



جامعة الدمام  
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع  
الرياضيات للإدارة

**MATH 120**

دكتور محمد تركي

أستاذ الرياضيات والاحصاء المساعد

الايمل الجامعي

[mstorky@uod.edu.sa](mailto:mstorky@uod.edu.sa)

الفصل الأول: الدوال (الازواج المرتبه - الضرب الديكارتي - العلاقة والدالة - الدوال - معادلات الخط المستقيم)

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (معدل الربح البسيط-معدل الربح المركب)

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (قوانين النهايات-الاتصال - تطبيقات اقتصادية

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) -مشتقات الدوال -التطبيقات الاقتصادية: (الإيراد الحدي، التكلفة الحدية، الربح الحدي)

الفصل الخامس: التكامل - التكامل الغير محدود - التكامل المحدود - تطبيقات اقتصادية - المعادلات التفاضلية

خطة توزيع الدرجات	
الدرجة	البنود
10	تحميل المحاضرات والمادة العلمية او مشاهدتها
10	الواجبات (4 واجبات)
10	الاختبار الفصلي
70	الاختبار النهائي
100	المجموع

## أولاً: المجموعات

$$A = \{1, 2, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$B = \{3, 8, 9, 11, 15\} \Rightarrow n(B) = 5$$

$$\phi = \{\} \Rightarrow n(\phi) = 0$$

$$X = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \Rightarrow \text{مجموعة غير محدودة}$$

$$Y = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow \text{مجموعة محدودة}$$

$$\{5, 7\} = \{7, 5\} \Rightarrow \text{الترتيب ليس له أهمية}$$

## الزوج المرتب

المسقط الأول



$(a, b)$

المسقط الثاني

الأحداثي الأول



$(2, 4)$

الأحداثي الثاني

الأحداثي السيني



$(6, 1)$

الأحداثي الصادي

$(a, b)$



الترتيب له أهمية

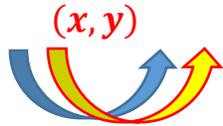
$(x, y)$



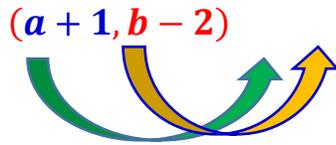
$x = a, \quad y$

## مقارنة بين المجموعة والزوج المرتب

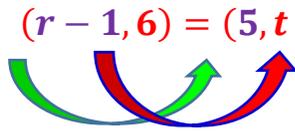
الزوج المرتب	المجموعة	
( )	{ }	الشكل
لا يوجد زوج مرتب خالي	$\emptyset = \{ \}$ يوجد مجموعة خالية	الوجود
الزوج المرتب يتكون فقط من مسقطين المسقط الأول والمسقط الثاني او احداثيين الإحداثي الأول والاحداثي الثاني	$\emptyset, \{5\}, \{2, 6, 7\}, \{2, 4, 6, \dots\}$ يوجد مجموع خالية او بها عنصر او عنصرين او ثلاثة او عدد لا نهائي	عدد العناصر
$(3, 5) \neq (5, 3)$ الترتيب مهم	$\{3, 5\} = \{5, 3\}$ الترتيب ليس له أهمية	ترتيب العناصر



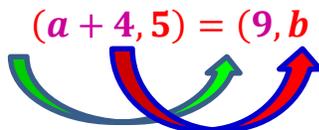
$$x = 3, y$$



$$a = 2, b$$



$$r = 6, t$$



$$a = \dots, b$$

## الضرب الديكارتي لمجموعتين X و Y

هو عبارة عن كل الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من X ومسقطها الثاني من Y

1-مثال إذا كان  $x = \{1, 3, 5\}$  ,  $y = \{a, b\}$  فأوجد حاصل الضرب الديكارتي

ومثله بمخطط سهمي  $X \times Y$  and  $Y \times X$  ,  $X \times X$  ,  $Y \times Y$

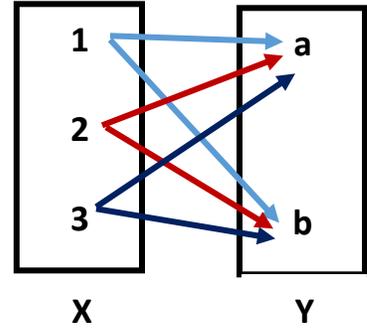
الحل

1)  $X = \{1, 3, 5\}$ ,  $Y = \{a, b\}$ ,

$$X \times Y = \{1, 3, 5\} \times \{a, b\},$$

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b)\}$$

$X \times Y$  المخطط السهمي

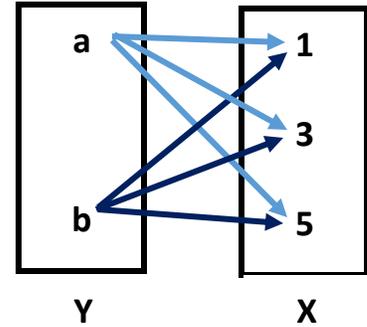


2)  $Y = \{a, b\}$ ,  $X = \{1, 3, 5\}$ ,

$$Y \times X = \{a, b\} \times \{1, 3, 5\},$$

$$Y \times X = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (b, 5)\}$$

$Y \times X$  المخطط السهمي

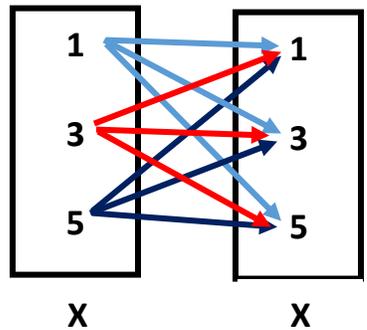


3)  $X = \{1, 3, 5\}$ ,  $X = \{1, 3, 5\}$ ,

$$X \times X = \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\},$$

$$X \times X = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$X \times X$  المخطط السهمي

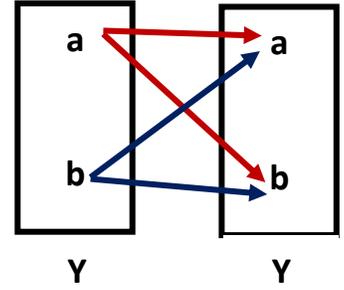


4)  $Y = \{a, b\}$ ,  $Y = \{a, b\}$ ,

$$Y \times Y = \{a, b\} \times \{a, b\},$$

$$X \times Y = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

$Y \times Y$  المخطط السهمي



### ملاحظات على الضرب الديكارتي

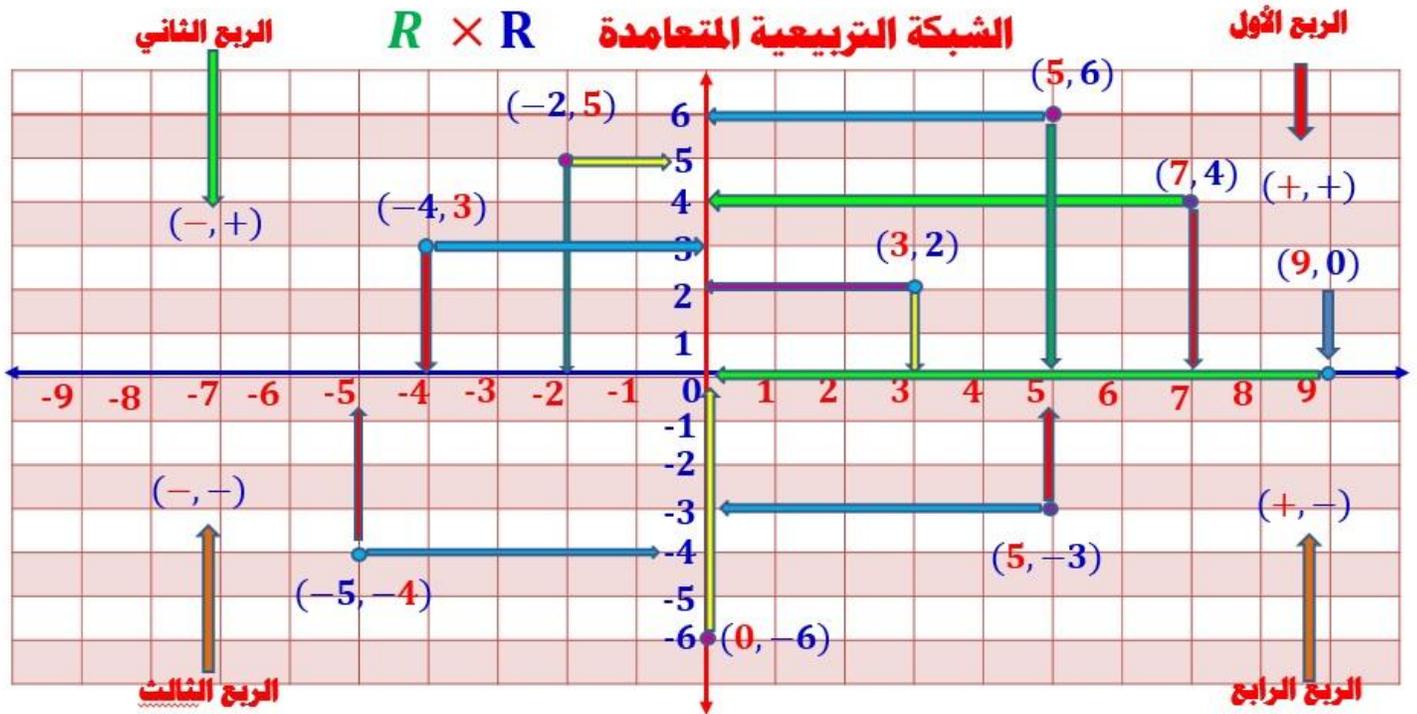
(1) إذا كان المجموعة  $A = \{2, 6, 9\}$  فإنه يرمز لعدد عناصر المجموعة  $A$   $n(A) = 3$

(2) إذا كان المجموعة  $B = \{4, 8\}$  فإنه يرمز لعدد عناصر المجموعة  $B$   $n(B) = 2$

(3) فإن عدد عناصر حاصل الضرب  $A \times B$  يرمز له بالرمز  $n(A \times B)$

$$n(A \times B) = 6, n(B \times A) = 6 \Rightarrow n(A \times B) = n(B \times A)$$

$$(3, 4) \neq (4, 3) \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$



## ملاحظات على الشبكة التربيعية

أي نقطة تقع في الربع الأول يكون احداثياتها موجبين معا  $(+, +)$

أي نقطة تقع في الربع الثاني يكون احداثياتها  $(-, +)$

أي نقطة تقع في الربع الثالث يكون احداثياتها سالبين معا  $(-, -)$

أي نقطة تقع في الربع الرابع يكون احداثياتها  $(+, -)$

أي نقطة تقع على محور السينات احداثها الصادي يساوي صفر  $(\pm, 0)$

أي نقطة تقع على محور الصادات احداثها السيني يساوي صفر  $(0, \pm)$

## تمارين متنوعة

1) النقطة التي احداثياتها  $(2, -5)$  تقع في الربع.....

أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

2) النقطة  $(-1, -3)$  تقع في الربع.....

أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

3) النقطة  $(0, 7)$  تقع في.....

أ) الربع الأول (ب) محور السينات (ج) الربع الثالث (د) محور الصادات

4) اذا كانت النقطة  $(x, x+3)$  تقع في الربع الثالث فان  $x$  يمكن ان تساوي.....

أ) -1 (ب) 3 (ج) -4 (د) -2

5) اذا كان  $(a, b) = (3, 5)$  فان  $a + b = \dots$

أ) 3 (ب) 5 (ج) 8 (د) 2

6) اذا كان  $n(y^2) = 25$  فان  $n(y) = \dots$

أ) 2 (ب) 5 (ج) 10 (د) 15

7) اذا كان  $n(X \times Y) = 24, n(X) = 6$  فان  $n(Y) = \dots$

أ) 2 (ب) 8 (ج) 6 (د) 4

8) اذا  $X \times Y = \{(2, 6), (2, a), (3, 6), (3, a), (5, 6), (5, a)\}$  كان فان  $x = \dots$

أ)  $\{2, 3, 5\}$  (ب)  $\{2, 3\}$  (ج)  $\{6, a\}$  (د)  $\{5, 6\}$

9) اذا كان  $n(X^2) = 9, n(X \times Y) = 12$  فان  $n(Y) = \dots$

أ) 3 (ب) 6 (ج) 4 (د) 21

$$\{0\} \times \{5\} = \dots \dots \quad (10)$$

أ (0,5)      ب) {(0,5)}      ج) 5      د) 0

(11) إذا كان  $(3, 5) \in \{3, 7\} \times \{a, 6\}$  فان  $a = \dots$

أ) 3      ب) 7      ج) 5      د) 6

(12) إذا كان  $X \times Z = Z \times X$ , فان .....

أ)  $X = Z$       ب)  $X \neq Z$       ج)  $X \cap Z = X$       د)  $X \cap Z = Z$

(13) إذا كان  $X = \{2, 3\}$  و  $Y = \{4, 5, 6\}$  فان  $(6, 3) \in \dots$

أ)  $X \times Y$       ب)  $Y \times X$       ج)  $X^2$       د)  $Y^2$

### العلاقة والدالة

العلاقة من مجموعة X الي مجموعة Y هي

هي علاقة تربط بعض او كل عناصر المجموعة X ببعض او كل عناصر المجموعة Y

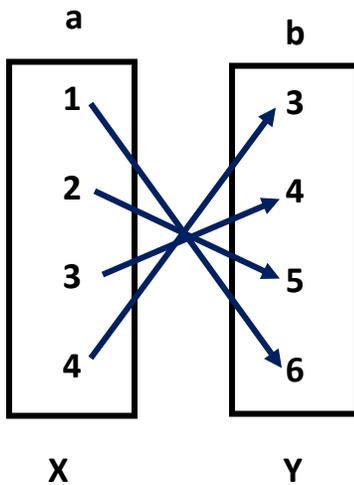
العلاقة من مجموعة X الي مجموعة Y هي

او هي بعض او كل الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من X ومسقطها الثاني من Y

مثال إذا كانت المجموعة  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  والمجموعة  $Y = \{3, 4, 5, 6\}$  وكانت R علاقة من X الي Y

حيث  $aRb$  تعني ان  $a + b = 7$  اكتب بيان العلاقة R ومثله بمخطط سهمي وبين هل العلاقة R دالة ام لا

### الحل



$$R = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3)\}$$

العلاقة دالة لان كل عنصر من عناصر x خرج منه سهم واحد فقط

مجال الدالة هو عناصر المجموعة X يساوي  $\{1, 2, 3, 4\}$

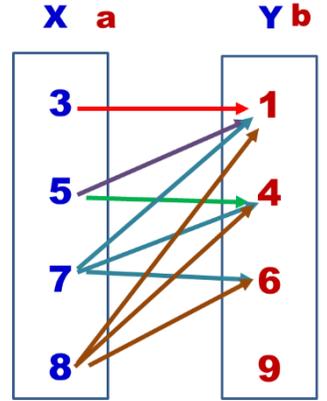
مدي الدالة هو ما وصلت اليه الأسهم في Y يساوي  $\{3, 4, 5, 6\}$

مثال إذا كانت المجموعة  $X = \{3, 5, 7, 8\}$  و  $Y = \{1, 4, 6, 9\}$  وكانت R علاقة من X الي Y

حيث  $aRb$  تعني ان  $a > b$  اكتب بيان العلاقة R ومثله بمخطط سهمي وبين هل العلاقة R دالة ام لا

