إيجاد دالة التكاليف الحدية

دالة التكاليف الحدية: هي المشتقة الاولي لدالة التكاليف

مثال: اذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة حيث x عدد الوحدات المنتجة

$$C(x) = x^3 + 3x^2 - 50x + 300$$

فأوجد دالة التكاليف الحدية ثم اوجد التكاليف الحدية عند انتاج 10 وحدات

الحـــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد دالة التكاليف الحدية بإيجاد المشتقة الاولي لدالة التكاليف $C'(x) = 3x^2 + 6x - 50$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة التكاليف الحدية التعويض بقيمة x (عدد الوحدات)

$$C'(10) = 3(10)^2 + 6(10) - 50 = 300 + 60 - 50 = 310$$

مثال: اذا كانت دالة الايراد تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة)

$$R(x) = 5 + 10x - 2\,x^2 + x^3$$

فأوجد دالة الايراد الحدي ثم اوجد الايراد الحدي عند انتاج 50 وحدات؟

الحـــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد الايراد الحدي بإيجاد المشتقة الاولي لدالة الايراد $R'(x) = 10 - 4\,x + 3x^2$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الايراد الحدي التعويض بقيمة x (عدد الوحدات)

$$R'(50) = 10 - 4\,(50) + 3(50)^2 = 10 - 200 + 7500 = 7310$$

.....

ثانيا: إيجاد دالة الربح الحدي

دالة الربح الحدي: هي المشتقة الاولي لدالة الربح

مثال: اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة) $P(x) = 3x^2 + 100x - 30$

فأوجد دالة الربح الحدي ثم اوجد الايراد الحدي عند انتاج 40 وحدات ؟

الحـــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد الربح الحدي بإيجاد المشتقة الاولي لدالة الربح $P'(x) = 6x + 100$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الربح الحدي التعويض بقيمة x (عدد الوحدات)

$$P'(40) = 6(40) + 100 = 240 + 100 = 340$$

.....

مثال: اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة) $P(x) = 10x^2 - 300x - 500$

فأوجد دالة الربح الحدي ثم اوجد الايراد الحدي عند انتاج 80 وحدة ؟

الحـــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد الربح الحدي بإيجاد المشتقة الاولي لدالة الربح $P'(x) = 20x - 300$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الربح الحدي التعويض بقيمة x (عدد الوحدات)

$$P'(80) = 20(80) - 300 = 1600 - 300 = 1300$$

.....

القيمة العظمي او الصغرى لدالة الايراد او لدالة الربح

لإيجاد القيمة العظمي او الصغرى لدالة الايراد او لدالة الربح:

1) نوجد المشتقة الاولي لدالة الايراد او دالة الربح (الايراد الحدي او الربح الحدي)

2) نساوي المشتقة الاولي بالصفر ونوجد قيمة المتغير x

3) نوجد المشتقة الثانية ثم نعوض بقيمة x في المشتقة الثانية

4) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة تكون للدالة نهاية صغري -سالبة تكون للدالة نهاية عظمي

5) إذا نعوض في الدالة نفسها لإيجاد القيمة إذا كانت عظمي او صغري

.....

مثال: اذا كانت دالة الايراد تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة) $R(x) = x^2 - 6x + 20$

فأوجد القيمة العظمي او الصغرى للإيراد؟ الحـــــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد المشتقة الاولي لدالة الايراد

$$R'(x) = 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad 2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 6 \quad \Rightarrow x = 3$$

قيمة المشتقة الثانية موجبة $R''(x) = 2 \quad \Rightarrow R''(3) = 2$

دالة الايراد لها قيمة صغري عند $x = 3$ نوجد القيمة الصغرى بالتعويض في الدالة

$$R(3) = (3)^2 - 6(3) + 20 \quad = 9 - 18 + 20 = 11$$

.....

مثال: اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث x عدد الوحدات المنتجة) $R(x) = 5 + 8x - 2x^2$

فأوجد القيمة العظمي او الصغرى للإيراد؟ الحـــــــــــــــــــل

الخطوة الاولي نوجد المشتقة الاولي لدالة الايراد

$$R'(x) = 8 - 4x, \quad \Rightarrow \quad 8 - 4x = 0, \quad \Rightarrow \quad 8 = 4\,x$$

قيمة المشتقة الثانية سالبة $R''(x) = -4\,, \quad \Rightarrow R''(2) = -4$

دالة الربح لها قيمة عظمي عند $x = 2$ نوجد القيمة الصغرى بالتعويض في الدالة

$$R(2) = 5 + 8(2) - 2\,(2)^2 = 5 + 16 - 8 = 13$$

مرونة الطلب

يستخدم الاقتصاديون المرونة لدراسة مدى تأثير تغير السعر p على الكمية المطلوبة q وتُعرف على أنها معدل التغير النسبي في الكمية المطلوبة على معدل التغير النسبي في السعر.

ونعرفها رياضياً كما يلي: -

إذا كانت الكمية المطلوبة من الوحدات هي (q) ، وسعر الوحدة هو (p)، فإن مرونة الطلب E_p تعطى بالعلاقة الآتية:

$$E_p = \frac{p.\,q'}{q}$$

ويقال أن الطلب مرن إذا كان (القيمة المطلقة للمرونة) $|E_p| > 1$

ويقال إن الطلب غير مرن إذا كان (القيمة المطلقة للمرونة) $|E_p| < 1$

.....

مثال إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p) تعطى بالمعادلة الآتية : $q = 500 - 3\,p^2$

فأوجد: (1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عندما $p=5\ ,\ p=10$

الحـــــــــــــــــل

$$q = 500 - 3\,p^2 \quad \Rightarrow q' = -6\,p \quad \Rightarrow E_p = \frac{p.\,q'}{q} = \frac{p.\,(-6\,p)}{500 - 3\,p^2} \quad \frac{-6p^2}{500 - 3\,p^2}$$

1-) إيجاد المرونة عند $p=5$

$$E_p = \frac{-6(5)^2}{500 - 3\,(5)^2} = \frac{-150}{425} = -0.353$$

$$|E_p| = 0.353 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{الطلب غير مرن}$$

2-) إيجاد المرونة عند p=10

$$E_p = \frac{-6(10)^2}{500 - 3\,(10)^2} = \frac{-600}{200} = -3$$

$$|E_p| = 3 > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{الطلب مرن}$$

.....

مثال2) إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p)تعطى بالمعادلة الآتية: $q = 4000 - 100\,p$

فأوجد: (1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عندم $p=25\ ,\ p=15$?

الحـــــــــــــــــل

$$q = 4000 - 100\,p \ \Rightarrow \ q' = -100 \ \Rightarrow \ E_p = \frac{p.\,q'}{q} \Rightarrow E_p = \frac{p.\,(-100)}{4000 - 100\,p}$$

$$E_p = \frac{-100\,p}{4000 - 100\,p}$$

1-) إيجاد المرونة عند p= 15

$$E_p = \frac{-100(15)}{4000 - 100\,(15)} = \frac{-1500}{2500} = -0.6$$

$$|E_p| = 0.6 < 1 \quad \Rightarrow \quad \textit{الطلب غير مرن}$$

2-) إيجاد المرونة عند p= 25

$$E_p = \frac{-100(25)}{4000 - 100\,(25)} = \frac{-2500}{1500} = -1.67$$

$$|E_p| = 1.67 > 1 \quad \Rightarrow \quad \textit{الطلب مرن}$$

.....

تمرين: إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p) تعطى بالمعادلة الآتية:

$$q = 200 - 7\,p^2$$

فأوجد:(1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عندما $p=5\ ,\ p=10$

.....