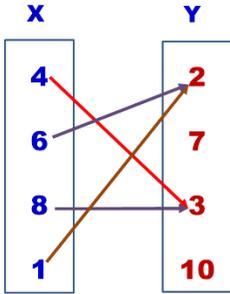
## المسألة

$$R = \{(3, 1), (5, 1), (5, 4), (7, 1), (7, 4), (7, 6), (8, 1), (8, 4), (8, 6)\}$$

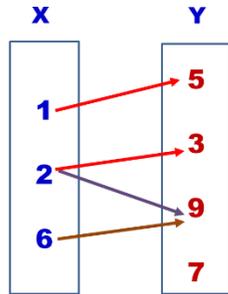


العلاقة ليست دالة لان العناصر 5 و 7 و 8 خرج منها اكثر من سهم

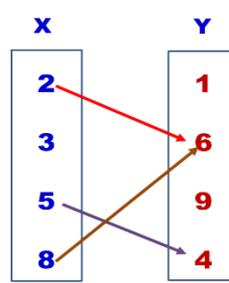
امثلة بين أي العلاقات التالية تمثل دالة مع ذكر السبب واذكر مجال ومدى الدالة في حالة العلاقة دالة



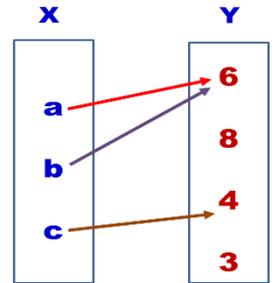
الشكل d



الشكل c

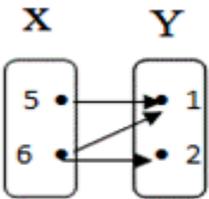


الشكل b

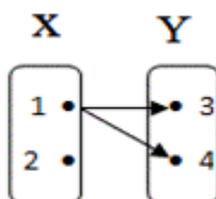


الشكل a

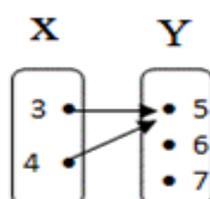
- (1) إذا كان  $a - b = \dots$  فان  $(a - 2, 3) = (2, b)$  (أ) 3 (ب) 2 (ج) 1 (د) zero
- (2) إذا كانت  $n(Y^2) = \dots$  فان  $n(X \times Y) = 6, n(X) = 2$  (أ) 9 (ب) 3 (ج) 2 (د) 4
- (3) إذا كانت  $x = \dots$  فان  $(3, 5) \in \{3, 6\} \times \{x, 8\}$  (أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8
- (4) إذا كانت  $(4, 3) \in \dots$  فان  $X = \{3, 4\}, Y = \{5, 6, 2\}$  (أ)  $Y^2$  (ب)  $X^2$  (ج)  $Y \times X$  (د)  $X \times Y$
- (5) المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي .....



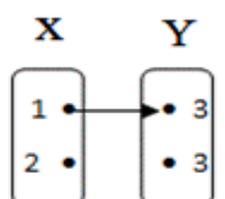
(د)



(ج)

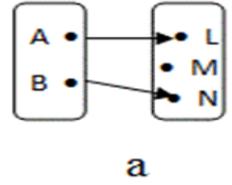
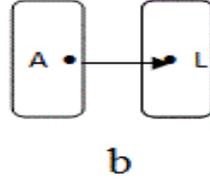
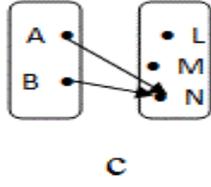
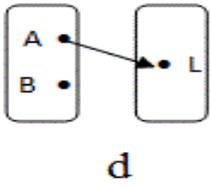


(ب)



(أ)

(6) المخطط الذي لا يمثل دالة فيما يأتي .....



1 (د)

7 (ج)

{(1, 7)} (ب)

(1, 7) (أ)

$$\{1\} \times \{7\} = \dots \dots \dots (7)$$

(8) إذا كانت العلاقة  $R = \{(1, 3), (2, 5), (5, 7), (4, 9)\}$  تمثل دالة فان مداها يساوي

{3,4,6,7} (د)

{2,3,4,5} (ج)

{1,2,4,5} (ب)

{3, 5,7,9} (أ)

(9) إذا كان  $a - b = \dots$  فان  $(a - 3, 4) = (1, b)$

zero (د)

1 (ج)

2 (ب)

3 (أ)

(10) إذا كانت  $n(Y^2) = \dots \dots \dots$  فان  $n(X \times Y) = 6, x = \{3, 7, 9\}$

4 (د)

2 (ج)

3 (ب)

9 (أ)

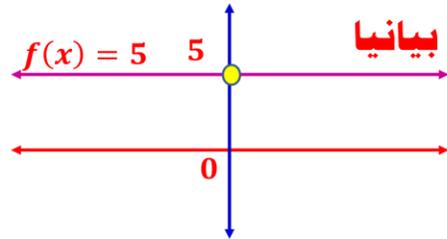
### الدوال كثيرات الحدود

الدالة الثابتة هي دالة لها قيمة ثابتة مهما تغيرت قيمة المتغير  $x$

$$f(x) = 5, \quad f(-5) = 5$$

$$f(\sqrt{5}) = 5, \quad f(2) = 5$$

$$f(-2) = 5, \quad f(-5) = 5$$



الدالة  $F(x) = 5$  يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة  $(0, 5)$  ومداها يساوي  $\{5\}$

$$f(x) = -2$$

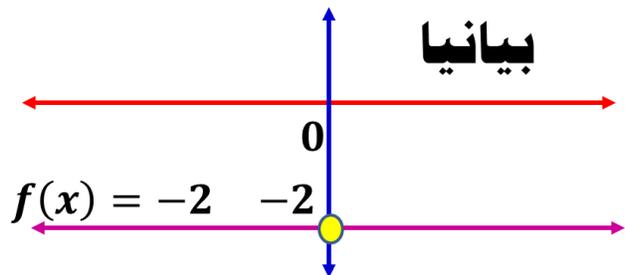
$$f(5) = -2$$

$$f(4) = -2$$

$$f(2) = -2$$

$R =$  مجال الدالة

مدي الدالة  $\{-2\}$



الدالة  $F(x) = -2$  يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة  $(0, -2)$  ومداهما يساوي  $\{-2\}$  الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية

$$f(x) = 4$$

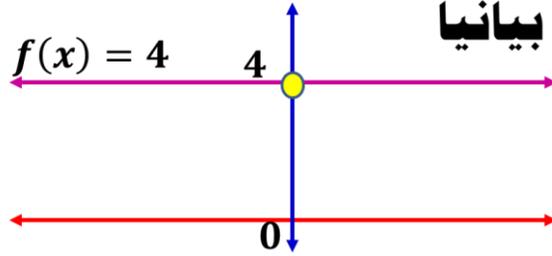
$$f(2) = 4$$

$$f(5) = 4$$

$$f(-7) = 4$$

R = مجال الدالة

مدي الدالة =  $\{4\}$



الدالة  $F(x) = 4$  يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة  $(0, 4)$  ومداهما يساوي  $\{4\}$  الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية

الدالة الخطية: هي دالة من الدرجة الاولى أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو واحد

$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = 3x - 2$$

$$f(x) = 5 - 4x$$

$$f(x) = 5x + 1$$

R = مدي الدالة

R = مجال الدالة

الدالة الخطية من الدرجة الاولى

الدالة التربيعية: هي دالة من الدرجة الثانية أي ان أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 2

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$f(x) = 3x^2 + 5x + 6$$

$$f(x) = 2 + 5x - 2x^2$$

$$f(x) = x^2$$

الدالة التربيعية من الدرجة الثانية

الدالة التكعيبية: هي دالة من الدرجة الثالثة أي أن أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 3

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 4$$

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 11$$

$$f(x) = 2 + 5x^2 - 5x^3$$

$$f(x) = x^3 + 4$$

الدالة التكعيبية من الدرجة الثالثة

### تزايد وتناقص الدالة على فترة

في حالة دراسة تزايد وتناقص الدالة في فترة

اولا: نحدد قيمة اختيارية للمتغير  $x$  في الفترة ولتكن  $x_1$

ثانيا: نوجد قيمة الدالة عند  $x_1$  وهي  $f(x_1)$

ثالثا: نحدد قيمة اختيارية اخرى للمتغير  $x$  في الفترة ولتكن  $x_2 > x_1$  بحيث

رابعا: نوجد قيمة الدالة عند  $x_2$  وهي  $f(x_2)$

إذا كان  $f(x_2) > f(x_1)$  فإن الدالة تزايديه في الفترة

إذا كان  $f(x_2) < f(x_1)$  فإن الدالة تناقصية في الفترة

تمرين ابحت اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{in } [-2, 1]$$

الحل

$$x_1 = -1 \in [-2, 1]$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$x_2 = 0 \in [-2, 1], \quad x_2 > x_1$$

$$f(0) = (0)^2 - 5(0) + 6 = 0 + 0 + 6 = 6$$

$$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

الدالة تناقصية في الفترة

تمرين ابحت اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصية) في الفترة التالية

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \quad \text{in } [1, 4]$$

الحل

$$x_1 = 2 \in [1, 4]$$

$$f(2) = (2)^2 + 3(2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$$

$$x_2 = 3 \in [1, 4], \quad x_2 > x_1$$

$$f(3) = (3)^2 + 3(3) + 2 = 9 + 9 + 2 = 20$$

الدالة تزايديه في الفترة

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

تمرين ابحت اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصيه) في الفترة التاليه

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5 \quad \text{in } [0, 5]$$

الحل

$$x_1 = 1 \in [0, 5]$$

$$f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 5 = 1 + 1 - 5 = -3$$

$$x_2 = 4 \in [0, 5], \quad x_2 > x_1$$

$$f(4) = (4)^3 + (4)^2 - 5 = 64 + 16 - 5 = 75$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

الدالة تزايديه في الفترة

تمرين ابحت اطراد الدالة (تزايديه ام تناقصيه) في الفترة التاليه

$$f(x) = 2 - x^3 \quad \text{in } [-1, 3]$$

الحل

$$x_1 = 0 \in [-1, 3]$$

$$f(0) = 2 - (0)^3 = 2 - 0 = 2$$

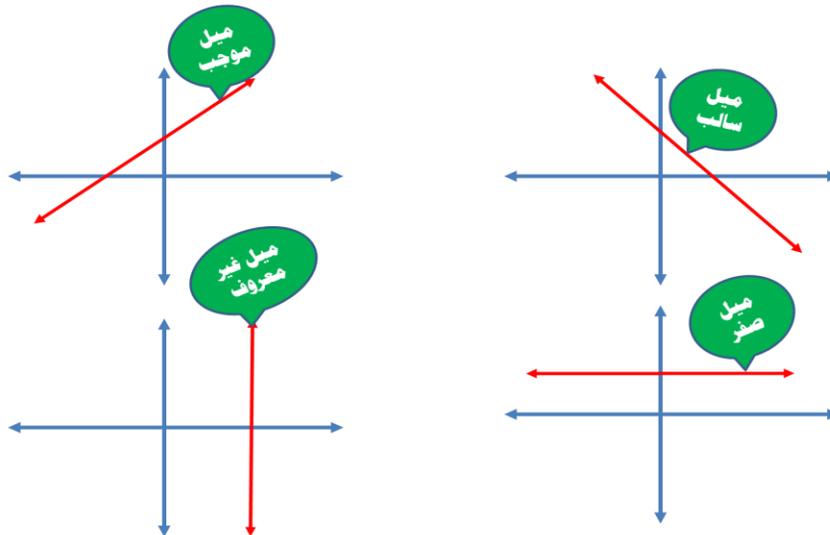
$$x_2 = 1 \in [-1, 3], \quad x_2 > x_1$$

$$f(1) = 2 - (1)^3 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

الدالة تناقصيه في الفترة

### ميل الخط المستقيم

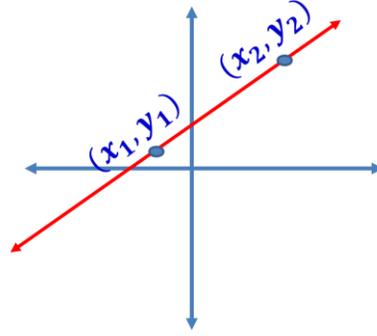


ميل الخط المستقيم

المار بنقطتين

فرق  
الصادات

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



مثال اوجد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين (1, 3) , (2, 5)

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

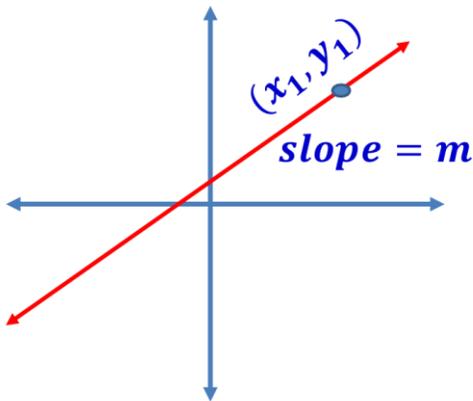
مثال اوجد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين (-2, 1) , (6, 3)

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{6 - (-2)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

### الحالات المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

1- معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله  $m$  ويمر بنقطة معلومة  $(x_1, y_1)$



$$(y - y_1) = m \cdot (x - x_1)$$

مثال 1) اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة  $(2, -1)$  وميله  $3 =$

الحل

$$(y - y_1) = m. (x - x_1)$$

$$(y - (-1)) = 3. (x - 2)$$

$$y + 1 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 6 - 1$$

$$y = 3x - 7$$

مثال 2) اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة  $(-3, 5)$  وميله  $-1 =$

الحل

$$(y - y_1) = m. (x - x_1)$$

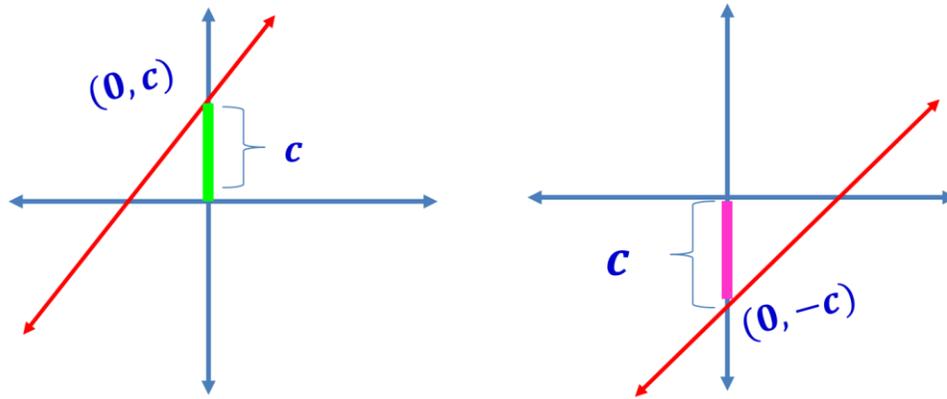
$$(y - 5) = -1. (x + 3)$$

$$y - 5 = -x - 3$$

$$y = -x - 3 + 5$$

$$y = -x + 2$$

2- ) معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله  $m$  وطول الجزء المقطوع من محور الصادات  $c$



$$y = m x + c$$

مثال 1) اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 وطول الجزء المقطوع من محور الصادات الموجب جزءا طوله 4 وحدات

الحل

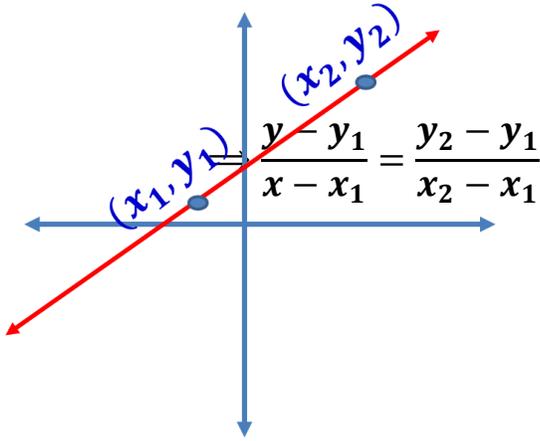
$$m = 2, c = 4, y = mx + c, y = 2x + 4$$

مثال 2) اوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله  $\frac{1}{3}$  وطول الجزء المقطوع من محور الصادات السالب جزءا طوله 7 وحدات

الحل

$$m = \frac{1}{3}, c = -7, y = mx + c, y = \frac{1}{3}x - 7$$

3-) معادلة الخط المستقيم يمر بنقطتين معلومتين  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$



مثال اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين  $(1, 3)$  و  $(5, 8)$

الحل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{8 - 3}{5 - 1} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4y - 12 = 5x - 5 \Rightarrow 4y = 5x - 5 + 12 \Rightarrow 4y = 5x + 7$$

مثال اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين  $(4, 5)$  و  $(-1, 6)$

الحل

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 4} = \frac{6 - 5}{-1 - 4} \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 4} = \frac{1}{-5}$$

$$\Rightarrow -5y + 25 = x - 4 \Rightarrow -5y = x - 4 - 25 \Rightarrow -5y = x - 29$$

## تطبيقات اقتصادية وتجارية

مثال 1) حدد نقطة توازن السوق بالنسبة للقانوني الطلب والعرض التاليين:

$$\text{قانون الطلب : } y = 25 - 2x \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{قانون العرض : } y = 3x + 5 \quad \dots \quad (2)$$

الحل

$$\text{الطلب} = \text{العرض}$$

عدد نقطة توازن السوق:

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

$$3x + 2x = 25 - 5$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

$$: y = 25 - 2(4)$$

بالتعويض في معادلة

$$y = 25 - 8$$

$$y = 17$$

$$(4, 17)$$

نقطة توازن السوق هي

## تمارين متنوعة

$$(1) \text{ إذا كانت } f(x) = 2 \text{ فان } 5 \times f(3) = \dots$$

أ) 3      ب) 10      ج) 15      د) 5

$$(2) \text{ الدالة } f(x) = 2x^3 + 5x^5 + 4x - 11 \text{ من الدرجة}$$

أ) الأولى      ب) الثانية      ج) الثالثة      د) الخامسة

(3) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويقطع جزءا من محور الصادات السالب طوله 5 وحدات هي

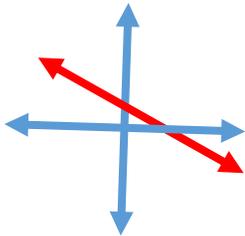
$$\text{أ) } y = -2x + 5 \quad \text{ب) } y = 2x - 5 \quad \text{ج) } y = 5x - 2$$

$$\text{د) } y = 2x + 2$$

(4) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل

أ) موجب      ب) غير معروف      ج) سالب      د) صفر

(5) ميل المستقيم المار بالنقطتين (1, 3) ، (4, 6) يساوي .....



1 (أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د)

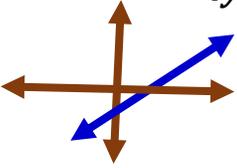
6) الدالة  $f(x) = 7$  يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

(7,0) (أ) (0,7) (ب) (7,7) (ج) (0,0) (د)

7) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويمر بالنقطة (1, 2) هي

(أ)  $y = 3x + 1$  (ب)  $y = x - 3$  (ج)  $y = 3x - 1$  (د)  $y = x + 3$

8) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل



(أ) موجب (ب) غير معروف (ج) سالب (د) صفر

9) إذا كان  $(3, 5) \in \{3, 7\} \times \{a, 6\}$  فإن  $a = \dots$

(أ) 3 (ب) 7 (ج) 5 (د) 6

10) إذا كان  $X \times Z = Z \times X$  فإن .....

(أ)  $X = Z$  (ب)  $X \neq Z$  (ج)  $X \cap Z = X$  (د)  $X \cap Z = Z$

11) إذا كان  $X = \{2, 3\}$  و  $Y = \{4, 5, 6\}$  فإن  $(6, 3) \in \dots$

(أ)  $X \times Y$  (ب)  $Y \times X$  (ج)  $X^2$  (د)  $Y^2$

12)  $\{1\} \times \{7\} = \dots$

(أ) (1, 7) (ب) (1, 7) (ج) 7 (د) 1

13) إذا كانت العلاقة  $R = \{(1, 3), (2, 5), (5, 7), (4, 9)\}$  تمثل دالة فان مداها يساوي

(أ)  $\{3, 5, 7, 9\}$  (ب)  $\{1, 2, 4, 5\}$  (ج)  $\{2, 3, 4, 5\}$  (د)  $\{3, 4, 6, 7\}$

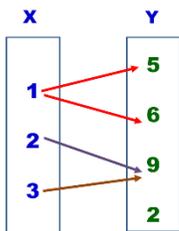
14) إذا كان  $(a - 3, 4) = (1, b)$  فإن  $a - b = \dots$

(أ) 3 (ب) 2 (ج) 1 (د) zero

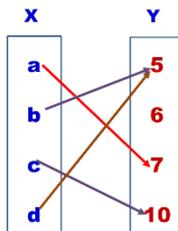
15) إذا كانت  $n(X \times Y) = 6$ ,  $X = \{4, 11\}$  فان  $n(Y^2) = \dots$

(أ) 9 (ب) 3 (ج) 2 (د) 4

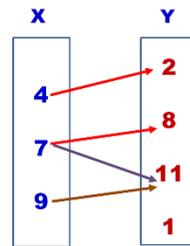
تمرين) بين أي العلاقات التالية تمثل دالة مع ذكر السبب وأذكر مجال ومدى الدالة في حالة العلاقة دالة



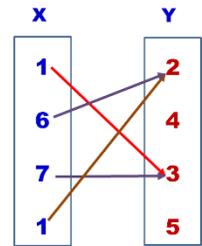
الشكل a



الشكل b



الشكل c



الشكل d

## الرياضيات المالية

### الفائدة

#### الفائدة المركبة

#### الفائدة البسيطة

الفائدة البسيطة: تحسب في نهاية كل سنة من قيمة أصل المبلغ المودع

مثال: اودع شخص في احد البنوك مبلغ 1000 ريال بمعدل فائدة بسيطة 10% من اصل المبلغ

$$I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100 \quad \text{نهاية السنة الاولى: الفائدة البسيطة تساوي}$$

$$I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100 \quad \text{نهاية السنة الثانية: الفائدة البسيطة تساوي}$$

$$I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100 \quad \text{نهاية السنة الثالثة: الفائدة البسيطة تساوي}$$

$$I = 1000 \times \frac{10}{100} \times 3 = 300 \quad \text{مجموع الفوائد في ثلاث سنوات يساوي}$$

$$I = 1000 \times \frac{10}{100} \times 5 = 500 \quad \text{مجموع الفوائد في خمس سنوات يساوي}$$

#### الفائدة المركبة

مثال: اودع شخص في احد البنوك مبلغ 1000 ريال بمعدل فائدة بسيطة 10% من اصل المبلغ

$$I = 1000 \times \frac{10}{100} = 100 \quad \text{نهاية السنة الاولى: فائدة السنة الاولى}$$

$$1100 = 100 + 1000 \quad \text{تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الاولى فيصبح أصل المبلغ}$$

$$I = 1100 \times \frac{10}{100} = 110 \quad \text{نهاية السنة الثانية: فائدة السنة الثانية}$$

$$1210 = 110 + 1100 \quad \text{تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الثانية فيصبح أصل المبلغ}$$

$$I = 1210 \times \frac{10}{100} = 121 \quad \text{نهاية السنة الثالثة: فائدة السنة الثالثة}$$

$$1331 = 121 + 1210 \quad \text{تضاف قيمة الفائدة في نهاية السنة الثالثة فيصبح أصل المبلغ}$$

هنا تسمى الفائدة - الفائدة المركبة

$$I = P \times R \times T$$

↑      ↑      ↑      ↑  
**المدة بالسنوات**    **معدل الفائدة**    **أصل المبلغ**    **الفائدة**

<b>P</b>	<b>Principal</b>	<b>R</b>	<b>Rate</b>
<b>T</b>	<b>Time</b>	<b>I</b>	<b>Simple Interest</b>

جملة المبلغ = أصل المبلغ + الفائدة البسيطة

$$S = P + I \quad S: \text{Sum}$$

$$S = P + (P \times R \times T)$$

$$S = P \cdot (1 + R \cdot T)$$

مثال (1) اودع شخص مبلغ 10000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة 10 % سنويا لمدة خمس سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحل

$$P = 10000, \quad R = 0.10, \quad T = 5$$

$$I = P \times R \times T = 10000 \times 0.10 \times 5 = 5000$$

$$S = P + I = 10000 + 5000 = 15000$$

مثال (2) اقترضت علا مبلغ 30000 ريال من احد البنوك بمعدل فائدة 12 % سنويا لمدة عشر سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ

الحل

$$P = 30000, \quad R = 0.12, \quad T = 10$$

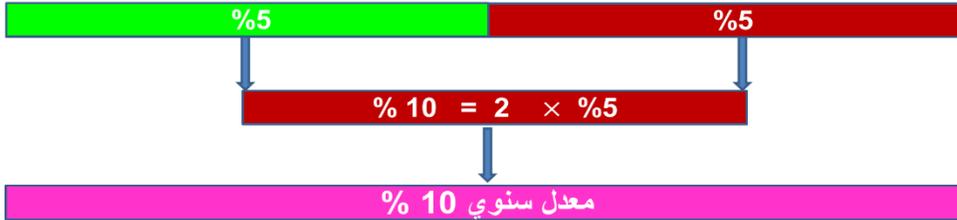
$$I = P \times R \times T = 30000 \times 0.12 \times 10 = 36000$$

$$S = P + I = 30000 + 36000 = 66000$$

ملحوظة هامة: إذا لم يعطي معدل الفائدة معدل سنوي فيجب تحويله الي معدل سنوي لحساب قيمة الفائدة البسيطة سنويا

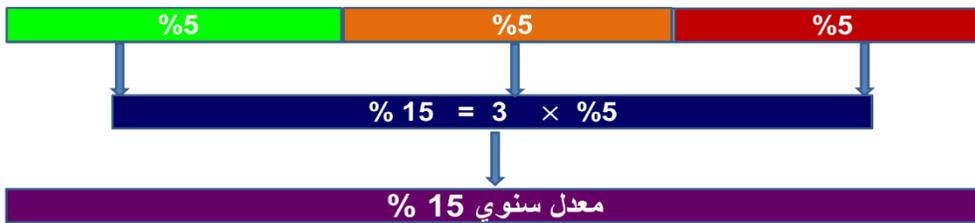
معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل نصف سنوي	المعدل النصف سنوي $\times 2$	المعدل السنوي

إذا كان معدل الفائدة البسيطة 5% معدل نصف سنوي فان المعدل السنوي -



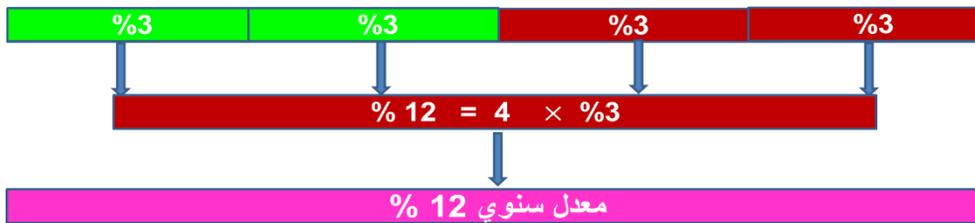
معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل ثلث سنوي كل أربعة شهور	المعدل الثلث سنوي $\times 3$	المعدل السنوي

إذا كان معدل الفائدة البسيطة 5% معدل ثلث سنوي فان المعدل السنوي -



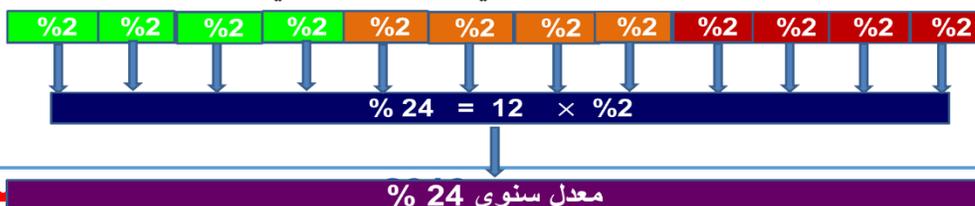
معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل ربع سنوي كل 3 شهور	المعدل الربع سنوي $\times 4$	المعدل السنوي

إذا كان معدل الفائدة البسيطة 3% معدل ربع سنوي فان المعدل السنوي - .....



معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل شهري	المعدل الشهري $\times 12$	المعدل السنوي

إذا كان معدل الفائدة البسيطة 2% معدل شهري فان المعدل السنوي - .....



مثال3) افترضت احلام مبلغ 4000 ريال من احد البنوك بمعدل فائدة % 4 نصف سنوي لمدة 6 سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحل

$$P = 4000, \quad R = 0.04 \times 2 = 0.08, \quad T = 6$$

$$I = P \times R \times T = 4000 \times 0.08 \times 6 = 1920$$

$$S = P + I = 4000 + 1920 = 5920$$

مثال4) اودعت سهام مبلغ 8000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة % 3 ربع سنوي لمدة 4 سنوات . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ

الحل

$$P = 8000, \quad R = 0.03 \times 4 = 0.12, \quad T = 4$$

$$I = P \times R \times T = 8000 \times 0.12 \times 4 = 3840$$

$$S = P + I = 8000 + 3840 = 11840$$

ملحوظة هامة: اذا كانت المدة بالشهور فيجب تحويل هذه المدة الي سنوات وذلك بقسمة المدة بالشهور  $\div 12$

مثال: اذا كانت مدة الاستثمار هي 15 شهر فان المدة بالسنوات هي  $T = \frac{15}{12}$

اذا كانت مدة الاستثمار هي 18 شهر فان المدة بالسنوات هي  $T = \frac{18}{12}$

اذا كانت مدة الاستثمار هي 30 شهر فان المدة بالسنوات هي  $T = \frac{30}{12}$

مثال5) اودعت سهام مبلغ 2000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة % 7 سنوي لمدة 9 شهور . اوجد الفائدة البسيطة المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحل

$$P = 2000, \quad R = 0.07, \quad T = \frac{9}{12}$$

$$I = P \times R \times T = 2000 \times 0.07 \times \frac{9}{12} = 105$$

$$S = P + I = 2000 + 105 = 2105$$

### السنة التجارية

عدد الأيام	الشهر
30	يناير
30	فبراير
30	مارس
30	أبريل
30	مايو
30	يونيه
30	يوليو
30	أغسطس
30	سبتمبر
30	أكتوبر
30	نوفمبر
30	ديسمبر
360	أيام السنة

### السنة الكبيسة

عدد الأيام	الشهر
31	يناير
29	فبراير
31	مارس
30	أبريل
31	مايو
30	يونيه
31	يوليو
31	أغسطس
30	سبتمبر
31	أكتوبر
30	نوفمبر
31	ديسمبر
366	أيام السنة

### السنة البسيطة

عدد الأيام	الشهر
31	يناير
28	فبراير
31	مارس
30	أبريل
31	مايو
30	يونيه
31	يوليو
31	أغسطس
30	سبتمبر
31	أكتوبر
30	نوفمبر
31	ديسمبر
365	أيام السنة

### الفائدة البسيطة في حالة المدة بالأيام

#### الفائدة التجارية

$$I = P \times R \times \frac{d}{360}$$

#### الفائدة الصحيحة

$$I = P \times R \times \frac{d}{365}$$

(1: إذا لم يذكر نوع الفائدة تحتسب فائدة تجارية

(2: إذا لم يذكر تاريخ السنة تحتسب سنة بسيطة

مثال 6 ) اودعت مي مبلغ 3000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة % 6 سنوي لمدة 120 يوم . اوجد الفائدة الصحيحة والفائدة التجارية المستحقة في نهاية المدة وجملة المبلغ؟

الحل

أولاً: الفائدة الصحيحة:

$$P = 3000, \quad R = 0.06, \quad T = \frac{120}{365}$$

$$I = P \times R \times T = 3000 \times 0.06 \times \frac{120}{365} = 59.1$$

$$S = P + I = 3000 + 59.1 = 3059.1$$

ثانياً: الفائدة التجارية:

$$P = 3000, \quad R = 0.06, \quad T = \frac{120}{360}$$

$$I = P \times R \times T = 3000 \times 0.06 \times \frac{120}{360} = 60$$

$$S = P + I = 3000 + 60 = 3060$$

### الفائدة المركبة

$$\text{جملة المبلغ} \leftarrow S = P \cdot \left(1 + \frac{R}{n}\right)^{n \times T}$$

$$\text{الفائدة المركبة} \leftarrow I = S - P,$$

$$n \rightarrow \text{عدد مرات اخذ الفائدة في السنة}$$

### ملاحظات علي حساب الفائدة المركبة

(1) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب سنويا فإنها تعطي مرة واحدة خلال السنة  $n = 1$

فإذا كانت الفائدة سنويا والمدة 5 سنوات فإن عدد الفترات  $n \cdot t = 1 \times 5 = 5$

(2) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب نصف سنوي فإنها تعطي مرتين خلال السنة  $n = 2$

فيجب تقسيم كل سنة الي فترتين وذلك بضرب المدة بالسنوات في 2

(3) إذا كانت الفائدة المركبة تحسب ربع سنوي فتعطي أربع مرات خلال السنة  $n = 4$

فيجب تقسيم كل سنة الي أربع فترات ن وذلك بضرب المدة بالسنوات في 4



- 1) الفائدة المركبة لمبلغ 1000 ريال تم إيداعه في أحد البنوك بفائدة مركبة 6% سنويا لمدة 3 سنوات يساوي.....
- 2) افترض شخص لمبلغ 6000 ريال من أحد البنوك بفائدة مركبة 8% ربع سنوي لمدة 5 سنوات فان الفائدة.....
- 3) أودع باسم مبلغ 4000 ريال في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% نصف سنوي لمدة 6 سنوات فان الفائدة.....
- 4) جملة مبلغ 9000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% ثلث سنوي لمدة 8 سنوات هو.....

## الماضرة الرابعة: التفاضل وتطبيقاته

### الدوال كثيرات الحدود

الدالة الثابتة هي دالة لها قيمة ثابتة مهما تغيرت قيمة المتغير  $x$

$$f(x) = 5 \Rightarrow f(2) = 5 \Rightarrow f(-5) = 5 \Rightarrow f(-2) = 5 \Rightarrow f(9) = 5$$

$$f(x) = -2$$

$$f(x) = 4$$

$$f(5) = -2$$

$$f(2) = 4$$

$$f(4) = -2$$

$$f(5) = 4$$

$$f(2) = -2$$

$$f(-7) = 4$$

$R =$  مجال الدالة

$R =$  مجال الدالة

مدي الدالة =  $\{-2\}$

مدي الدالة =  $\{4\}$

### الدالة الثابتة من الدرجة الصفرية

الدالة الخطية: هي دالة من الدرجة الاولى أي ان أكبر أس للمتغير  $x$  في الدالة هو واحد

$$f(x) = 2x,$$

$$f(x) = 3x - 2$$

$$f(x) = 5 - 4x,$$

$$f(x) = 5x + 1$$

$R =$  مدي الدالة الخطية

$R =$  مجال الدالة الخطية

### الدالة الخطية من الدرجة الاولى

الدالة التربيعية: هي دالة من الدرجة الثانية أي ان أكبر أس للمتغير  $x$  في الدالة هو 2

$$f(x) = x^2 + 2x - 1,$$

$$f(x) = 3x^2 + 5x + 6$$

$$f(x) = 2 + 5x - 2x^2,$$

$$f(x) = x^2$$

الدالة التربيعية من الدرجة الثانية

الدالة التكعيبية: هي دالة من الدرجة الثالثة أي أن أكبر أس للمتغير X في الدالة هو 3

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 4,$$

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 11$$

$$f(x) = 2 + 5x^2 - 5x^3,$$

$$f(x) = x^3 + 4$$

الدالة التكعيبية من الدرجة الثالثة

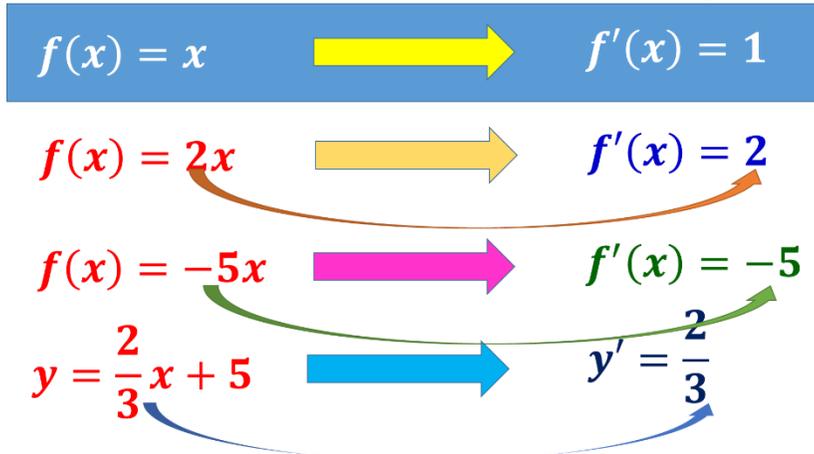
### قواعد الاشتقاق (التفاضل) للدوال كثيرات الحدود

الدالة	المشتقة الاولى للدالة
F(x)	F'(x)
Y(x)	Y'(x)
Y(x)	$\frac{dY}{dx}$

القاعدة الاولى: المشتقة الاولى لأي عدد ثابت يساوي صفر

الدالة	المشتقة الاولى للدالة
F(x)=5	F'(x)= 0
Y(x)= -7	Y'(x)=0
Y(x) = $\sqrt{6}$	$\frac{dY}{dx} = 0$

### القاعدة الثانية



### القاعدة الثالثة

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$f(x) = x^7 \longrightarrow f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$f(x) = x^{-4} \longrightarrow f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = 2x^3 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 3 \times 2x^{3-1} = 6x^2$$

$$y = \frac{3}{5}x^4 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 4 \times \frac{3}{5}x^{4-1} = \frac{12}{5}x^3$$

$$y = \frac{2}{x^6} = 2x^{-6} \longrightarrow y' = -6 \times 2x^{-6-1} = -12x^{-7}$$

1- إذا كان  $y = 2x^3 + 4x + 6$  فأوجد المشتقة الأولى للدالة

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 4$$

2- إذا كان  $y = 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 7x + 11$  فأوجد المشتقة الأولى للدالة؟

الحل

$$y' = 15x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 7$$

3- إذا كان  $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3} + 5x^2$  فأوجد المشتقة الأولى للدالة؟

الحل

$$y = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-3} + 5x^2 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-4} + 10x$$

4- إذا كان  $y = 2x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 8x + 31$  فأوجد المشتقة الأولى للدالة؟

الحل

$$y' = 12x^5 - 20x^4 + 12x^3 - 8$$

القاعدة الرابعة

$$y = f(x)^n \longrightarrow y' = n f(x)^{n-1} \times f'(x)$$

$$1 - y = (2x + 1)^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 3(2x + 1)^2 \times 2 = 6(2x + 1)^2$$

$$2 - y = (5 - 6x)^7 \quad \Rightarrow \quad y' = 7(5 - 6x)^6 \times (-6) = -42(5 - 6x)^6$$

$$\begin{aligned} 3) y = (x^2 + 3x - 5)^4 &\Rightarrow y' = 4(x^2 + 3x - 5)^3 \times (2x + 3) \\ &\Rightarrow y' = 4(2x + 3)(x^2 + 3x - 5)^3 \\ &\Rightarrow y' = (8x + 12)(x^2 + 3x - 5)^3 \end{aligned}$$

القاعدة الخامسة

مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الدالة الأولى  $\times$  الثانية + مشتقة الدالة الثانية  $\times$  الأولى

$$\text{if } y = f(x) \times g(x) \rightarrow y' = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{ex: } y = (2x + 3)(5x - 2) \quad \text{find } y' ? &\rightarrow y' = (2)(5x - 2) + (5)(2x + 3) \\ &\rightarrow y' = 10x - 4 + 10x + 15 = 20x + 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ex2 } y = (x^2 + 3x + 4)(4x - 1) \quad \text{find } y' ? &\rightarrow y' = (2x + 3)(4x - 1) + (4)(x^2 + 3x + 4) \\ &\rightarrow y' = 8x^2 - 2x + 12x - 3 + 4x^2 + 12x + 16 \\ &\rightarrow y' = 12x^2 - 22x + 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ex3 } y = (2x - 5)(2x + 5) \quad \text{find } y' ? &\rightarrow y' = (2)(2x - 5) + (2)(2x + 5) \\ &\rightarrow y' = 4x - 10 + 4x + 10 = 8x \end{aligned}$$

مربع المقام

$$\text{if } y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\text{ex1) } y = \frac{3x - 1}{2x + 5}, \quad \text{find } y' ?$$

$$y' = \frac{(3)(2x + 5) - (2)(3x - 1)}{(2x + 5)^2}$$

$$y' = \frac{6x + 15 - 6x + 2}{(2x + 5)^2} = \frac{17}{(2x + 5)^2}$$

$$\text{ex2) } y = \frac{4x + 3}{x^2 - 5x + 1}, \quad \text{find } y' ?$$

$$y' = \frac{(4)(x^2 - 5x + 1) - (2x - 5)(4x + 3)}{(x^2 - 5x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{4x^2 - 20x + 4 - 8x^2 - 6x + 20x + 15}{(x^2 - 5x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{-4x^2 - 6x + 19}{(x^2 - 5x + 1)^2}$$

مشتقة الدالة الاسية = مشتقة اس الدالة  $\times$  الدالة نفسها

$$\text{If } y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

$$\text{ex1) If } y = e^{2x} \Rightarrow y' = 2 \cdot e^{2x}$$

$$\text{ex2) If } y = e^{2x} \Rightarrow y' = 2 \cdot e^{2x}$$

$$\text{ex3) If } y = e^{5x+3} \Rightarrow y' = 5 \cdot e^{5x+3}$$

$$\text{ex4) If } y = e^{x^2-3x+1} \Rightarrow y' = (2x - 3) \cdot e^{x^2-3x+1}$$

$$\text{If } y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\text{ex1) } y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$\text{ex2) } y = \ln (2x - 1) \Rightarrow y' = \frac{2}{2x - 1}$$

$$\text{ex3) } y = \ln (x^3 + 5x^2 - 1) \Rightarrow y' = \frac{3x^2 + 10x}{x^3 + 5x^2 - 1}$$

$$\text{ex4) } y = \ln (x^2 - 2x + 3) + \ln (6 + 7x - 3x^2)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3} + \frac{7 - 6x}{6 + 7x - 3x^2}$$

المشتقات من الرتب العليا

الدالة	المشتقة الثانية	المشتقة الاولى	المشتقة الثالثة
$f(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f'''(x)$
$y(x)$	$y''(x)$	$y'(x)$	$y'''(x)$
$y(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$

1) if  $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + 12$  find  $y', y'', y'''$

$$y' = x^2 - 8x + 5$$

$$y'' = 2x - 8$$

$$y''' = 2$$

2) if  $y = x^6 + 4x^5 - 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6$ , find  $y', y'', y'''$

$$y' = 6x^5 + 20x^4 - 6x^2 + 10x + 7, \Rightarrow y'' = 30x^4 + 80x^3 - 12x + 10$$

$$y''' = 120x^3 + 240x^2 - 12$$

## تطبيقات التفاضل

أولاً: إيجاد ميل المماس (m)

ميل المماس لمنحني الدالة عند أي نقطة احداثيتها (x, y) يساوي قيمة المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة

مثال 1) اوجد ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  عند النقطة (1, 0) ؟

الحل

أولاً: نوجد المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = 6x - 2$

ثانياً: نعوض بقيمة المتغير x  $f'(1) = 6(1) - 2 = 6 - 2 = 4$

ثالثاً: ميل المماس يساوي المشتقة الأولى  $m = f'(1) = 4$

مثال 2) اوجد ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  عند النقطة (2,3) ؟

الحل

أولاً: نوجد المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

ثانياً: نعوض بقيمة المتغير x  $f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$

ثالثاً: ميل المماس يساوي المشتقة الأولى  $m = f'(2) = -3$

مثال 3) اوجد ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$  عندما  $x=1$  ؟

الحل

أولاً: نوجد المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

ثانياً: نعوض بقيمة المتغير x  $f'(1) = 3(1)^2 - 18(1) + 24 = 3 - 18 + 24 = 9$

ثالثاً: ميل المماس يساوي المشتقة الأولى  $m = f'(1) = 9$

### تمارين

تمرين 1 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^2 - 6x + 1$  عندما  $x = -1$  ؟

تمرين 2 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = 3x^2 - x^3$  عند النقطة (2,4) ؟

تمرين 3 اوجد ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$  عند النقطة (3,-8) ؟

ثانياً: إيجاد النهاية العظمى والصغرى للدالة

الخطوة الأولى: نوجد المشتقة الأولى للدالة

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة الأولى بالصفر وإيجاد قيم  $x$

الخطوة الثالثة: نوجد المشتقة الثانية للدالة

الخطوة الرابعة: نعوض بكل قيمة  $x$  في المشتقة الثانية

الخطوة الخامسة: إذا كانت قيمة المشتقة الثانية سالبة كان للدالة نهاية عظمى وان كانت موجبة فلها قيمة صغرى

مثال 1) اوجد النهاية العظمى او الصغرى للدالة  $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$  ؟

الحل

$f'(x) = 6x - 12$ $6x - 12 = 0$ $6x = 12$ $x = \frac{12}{6} = 2$ $f''(x) = 6$	$f''(2) = 6 > 0$ <p>للدالة قيمة صغرى عند <math>x = 2</math></p> <p>لإيجاد هذه القيمة الصغرى للدالة</p> $f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 1$ $f(2) = 12 - 24 + 1 = -11$
---	---

مثال 2) اوجد النهاية العظمى او الصغرى للدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  ؟

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $3x^2 - 12x + 9 = 0$ $3(x^2 - 4x + 3) = 0$ $3(x - 1)(x - 3) = 0$ $x = 1, \quad x = 3$ $f''(x) = 6x - 12$	$f''(1) = 6(1) - 12 = -6$ $f''(3) = 6(3) - 12 = 6$ <p>للدالة قيمة عظمى عند <math>x = 1</math></p> <p>للدالة قيمة صغرى عند <math>x = 3</math></p> $f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 1 = 5$ $f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 1 = 1$
---	--

تمارين

تمرين 1 اوجد النهاية العظمى او الصغرى للدالة  $f(x) = x^2 - 6x + 1$  ؟

تمرين 2 اوجد النهاية العظمى او الصغرى للدالة  $f(x) = 3x^2 - x^3$  ؟

تمرين 3 اوجد النهاية العظمى او الصغرى للدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$  ؟

## بعض التطبيقات الاقتصادية على التفاضل

التكاليف الثابتة *Fixed Costs* : هي التكاليف التي لا تتغير بتغير الإنتاج.

التكاليف المتغيرة *Variable Costs* : وهي التكاليف التي تتغير بتغير الإنتاج.

التكاليف الكلية *Total Costs* : وتتكون من جميع التكاليف الثابتة الكلية والتكاليف المتغيرة الكلية للإنتاج معاً

التكاليف الحدية *Marginal Costs* : وهي التكلفة المضافة من أجل إنتاج وحدة واحدة زيادة في الناتج. ويمكن الحصول على التكلفة الحدية عن طريق تفاضل التكلفة الكلية

دالة الإيراد الكلي *Total Revenue* : وهو الإيراد أو العائد من بيع وحدات المنتج

دالة الإيراد = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الحدة

الإيراد الحدي *Marginal Revenue* : وهي الإيراد أو العائد من بيع وحدة إنتاج إضافية. ويمكن الحصول على الإيراد الحدي عن طريق تفاضل دالة الإيراد الكلي

دالة الربح الكلي *Total Profit* : دالة الربح = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

الربح الحدي *Marginal Profit* : ويمكن الحصول على الربح الحدي عن طريق تفاضل دالة الربح الكلي



## أولاً: إيجاد دالة التكاليف الحدية

دالة التكاليف الحدية: هي المشتقة الأولى لدالة التكاليف

مثال: إذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة حيث  $x$  عدد الوحدات المنتجة

$$C(x) = x^3 + 3x^2 - 50x + 300$$

فأوجد دالة التكاليف الحدية ثم أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج 10 وحدات

الحل

الخطوة الأولى نوجد دالة التكاليف الحدية بإيجاد المشتقة الأولى لدالة التكاليف  $C'(x) = 3x^2 + 6x - 50$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة التكاليف الحدية التعويض بقيمة  $x$  (عدد الوحدات)

$$C'(10) = 3(10)^2 + 6(10) - 50 = 300 + 60 - 50 = 310$$

مثال: إذا كانت دالة الإيراد تعطي بالعلاقة (حيث  $x$  عدد الوحدات المنتجة)

$$R(x) = 5 + 10x - 2x^2 + x^3$$

فأوجد دالة الإيراد الحدي ثم اوجد الإيراد الحدي عند إنتاج 50 وحدات؟

الحل

الخطوة الأولى نوجد الإيراد الحدي بإيجاد المشتقة الأولى لدالة الإيراد  $R'(x) = 10 - 4x + 3x^2$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الإيراد الحدي التعويض بقيمة  $x$  (عدد الوحدات)

$$R'(50) = 10 - 4(50) + 3(50)^2 = 10 - 200 + 7500 = 7310$$

ثانياً: إيجاد دالة الربح الحدي

دالة الربح الحدي: هي المشتقة الأولى لدالة الربح

مثال: إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث  $x$  عدد الوحدات المنتجة)  $P(x) = 3x^2 + 100x - 30$

فأوجد دالة الربح الحدي ثم اوجد الإيراد الحدي عند إنتاج 40 وحدات؟

الحل

الخطوة الأولى نوجد الربح الحدي بإيجاد المشتقة الأولى لدالة الربح  $P'(x) = 6x + 100$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الربح الحدي التعويض بقيمة  $x$  (عدد الوحدات)

$$P'(40) = 6(40) + 100 = 240 + 100 = 340$$

مثال: إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث  $x$  عدد الوحدات المنتجة)  $P(x) = 10x^2 - 300x - 500$

فأوجد دالة الربح الحدي ثم اوجد الإيراد الحدي عند إنتاج 80 وحدة؟

الحل

الخطوة الأولى نوجد الربح الحدي بإيجاد المشتقة الأولى لدالة الربح  $P'(x) = 20x - 300$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة الربح الحدي التعويض بقيمة  $x$  (عدد الوحدات)

$$P'(80) = 20(80) - 300 = 1600 - 300 = 1300$$

القيمة العظمى او الصغرى لدالة الإيراد او لدالة الربح

لإيجاد القيمة العظمى او الصغرى لدالة الإيراد او لدالة الربح:

(1) نوجد المشتقة الأولى لدالة الإيراد او دالة الربح (الإيراد الحدي او الربح الحدي)

(2) نساوي المشتقة الاولى بالصفر ونوجد قيمة المتغير  $x$

(3) نوجد المشتقة الثانية ثم نعوض بقيمة  $x$  في المشتقة الثانية

(4) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة تكون للدالة نهاية صغرى -سالبة تكون للدالة نهاية عظمى

(5) إذا نعوض في الدالة نفسها لإيجاد القيمة إذا كانت عظمى او صغرى

مثال: إذا كانت دالة الإيراد تعطي بالعلاقة (حيث  $x$  عدد الوحدات المنتجة)  $R(x) = x^2 - 6x + 20$

فأوجد القيمة العظمى او الصغرى للإيراد؟ الحل

الخطوة الاولى نوجد المشتقة الاولى لدالة الإيراد

$$R'(x) = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$R''(x) = 2 \Rightarrow R''(3) = 2 \quad \text{قيمة المشتقة الثانية موجبة}$$

دالة الإيراد لها قيمة صغرى عند  $x = 3$  نوجد القيمة الصغرى بالتعويض في الدالة

$$R(3) = (3)^2 - 6(3) + 20 = 9 - 18 + 20 = 11$$

مثال: إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة (حيث  $x$  عدد الوحدات المنتجة)  $R(x) = 5 + 8x - 2x^2$

فأوجد القيمة العظمى او الصغرى للإيراد؟ الحل

الخطوة الاولى نوجد المشتقة الاولى لدالة الإيراد

$$R'(x) = 8 - 4x, \Rightarrow 8 - 4x = 0, \Rightarrow 8 = 4x$$

$$R''(x) = -4, \Rightarrow R''(2) = -4 \quad \text{قيمة المشتقة الثانية سالبة}$$

دالة الربح لها قيمة عظمى عند  $x = 2$  نوجد القيمة الصغرى بالتعويض في الدالة

$$R(2) = 5 + 8(2) - 2(2)^2 = 5 + 16 - 8 = 13$$

### مرونة الطلب

يستخدم الاقتصاديون المرونة لدراسة مدى تأثير تغير السعر  $p$  على الكمية المطلوبة  $q$  وتعرف على أنها معدل التغير النسبي في الكمية المطلوبة على معدل التغير النسبي في السعر.

ونعرفها رياضياً كما يلي: -

إذا كانت الكمية المطلوبة من الوحدات هي  $(q)$  ، وسعر الوحدة هو  $(p)$  ، فإن مرونة الطلب  $E_p$  تعطى بالعلاقة الآتية:

$$E_p = \frac{p \cdot q'}{q}$$

ويقال أن الطلب مرن إذا كان (القيمة المطلقة للمرونة)  $|E_p| > 1$

ويقال إن الطلب غير مرن إذا كان (القيمة المطلقة للمرونة)  $|E_p| < 1$

مثال إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة ( $q$ ) من منتج ما والسعر ( $p$ ) تعطى بالمعادلة الآتية:  $q = 500 - 3p^2$   
فأوجد: (1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عندما  $p=5$  ,  $p = 10$

الحل

$$q = 500 - 3p^2 \Rightarrow q' = -6p \Rightarrow E_p = \frac{p \cdot q'}{q} = \frac{p \cdot (-6p)}{500 - 3p^2} = \frac{-6p^2}{500 - 3p^2}$$

(1)- إيجاد المرونة عند  $p=5$

$$E_p = \frac{-6(5)^2}{500 - 3(5)^2} = \frac{-150}{425} = -0.353$$

$$|E_p| = 0.353 < 1 \Rightarrow \text{الطلب غير مرن}$$

(2)- إيجاد المرونة عند  $p=10$

$$E_p = \frac{-6(10)^2}{500 - 3(10)^2} = \frac{-600}{200} = -3$$

$$|E_p| = 3 > 1 \Rightarrow \text{الطلب مرن}$$

مثال (2) إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة ( $q$ ) من منتج ما والسعر ( $p$ ) تعطى بالمعادلة الآتية:  $q = 4000 - 100p$   
فأوجد: (1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عند  $p=15$  ,  $p = 25$  ?

الحل

$$q = 4000 - 100p \Rightarrow q' = -100 \Rightarrow E_p = \frac{p \cdot q'}{q} \Rightarrow E_p = \frac{p \cdot (-100)}{4000 - 100p}$$

$$E_p = \frac{-100p}{4000 - 100p}$$

(1)- إيجاد المرونة عند  $p=15$

$$E_p = \frac{-100(15)}{4000 - 100(15)} = \frac{-1500}{2500} = -0.6$$

$$|E_p| = 0.6 < 1 \Rightarrow \text{الطلب غير مرن}$$

(2)- إيجاد المرونة عند  $p=25$

$$E_p = \frac{-100(25)}{4000 - 100(25)} = \frac{-2500}{1500} = -1.67$$

$$|E_p| = 1.67 > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{الطلب مرن}$$

تمرين: إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p) تعطى بالمعادلة الآتية:

$$q = 200 - 7 p^2$$

فأوجد: (1)- دالة مرونة الطلب. (2)- بين هل الطلب مرن أم غير مرن عندما  $p = 5$  ,  $p = 10$



جامعة الدمام  
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع  
الرياضيات للإدارة

**MATH 120**

دكتور محمد تركي

أستاذ الرياضيات والاحصاء المساعد

الايمل الجامعي

[mstorky@uod.edu.sa](mailto:mstorky@uod.edu.sa)

## التكامل وتطبيقاته

التكامل: التكامل هو العملية العكسية للتفاضل

إذا كانت تتم عملية التفاضل لأي حد من دوال كثيرات الحدود بان نضرب اس المتغير في معاملته ثم نطرح من هذا الاس 1 فإن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل فيتم تكامل أي حد من دوال كثيرات الحدود بان نزود اس المتغير بمقدار واحد ثم

### وينقسم التكامل الي

التكامل المحدود

التكامل الغير محدود

نقسم معامل الحد على قيمة الاس الجديد

القاعدة الاولى

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

تكامل أي حد من دوال كثيرات الحدود نزود اس المتغير بمقدار واحد ثم نقسم معامل الحد على قيمة الاس الجديد + مقدار ثابت

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int x^9 dx = \frac{x^{10}}{10} + c$$

C

مقدار  
ثابت

$$1) \int x^2 + 3x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$$

$$2) \int 2x^4 + x^3 dx = \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + c$$

$$3) \int 5x^6 + 7x^8 dx = \frac{5x^7}{7} + \frac{7x^9}{9} + c$$

$$4) \int x^{-2} + 6x dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{6x^2}{2} + c$$

$$5) \int 5x^{-5} + 3x^{-3} dx = \frac{5x^{-4}}{-4} + \frac{3x^{-2}}{-2} + c$$

$$6) \int 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-9} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{4x^{-8}}{-8} + c$$

$$= \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^{-8}}{2} + c$$

القاعدة الثانية: تكامل أي عدد ثابت يساوي هذ العدد مضروب في x

$$\int a dx = a x + c,$$

$$1) \int 6 dx = 6 x + c$$

$$2) \int 3 dx = 3 x + c,$$

$$3) \int \frac{3}{5} dx = \frac{3}{5} x + c$$

$$4) \int -7 dx = -7 x + c,$$

$$5) \int \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x + c$$

$$6) \int 4 dx = 4 x + c,$$

$$7) \int 11 dx = 11x + c$$

القاعدة الثالثة: تكامل المقدار  $(ax+b)^n$  هو نفس المقدار بزيادة الاس بمقدار واحد مقسوما على الاس الجديد ومقسوما على معامل المتغير x

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n + 1) \times a} + c$$

$$1) \int (2x + 3)^4 dx = \frac{(2x + 3)^5}{5 \times 2} + c$$

$$2) \int (5x - 11)^6 dx = \frac{(5x - 11)^7}{7 \times 5} + c$$

$$3) \int (8 - 6x)^{10} dx = \frac{(8 - 6x)^{11}}{11 \times -6} + c$$

$$4) \int \sqrt{3x - 4} dx = \int (3x - 4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(3x - 4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 3} + c = \frac{2}{9} (3x - 4)^{\frac{3}{2}} + c$$

القاعدة الرابعة: إذا كانت الدالة مضروبة في تفاضلها فان تكاملها هو زيادة الاس بمقدار واحد ونقسم على الاس الجديد

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n + 1} + c$$

$$1) \int (x^3 + 2x + 6)^5 \cdot (3x^2 + 2) dx = \frac{(x^3 + 2x + 6)^6}{6} + c$$

$$2) \int (x^2 + 2x + 10)^{11} \cdot (2x + 2) dx = \frac{(x^2 + 2x + 10)^{12}}{12} + c$$

$$3) \int \sqrt{x^2 + 3x + 2} \cdot (2x + 3) dx = \int (x^2 + 3x + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x + 3) dx = \frac{2(x^2 + 3x + 2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

القاعدة الخامسة:

إذا كانت البسط تفاضل المقام فان التكامل في هذه الحالة يساوي اللوغاريتم الطبيعي للمقام

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln [f(x)] + c \quad 1) \int \frac{1}{x} dx = \ln [x] + c$$

$$2) \int \frac{4x + 3}{2x^2 + 3x - 11} dx = \ln [2x^2 + 3x - 11] + c$$

$$3) \int \frac{8x - 2}{4x^2 - 2x - 11} dx = \ln [4x^2 - 2x - 11] + c$$

$$4) \int \frac{5x^4 + 6x^2}{x^5 + 2x^3 - 4} dx = \ln [x^5 + 2x^3 - 4] + c$$

القاعدة السادسة:

تفاضل الدالة الاسية لأساس اللوغاريتم الطبيعي = الدالة نفسها على تفاضل الاس

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

$$1) \int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + c,$$

$$2) \int e^{3x-2} dx = \frac{e^{3x-2}}{3} + c$$

$$3) \int e^{5-6x} dx = \frac{e^{5-6x}}{-6} + c,$$

$$4) \int e^{11-\sqrt{7}x} dx = \frac{e^{11-\sqrt{7}x}}{-\sqrt{7}} + c$$

$$5) \int e^{8x-1} dx = \frac{e^{8x-1}}{8} + c,$$

$$6) \int \frac{1}{e^{2x-5}} dx = \int e^{-2x+5} dx = \frac{e^{-2x+5}}{-2} + c$$

ملاحظة:

إذا كان المتغير موجود في المقام فيجب رفعه الى البسط بتغير إشارة الاس قبل عملية التكامل

$$\int \frac{a}{x^n} dx = \int a x^{-n} dx = \frac{a x^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$$1) \int \frac{3}{x^5} dx = \int 3x^{-5} dx = \frac{3x^{-4}}{-4} + c \quad 2) \int \frac{-5}{x^6} dx = \int -5x^{-6} dx = \frac{-5x^{-5}}{-5} + c$$

### التكامل المحدود

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

الحد العلوي  $b$       الحد السفلي  $a$

$$1) \int_1^3 (2x + 5) dx = \left. \frac{2x^2}{2} + 5x \right|_1^3 = x^2 + 5x \Big|_1^3$$

الحد العلوي  $3$       الحد السفلي  $1$

$$= [(3)^2 + 5(3)] - [(1)^2 + 5(1)] = [24] - [6] = 18$$

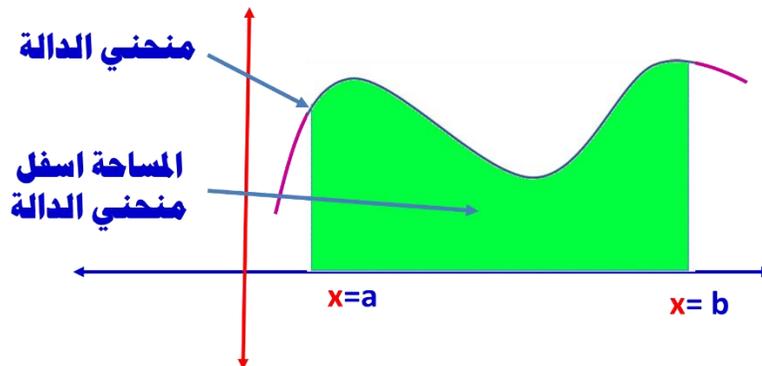
$$2) \int_0^2 (x^2 + 3x + 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x \right|_0^2 = \left[ \frac{2^3}{3} + \frac{3(2)^2}{2} + 2 \right] - \left[ \frac{0^3}{3} + \frac{3(0)^2}{2} + 0 \right]$$

$$= \left[ \frac{8}{3} + \frac{12}{2} + 2 \right] - [0] = \frac{32}{3}$$

### تطبيقات على التكامل

أولاً: إيجاد المساحة أسفل منحنى الدالة

المساحة تحت منحنى الدالة  $f(x)$  ومحور السينات والمحصورة بين المستقيمين  $x = a$  و  $x = b$



$$Area = \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b$$

مثال (1) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية  $y = 4x^3$  وبين  $x=2$ ،  $x=3$  ؟

الحل

$$Area = \int_2^3 y dx = \int_2^3 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} \Big|_2^3 = x^4 \Big|_2^3 = (3)^4 - (2)^4 = 81 - 16 = 65$$

مثال (2) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية:  $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$  وبين المستقيمين  $x=1$ ،  $x=4$

الحل

$$\begin{aligned} Area &= \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 3x^2 + 2x + 5 dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 5x \Big|_1^4 \\ &= x^3 + x^2 + 5x \Big|_1^4 = [(4)^3 + (4)^2 + 5(4)] - [(1)^3 + (1)^2 + 5(1)] \\ &= [64 + 16 + 20] - [1 + 1 + 5] = 100 - 7 = 93 \end{aligned}$$

تمارين

- (1) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية:  $f(x) = x^4 + 3x^2 + 6$  وبين  $x=0$ ،  $x=3$  ؟
- (2) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية:  $f(x) = x^3 - 6x + 8$  وبين  $x=2$ ،  $x=3$  ؟
- (3) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية:  $f(x) = x^2 - 7x + 11$  وبين  $x=0$ ،  $x=2$  ؟

ثانياً: تطبيقات تجارية



مثال (1) إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة  $C'(x) = 30x^2 + 54x - 30$

علمنا بان التكاليف الثابتة هي 200؟

الحل

$$C(x) = \int C'(x) dx = \int 30x^2 + 54x - 30 dx = \frac{30x^3}{3} + \frac{54x^2}{2} - 30x + c$$

$$C(x) = 10x^3 + 27x^2 - 30x + c$$

وحيث ان التكاليف الثابتة تساوي 200 فان  $c = 200$

$$C(x) = 10x^3 + 27x^2 - 30x + 200$$

مثال (2) إذا كانت دالة الإيراد الحدي لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة  $R'(x) = 60x^3 + 18x^2 + 36$

علما بان الإيراد يساوي صفر في حالة عدم بيع أي وحدة. فأوجد دالة الإيراد الكلي؟

الحل

$$R(x) = \int R'(x) dx = \int 60x^3 + 18x^2 + 36 dx$$

$$R(x) = \frac{60x^4}{4} + \frac{18x^3}{3} + 36x + c = 15x^4 + 6x^3 + 36x + c$$

وحيث ان الإيراد يساوي صفر في عدم بيع أي وحدة  $c = 0$

$$R(x) = 15x^4 + 6x^3 + 36x$$

مثال (3) إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة  $p'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 24x^3$

علما بان الربح يساوي صفر في حالة عدم بيع أي وحدة. فأوجد دالة الربح الكلي؟

الحل

$$P(x) = \int P'(x) dx = \int 12x^5 + 15x^4 + 24x^3 dx$$

$$P(x) = \frac{12x^6}{6} + \frac{15x^5}{5} + \frac{24x^4}{4} + c = 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + c$$

وحيث ان الربح يساوي صفر في عدم بيع أي وحدة  $c = 0$

$$P(x) = 2x^6 + 3x^5 + 6x^4$$

المراجعة العامة الأولى: (تم حل تمارين المراجعة الأولى في الحادية عشر - تحت عنوان تمارين متنوعة)

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

(1) النقطة التي احداثياتها (2, -3) تقع في الربع .....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(2) النقطة (-1, -5) تقع في الربع .....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(3) النقطة (0, 2) تقع .....

(أ) في الربع الأول (ب) علي محور السينات (ج) في الربع الثالث (د) علي محور الصادات

(4) إذا كان  $(a, b) = (3, 1)$  فإن  $a + b = \dots$

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(5) إذا كان  $X \times Y = \{(2, 6), (2, a), (5, 6), (5, a), (8, 6), (8, a)\}$  فإن  $X = \dots$

(أ)  $\{2, 5, 8\}$  (ب)  $\{2, 3\}$  (ج)  $\{6, a\}$  (د)  $\{5, 6\}$

(6) إذا كان  $n(X) = 3$  ,  $n(Y) = 2$  فإن  $n(X \times Y) = \dots$

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 6

(7) إذا كانت العلاقة  $R = \{(1, 2), (2, 3), (5, 2), (4, 3)\}$  تمثل دالة فان مداها يساوي

(أ)  $\{2, 3\}$  (ب)  $\{1, 2, 4, 5\}$  (ج)  $\{2, 3, 4, 5\}$  (د)  $\{3, 4, 6, 7\}$

(8) إذا كانت  $f(x) = 2$  فإن  $2 \times f(3) = \dots$

(أ) 10 (ب) 4 (ج) 3 (د) 2

(9) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويقطع جزءاً من محور الصادات السالب طوله 5 وحدات هي

(أ)  $y = -2x + 5$  (ب)  $y = 2x - 5$  (ج)  $y = 5x - 2$  (د)  $y = 2x + 2$

(10) ميل المستقيم المار بالنقطتين (3, 4) , (2, 3) يساوي .....

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(11) الدالة  $f(x) = 2x^5 + 5x^2 + 4x - 11$  من الدرجة

(أ) الأولى (ب) الثانية (ج) الثالثة (د) الخامسة

(12) الدالة  $f(x) = 5$  يمثلها بيانياً خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

(أ) (5, 0) (ب) (0, 5) (ج) (5, 5) (د) (0, 0)

(13) أودع شخص مبلغ 10000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10% سنويا لمدة خمس سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية

المدة تساوي .....

(أ) 20000 (ب) 10000 (ج) 15000 (د) 5000

(14) افترض شخص مبلغ 1000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة ثلاث سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي

(أ) 1259.712 (ب) 259.712 (ج) 2259.712 (د) 459.712

(15) جملة مبلغ P بمعدل فائدة مركبة R% سنويا لمدة n من السنوات يساوي

(أ)  $S = P + (1 + R)^n$  (ب)  $S = P - (1 + R)^n$  (ج)  $S = P \div (1 + R)^n$  (د)  $S = P \times (1 + R)^n$

16 المشتقة الأولى للدالة  $f(x) = 10$  هي ....

(أ) 0 (ب) 5 (ج) 15 (د) 10

17 إذا كانت الدالة  $f(x) = x^2 + x + 2$  فإن المشتقة الأولى لها هي

(أ)  $f'(x) = 2x$  (ب)  $f'(x) = x^2 + 1$  (ج)  $f'(x) = 2x + 1$  (د)  $f'(x) = 2x + 2$

18 ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  عندما  $x = 1$  يساوي .....

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

19 إذا كان  $2 \in X$  و  $5 \in Y$  فإن  $(5, 2) \in \dots$

(أ)  $X \times Y$  (ب)  $Y \times X$  (ج)  $X^2$  (د)  $Y^2$

20 ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل

(أ) موجب (ب) سالب (ج) صفر (د) غير معروف

21 إذا كانت الدالة  $f(x) = (x - 2)(x + 2)$  فإن  $f'(x) = \dots$

(أ)  $x^2$  (ب)  $2x$  (ج)  $2x - 4$  (د)  $x$

22 إذا كانت الدالة  $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$  فإن  $f'(x) = \dots$

(أ)  $\frac{7}{3x+2}$  (ب)  $\frac{7}{(3x+2)^2}$  (ج)  $\frac{-7}{(3x+2)^2}$  (د)  $\frac{7}{(2x-1)^2}$

23 إذا كانت الدالة  $f(x) = (2x + 7)^5$  فإن  $f'(x) = \dots$

(أ)  $(20x + 70)^4$  (ب)  $10(2x + 7)^5$  (ج)  $5(2x + 7)^4$  (د)  $10(2x + 7)^4$

24 إذا كانت الدالة  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  فإن  $f''(x) = \dots$

(أ)  $6x^2$  (ب)  $3x^2 + 2$  (ج)  $6x$  (د)  $6x + 2$

25 القيمة العظمى للربح إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $f(x) = -2x^2 + 12x + 3$  هي

(أ) 18 (ب) 19 (ج) 20 (د) 21

26 إذا كان سعر السلعة  $P$  والكمية المطلوبة من هذه السلعة  $q$  فان مرونة الطلب السعرية  $E_p = \dots$

(أ)  $\frac{P+q'}{q}$  (ب)  $\frac{P-q'}{q}$  (ج)  $\frac{P \cdot q'}{q}$  (د)  $\frac{P \div q'}{q}$

27 ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$  عند  $x = 3$  يساوي .....

(أ) 6 (ب) 12 (ج) 18 (د) 0

28 اودعت مرام مبلغ 5000 في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة 3 سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة يساوي .....

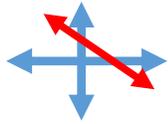
(أ) 6000 (ب) 1298.56 (ج) 6298.56 (د) 6239.56

29 إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{3x}$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots$

(أ)  $e^{3x}$  (ب)  $\frac{e^{3x}}{3}$  (ج)  $3e^{3x}$  (د)  $-3e^{3x}$

30 إذا كانت الدالة  $f(x) = \ln 2x$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots$

(أ)  $2x$  (ب)  $\frac{2}{x}$  (ج)  $\frac{1}{2x}$  (د)  $\frac{1}{x}$



31) إذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطى بالعلاقة  $C(x) = x^2 + 3x + 20$  فإن التكاليف الحدية عند  $x=10$  تساوي

- أ) 150      ب) 23      ج) 17      د) 50

32)  $\int x + 1 dx$  يساوي .....

- أ)  $x^2 + c$       ب)  $x^2 + x + c$       ج)  $\frac{1}{2}x^2 + c$       د)  $\frac{1}{2}x^2 + x + c$

33) إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{-5x}$  فإن المشتقة الثانية للدالة  $f''(x) = \dots$

- أ)  $e^{-5x}$       ب)  $\frac{e^{-5x}}{25}$       ج)  $25e^{-5x}$       د)  $-25e^{-5x}$

34) إذا كانت دالة الإيراد تعطى بالعلاقة  $R(x) = x^2 - 5x$  فإن الإيراد الحدي عند  $x=100$  تساوي

- أ) 300      ب) 205      ج) 195      د) 9500

35)  $\int x^{-5} dx$  يساوي .....

- أ)  $\frac{x^{-6}}{-6} + c$       ب)  $x^{-6} + c$       ج)  $x^{-4} + c$       د)  $\frac{x^{-4}}{-4} + c$

36) المساحة تحت منحنى الدالة  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$  وبين المستقيمين  $x = 0$ ,  $x = 2$  تساوي

- أ) 12      ب) 13      ج) 10      د) 8

37) إذا كانت  $f(x)$  دالة فان  $\int_a^b f(x) dx = \dots$

- أ)  $F(b) + F(a)$       ب)  $F(b) - F(a)$       ج)  $F(a) - F(b)$       د)  $F(b) \div F(a)$

38) إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{3x}$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $\int e^{2x} dx = \dots$

- أ)  $e^{2x}$       ب)  $\frac{e^{2x}}{2}$       ج)  $2e^{2x}$       د)  $-2e^{2x}$

39)  $\int \sqrt{x} dx$  يساوي .....

- أ)  $\frac{x^{0.5}}{0.5} + c$       ب)  $\frac{x^{-0.5}}{-0.5} + c$       ج)  $\frac{x^{1.5}}{1.5} + c + c$       د)  $\frac{x^2}{2} + c$

40) إذا كانت دالة الربح تعطى بالعلاقة  $P(x) = 2x^2 - 10x$  فإن الإيراد الحدي عند  $x=10$  تساوي

- أ) 100      ب) 30      ج) 40      د) 30

41)  $\int (2x - 1)^6 dx$  يساوي .....

- أ)  $\frac{(2x-1)^5}{10} + c$       ب)  $\frac{(2x-1)^7}{7} + c$       ج)  $\frac{(2x-1)^7}{14} + c$       د)  $6(2x - 1)^5 + c$

42)  $\int (2x^2 + 3x - 1)^7 (4x + 3) dx$  يساوي .....

- أ)  $\frac{(2x^2+3x-1)^8}{8} + c$       ب)  $(2x^2 + 3x - 1)^8 + c$       ج)  $7(2x^2 + 3x - 1)^6$       د) لا شيء مما سبق

43)  $\int \frac{1}{e^{3x-5}} dx$  يساوي .....

- أ)  $\frac{e^{3x-5}}{3} + c$       ب)  $\frac{e^{-3x+5}}{-3} + c$       ج)  $3 \cdot e^{3x-5}$       د)  $-3e^{-3x+5} + c$

44) إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطى بالعلاقة  $C'(x) = 3x^2 + 2x + 20$  علماً بان التكاليف الثابتة تساوي 100 فإن دالة التكاليف عند

هي  $C(x) = \dots$

- أ)  $x^3 + x^2 + 20x$       ب)  $6x + 2$       ج)  $6x + 102$       د)  $x^3 + x^2 + 20x + 100$

(45)  $\int \frac{1}{x} dx$  يساوي .....

(أ)  $x^2 + c$  (ب)  $x^{-1} + c$  (ج)  $x + c$  (د)  $\ln x + c$

(46) إذا كانت دالة الإيراد الحدي تعطي بالعلاقة  $R'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 8$  فان دالة الإيراد عند  $x=1$  تساوي ...

(أ) 26 (ب) 16 (ج) 10 (د) 8

(47) إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي  $p'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 24x^3$  فان دالة الربح ...

(أ)  $2x^6 + 3x^5 + 6x^4$  (ب)  $60x^4 + 60x^3 + 72x^2$  (ج)  $5x^4 + 4x^3 + 4x^2$  (د)  $812x^6 + 15x^5 + 24x^4$

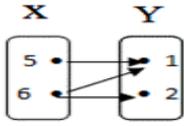
(48) اطراد الدالة  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  في الفترة  $[-2, 1]$  هو .....

(أ) تزايديه (ب) تناقصيه (ج) ثابتة (د) زوجية

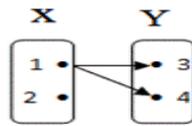
(49) جملة مبلغ 9000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% تلت سنوي لمدة 8 سنوات هو ...

(أ) 22283.66 (ب) 13283.66 (ج) 8640 (د) 17640

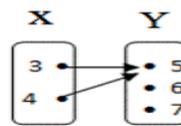
(50) المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي .....



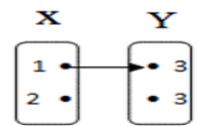
(أ)



(ب)



(ج)



(د)



جامعة الدمام  
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الرياضيات للإدارة

**MATH 120**

دكتور محمد تركي

أستاذ الرياضيات والاحصاء المساعد

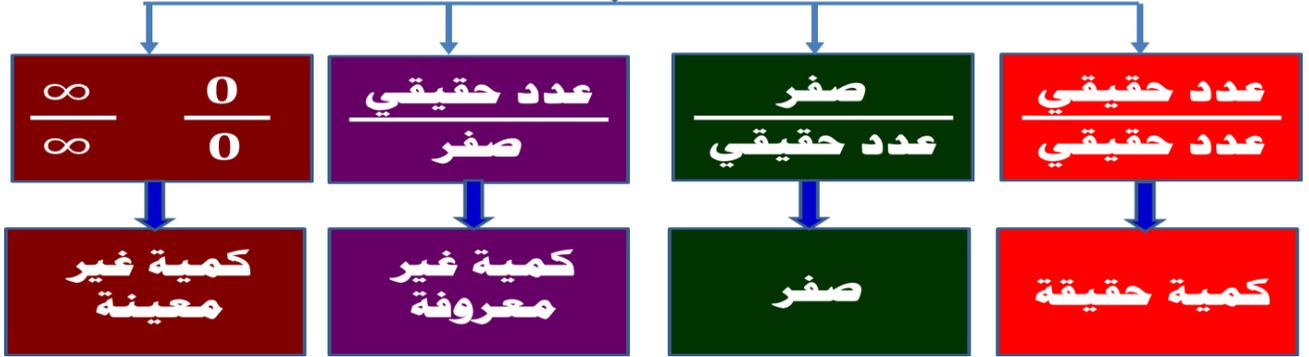
الايمل الجامعي

**mstorky@uod.edu.sa**



## نهاية الدوال

### أنواع القيم



1)  $f(x) = 2x + 1$     if  $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$  ← عدد حقيقي

2)  $f(x) = \frac{x-1}{3x+2}$ ,    if  $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2-1}{3(2)+2} = \frac{1}{6+2} = \frac{1}{8}$  ← عدد حقيقي

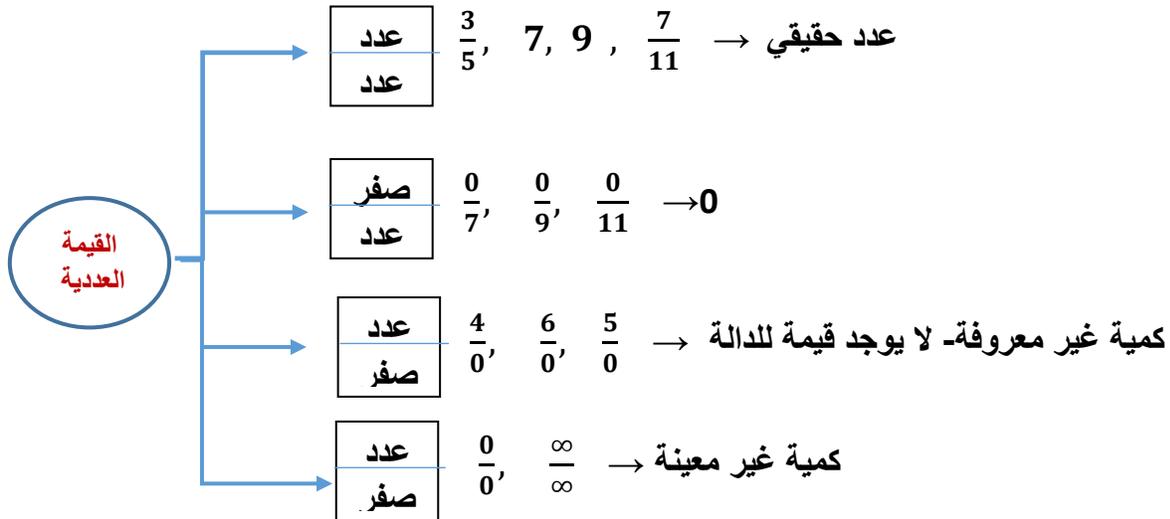
3)  $f(x) = \frac{2x-6}{x+4}$ ,    if  $x = 3, \Rightarrow f(3) = \frac{2(3)-6}{3+4} = \frac{6-6}{7} = \frac{0}{7} = 0$  ← عدد حقيقي

4)  $f(x) = \frac{6x-1}{x^2-4}$ ,    if  $x = 2, \Rightarrow f(2) = \frac{6(2)-1}{2^2-4} = \frac{12-1}{4-4} = \frac{11}{0}$

كمية غير معرفة (عدد غير حقيقي) - والدالة ليس لها قيمة - أي قيمة الدالة ليس لها وجود عند  $x=2$

5)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ ,    if  $x = 1, \Rightarrow f(1) = \frac{1-1}{1^2-2(1)+1} = \frac{0}{0}$

كمية غير معينة - لم يستطع التعويض المباشر الحصول على قيمة الدالة - ولكن هناك قيمة للدالة



$$6) f(x) = \frac{3x - 6}{x^2 - 4}, \quad \text{if } x = 2, \Rightarrow f(2) = \frac{3(2) - 6}{2^2 - 4} = \frac{6 - 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة - لم يستطيع التعويض المباشر الحصول على قيمة الدالة - ولكن هناك قيمة للدالة

$$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \text{ عامل صفري}$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow, x - 1 = 0 \text{ عامل صفري}$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow, x - 3 = 0 \text{ عامل صفري}$$

أي دالة تعوض بقيمة  $x = a$  يكون الناتج  $\frac{0}{0}$  هناك عامل صفري هو  $x - a = 0$

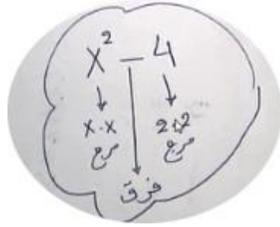
التخلص من العامل الصفري

الفكرة: اذا تم التعويض بقيمة  $x = a$  في أي دالة وكان الناتج  $\frac{0}{0}$  (كمية غير معينة)

السبب هو وجود العامل الصفري  $x = a \Rightarrow x - a = 0$  فالدالة لها قيمة لم احصل عليها حتى الان

الحل هو التخلص من العامل الصفري: اذا تم التعويض بقيمة ما في الدالة وكان الناتج  $\frac{0}{0}$  فالتخلص من العامل الصفري

أولاً: التحليل



مراجعة عامة على التحليل

أولاً: تحليل الفرق بين مربعين

$$1) x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2),$$

$$2) x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3),$$

$$3) x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5),$$

$$4) x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4),$$

$$5) x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

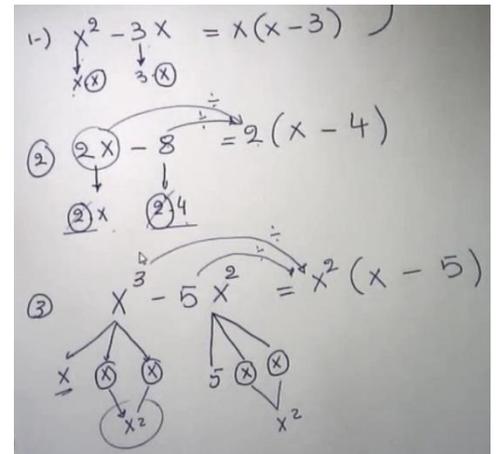
$$4) x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7),$$

ثانياً: التحليل بإخراج العامل المشترك

$$1) x^2 - 3x = x(x - 3),$$

$$2) 2x - 8 = 2(x - 4),$$

$$3) x^3 - 5x^2 = x^2(x - 5),$$



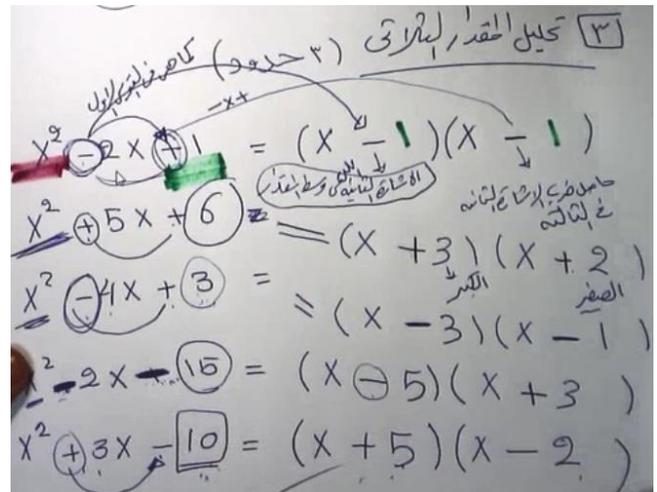
ثالثا: تحليل المقدار الثلاثي (مكون من ثلاثة حدود)

1)  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1)$ ,

2)  $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ ,

4)  $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$ ,

5)  $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$ ,



مثال:

1)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

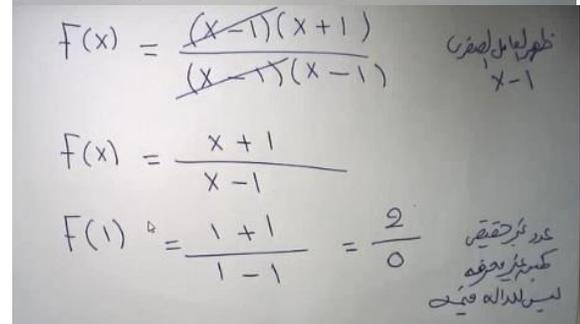
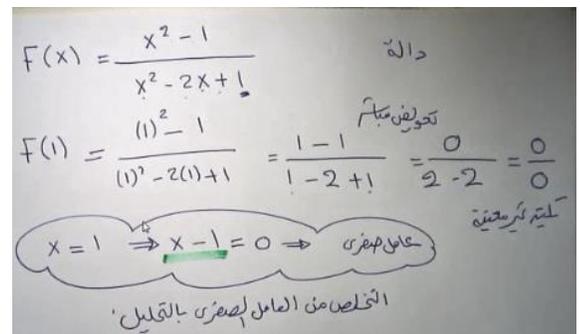
$f(x) = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 2(1) + 1} = \frac{1 - 1}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

$x = 1, \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow$  العامل الصفري

$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)}$

$f(x) = \frac{(x + 1)}{(x - 1)}$

$f(x) = \frac{(1 + 1)}{(1 - 1)} = \frac{2}{0}$

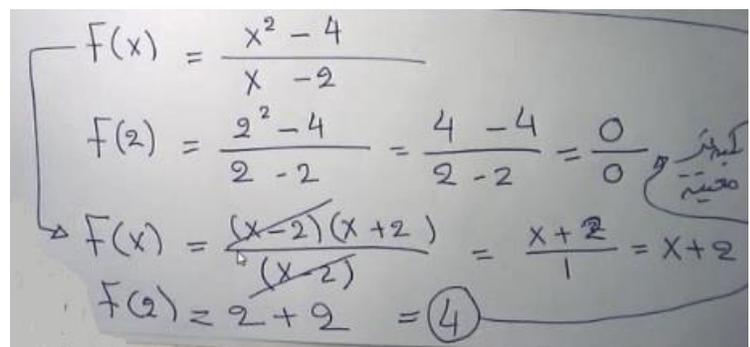


2)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$f(2) = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \frac{x + 2}{1} = x + 2$

$f(2) = 2 + 2 = 4$



## النهايات

تؤول أي تقرب

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

نهاية الدالة عند نقطة

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow 2} 2x + 3 = 2(2) + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} 5 - 4x = f(1) = 5 - 4(1) = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{5x - 4} = f(3) = \frac{3 + 1}{5(3) - 4} = \frac{4}{11}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{3x - 1} = f(2) = \frac{2 - 2}{3(2) - 1} = \frac{0}{5} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x + 5}{2x - 8} = f(4) = \frac{3(4) + 5}{2(4) - 8} = \frac{17}{0}$$

في هذه الحالة ليس للدالة نهاية

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = f(3) = \frac{3 - 3}{(3)^2 - 9} = \frac{3 - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

$$x \rightarrow 3 \quad \text{عامل صفري} \quad x - 3 \rightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3} \quad \Rightarrow \quad f(3) = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{3x + 15} = f(-5) = \frac{(-5)^2 - 25}{3(-5) + 15} = \frac{25 - 25}{-15 + 15} = \frac{0}{0}$$

$$x \rightarrow -5 \quad \text{عامل صفري} \quad x + 5 \rightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{(x - 5)(x + 5)}{3(x + 5)} = \frac{(x - 5)}{3} \quad \Rightarrow \quad f(-5) = \frac{-5 - 5}{3} = \frac{-10}{3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 5(2) + 6}{2^2 - 4} = \frac{4 - 10 + 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{(x - 3)}{(x + 2)} \quad \Rightarrow \quad f(2) = \frac{2 - 3}{2 + 2} = \frac{-1}{4}$$

في حالة ان يكن ناتج التعويض (صفر علي صفر) فإننا يمكن استخدام قاعدة لوبيتال

والتي تنص على انه في حالة كان ناتج التعويض (صفر علي صفر) يمكن إيجاد مشتقة البسط ثم إيجاد مشتقة المقام ثم التعويض مرة أخرى

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{2x} = f(2) = \frac{2(2) - 5}{2(2)} = \frac{4 - 5}{4} = \frac{-1}{4}$$

خطوات إيجاد النهاية

\*تعويض مباشر  $\leftarrow \frac{0}{0}$  \* تحليل واختصار \* تعويض مرة ثانية  $\leftarrow$  نحصل على النهاية

خواص النهايات

$$1) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

سؤال:

(١) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)] =$  ... ..

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 5 + 3 = 8$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

سؤال:

(٢) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 7$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 4$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] =$  ... ..

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 7 - 4 = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

سؤال:

(3) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 5$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \times g(x)] =$  ... ..

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 4 \times 5 = 20$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \div g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \div \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

سؤال:

(4) إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 18$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 6$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \div g(x)] =$  ... ..

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \div g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \div \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 18 \div 6 = 3$$

إيجاد النهاية باستخدام القانون

إيجاد النهاية باستخدام القانون

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} \times a^{m-n}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2^5}{x^3 - 2^3} = \frac{5}{3} \times 2^{5-3} = \frac{5}{3} \times 4 = \frac{20}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 15}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2^4}{x^2 - 2^2} = \frac{4}{2} \times 2^{4-2} = \frac{4}{2} \times 4 = 8$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 3^4}{x^3 - 3^3} = \frac{4}{3} \times 3^{4-3} = \frac{4}{3} \times 3^1 = 4$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x^2 - 5^2} = \frac{3}{2} \times 5^{3-2} = \frac{3}{2} \times 5^1 = \frac{15}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^8 - 1}{x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^8 - (-1)^8}{x^5 - (-1)^5} = \frac{8}{5} \times (-1)^{8-5} = \frac{8}{5} \times (-1)^3 = -\frac{8}{5}$$

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

كمية غير معينة  
 $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty, \quad \frac{\infty}{6} = \infty, \quad \frac{\infty}{24} = \infty \quad - - - - - \quad \infty \pm \text{عدد} = \infty, \quad \infty + 6 = \infty, \quad \infty - 5 = \infty$$

$$\infty \times \text{عدد} = \infty, \quad \infty \times 7 = \infty, \quad \infty \times 5 = \infty, \quad - - - - - \quad \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0, \quad \frac{5}{\infty} = 0, \quad \frac{11}{\infty} = 0$$

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{4 - 2x + 3x^2} = \frac{2(\infty)^2 + 3(\infty) - 5}{4 - 2(\infty) + 3(\infty)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$



نقسم البسط والمقام على  $x$  بأكبر أس في المقام

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} + 4} = \frac{2 + \frac{3}{\infty} - \frac{5}{(\infty)^2}}{\frac{4}{(\infty)^2} - \frac{2}{\infty} + 4} = \frac{2 + 0 - 0}{0 - 0 + 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 + 8}{6x^3 + 14} = \frac{5(\infty)^3 + 4(\infty)^2 + 8}{6(\infty)^3 + 14} = \frac{\infty}{\infty}$$



نقسم البسط والمقام على  $x$  بأكبر أس في المقام

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} + \frac{8}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3} + \frac{14}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^3}}{6 + \frac{14}{x^3}} = \frac{5 + \frac{4}{\infty} + \frac{8}{(\infty)^3}}{6 + \frac{14}{(\infty)^3}} = \frac{5 + 0 + 0}{6 + 0} = \frac{5}{6}$$

أوجد نهاية الدوال الآتية

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{3x - 3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{2x - 12}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8}$$

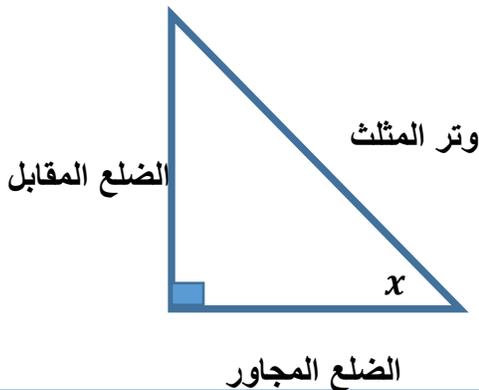
$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 2x^2 + 1}{3x^3 - 5}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{3 - 8x + 4x^2} =$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 7x + 10}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

### الدوال المثلثية



المثلث القائم

هو المثلث الذي يحتوي على زاوية قائمة

الوتر: هو الضلع المقابل للزاوية القائمة

الدوال المثلثية الأساسية:

١ ( دالة جيب الزاوية (جا) (sin)

٢ ( دالة جيب تمام الزاوية (جتا) (cos)

$$\sin x = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$$

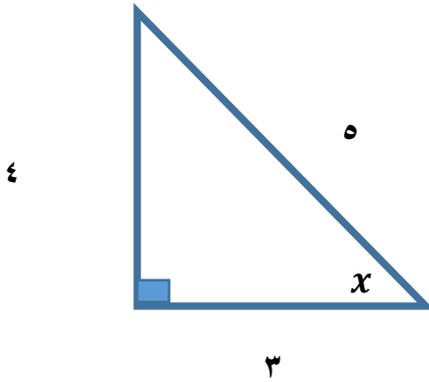
$$\cos x = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$$

٣ ( دالة ظل الزاوية (ظا) (tan)

$$\tan x = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

مثال في الشكل المقابل



$$\sin x = \frac{4}{5}$$

$$\cos x = \frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{4}{3}$$

سؤال: إذا كانت  $\sin x = 0.2$  و  $\cos x = 0.5$  فإن:

1)  $\tan x = \dots$  [ (أ) ٠.٢ (ب) ٠.٥ (ج)  $\frac{5}{2}$  (د)  $\frac{2}{5}$  ]

2)  $\cot x = \dots$  [ (أ) ٠.٢ (ب) ٠.٥ (ج)  $\frac{5}{2}$  (د)  $\frac{2}{5}$  ]

### مقلوبات الدوال المثلثية

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

سؤال: إذا كانت  $\sin x = 0.3$  و  $\cos x = 0.7$  فإن:

1)  $\tan x = \dots$  [ (أ) ٠.٣ (ب) ٠.٧ (ج)  $\frac{7}{3}$  (د)  $\frac{3}{7}$  ]

2)  $\cot x = \dots$  [ (أ) 0.3 (ب) 0.7 (ج)  $\frac{7}{3}$  (د)  $\frac{3}{7}$  ]

3)  $\csc x = \dots$  [  $\frac{10}{3}$  (د)  $\frac{10}{7}$  (ج) ٠.٥ (ب) ٠.٣ (أ) ]

4)  $\sec x = \dots$  [  $\frac{10}{3}$  (د)  $\frac{10}{7}$  (ج) ٠.٥ (ب) ٠.٣ (أ) ]

### نهاية الدوال المثلثية

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = 1$ , 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin ax}{x} \right) = a$ , 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{bx} \right) = \frac{1}{b}$ , 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin ax}{bx} \right) = \frac{a}{b}$

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right) = 1$ , 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan ax}{x} \right) = a$ , 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{bx} \right) = \frac{1}{b}$ , 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan ax}{bx} \right) = \frac{a}{b}$

### تمارين

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x} \right) = 3$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{2x} \right) = \frac{1}{2}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 7x}{2x} \right) = \frac{7}{2}$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{-3x} \right) = \frac{1}{-3}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{5x} \right) = \frac{2}{5}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{11x} \right) = \frac{2}{11}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 2x}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{\sin 2x}{x}}{\frac{7x}{x}} = \frac{3 + 2}{7} = \frac{5}{7}$

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \tan 2x}{\sin 5x + 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{6x}{x} - \frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x} + \frac{4x}{x}} = \frac{6 - 2}{5 + 4} = \frac{4}{9}$

بقسمة حدود البسط  
والمقام على x

### تمارين

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{3x} \right) = \dots$  [  $\frac{2}{3}$  (د)  $\frac{2}{3}$  (ج) 3 (ب) 2 (أ) ]

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{7x} = \dots$  [  $\frac{2}{7}$  (د)  $\frac{1}{7}$  (ج) ٧ (ب) ١ (أ) ]

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \dots$  [  $\frac{5}{3}$  (د) ٣ (ج) 5 (ب)  $\frac{3}{5}$  (أ) ]

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \dots$  [  $\frac{2}{3}$  (د) ٣ (ج) ٢ (ب)  $\frac{3}{2}$  (أ) ]

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \tan 2x}{\sin 3x + 2x} = \dots$  [ 1 (د) ٣ (ج) 5 (ب)  $\frac{1}{5}$  (أ) ]

## تفاضل الدوال المثلثية

$$1) y = \sin ax \Rightarrow y' = a \cdot \cos ax$$

$$1) y = \sin 3x \Rightarrow y' = 3 \cdot \cos 3x \quad 2) y = \sin \frac{1}{2}x \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}x$$

$$3) y = \sin 7x \Rightarrow y' = 7 \cdot \cos 7x \quad 4) y = \sin(-3x) \Rightarrow y' = -3 \cdot \cos(-3x)$$

سؤال

(1) إذا كانت  $y = \sin 4x$  فان:

$y' = \dots$

(أ)  $4 + \cos 4x$       (ب)  $4 \sin 4x$       (ج)  $4 \cos 4x$       (د)  $\cos 4x$

$$2) y = \cos ax \Rightarrow y' = -a \cdot \sin ax$$

$$1) y = \cos 5x \Rightarrow y' = -5 \cdot \sin 5x \quad 2) y = \cos 2x \Rightarrow y' = -2 \cdot \sin 2x$$

$$3) y = \cos 6x \Rightarrow y' = -6 \cdot \sin 6x \quad 4) y = \cos(-4x) \Rightarrow y' = 4 \cdot \sin(-4x)$$

سؤال

(1) إذا كانت  $y = \cos 5x$  فان:

$y' = \dots$

(أ)  $5 \sin 5x$       (ب)  $-5 \sin 5x$       (ج)  $5 \sin 5x$       (د)  $\sin 5x$

$$3) y = \tan ax \Rightarrow y' = a \cdot \sec^2 ax$$

$$1) y = \tan 3x \Rightarrow y' = 3 \cdot \sec^2 3x \quad 2) y = \tan \sqrt{5}x \Rightarrow y' = \sqrt{5} \cdot \sec^2 \sqrt{5}x$$

$$3) y = \tan 9x \Rightarrow y' = 9 \cdot \sec^2 9x \quad 4) y = \tan 7x \Rightarrow y' = 7 \cdot \sec^2 7x$$

سؤال

(1) إذا كانت  $y = \tan 2x$  فان:

$y' = \dots$

(أ)  $-2 \sec^2 2x$       (ب)  $\sec^2 2x$       (ج)  $2 \sec^2 2x$       (د)  $-\sec^2 2x$

$$3) y = \cot ax \Rightarrow y' = -a \cdot \csc^2 ax$$

$$1) y = \cot 2x \Rightarrow y' = -2 \cdot \csc^2 2x \quad 2) y = \cot 7x \Rightarrow y' = -7 \cdot \csc^2 7x$$

$$3) y = \cot 6x \Rightarrow y' = -6 \cdot \csc^2 6x \quad 4) y = \tan 7x \Rightarrow y' = 7 \cdot \sec^2 7x$$

سؤال

(1) إذا كانت  $y = \tan 3x$  فان:

(2) إذا كانت  $y = \cot 5x$  فان:

$y' = \dots$

$y' = \dots$

## تكامـل الدوال المثلثية

$$\int \sin ax \, dx = \frac{-\cos ax}{a} + c$$

$$1) \int \sin 2x \, dx = \frac{-\cos 2x}{2} + c$$

$$2) \int \sin 7x \, dx = \frac{-\cos 7x}{7} + c$$

$$3) \int \sin 3x \, dx = \frac{-\cos 3x}{3} + c$$

$$4) \int \sin 9x \, dx = \frac{-\cos 9x}{9} + c$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{\sin ax}{a} + c$$

$$1) \int \cos 4x \, dx = \frac{\sin 4x}{4} + c$$

$$2) \int \cos \frac{1}{4}x \, dx = \frac{\sin \frac{1}{4}x}{\frac{1}{4}} + c = 4\sin \frac{1}{4}x + c$$

$$3) \int \cos 5x \, dx = \frac{\sin 5x}{5} + c$$

$$4) \int \cos 6x \, dx = \frac{\sin 6x}{6} + c$$

$$\int \sec^2 ax \, dx = \frac{\tan ax}{a} + c$$

$$1) \int \sec^2 3x \, dx = \frac{\tan 3x}{3} + c$$

$$2) \int \sec^2 5x \, dx = \frac{\tan 5x}{5} + c$$

$$3) \int \sec^2 7x \, dx = \frac{\tan 7x}{7} + c$$

$$4) \int \sec^2 9x \, dx = \frac{\tan 9x}{9} + c$$

$$\int \csc^2 ax \, dx = \frac{-\cot ax}{a} + c$$

$$1) \int \csc^2 8x \, dx = \frac{-\cot 8x}{8} + c$$

$$2) \int \csc^2 3x \, dx = \frac{-\cot 3x}{3} + c$$

$$3) \int \csc^2 7x \, dx = \frac{-\cot 7x}{7} + c$$

$$4) \int \csc^2 4x \, dx = \frac{-\cot 4x}{4} + c$$

$y' = \dots$

تمارين: (١) إذا كانت  $y = \sin 5x$  فإن:

(د)  $-\frac{\cos 5x}{5}$

(ج)  $\frac{\cos 5x}{5}$

(ب)  $-5\cos 5x$

(ا)  $5\cos 5x$

(٢)  $\int \sin 3x \, dx = \dots$

$$-\frac{\cos 3x}{3} \quad (د) \quad \frac{\cos 3x}{3} \quad (ج) \quad -3\cos 3x \quad (ب) \quad 3\cos 3x \quad (ا)$$

(٣) إذا كانت  $y = \sin 2x + \cos 3x$  فان:  $y' = \dots$

$$\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \quad (ب) \quad \cos 2x + \sin 3x \quad (ا)$$

$$-2\cos 2x + 3\sin 3x \quad (د) \quad 2\cos 2x - 3\sin 3x \quad (ج)$$

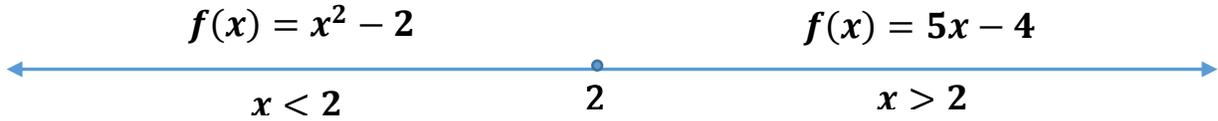
### نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

يكون للدالة المعرفة قاعدتين علي يمين ويسار نقطة معينة نهاية إذا كانت: النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

الدالة المعرفة قاعدتين علي يمين ويسار نقطة معينة ليس لها نهاية عندها إذا كانت: النهاية اليمنى  $\neq$  النهاية اليسرى

مثال (١) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 2 \\ 5x - 4, & x > 2 \end{cases}$  فابحث وجود:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ؟

الحل



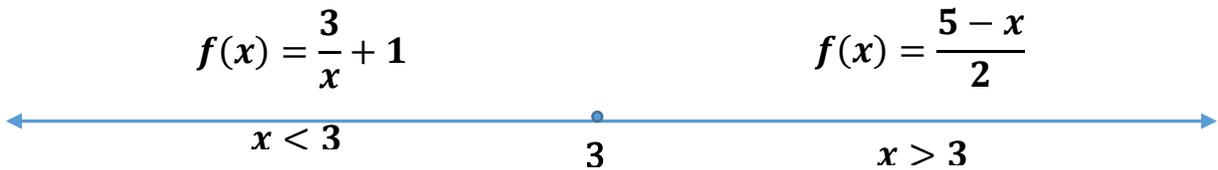
أولاً: إيجاد النهاية اليمنى:  $f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 5x - 4 = 5(2) - 4 = 10 - 4 = 6$

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى:  $f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2 = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

وبالتالي: الدالة ليس لها نهاية عند  $x \rightarrow 2$   $\leftarrow \leftarrow$  النهاية اليمنى  $\neq$  النهاية اليسرى

مثال (2) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} + 1, & x < 3 \\ \frac{5-x}{2}, & x > 3 \end{cases}$  فابحث وجود:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  ؟

الحل



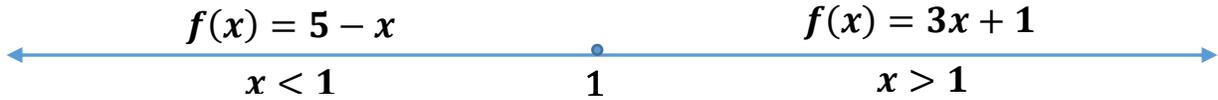
أولاً: إيجاد النهاية اليمنى:  $f(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5-x}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى:  $f(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x} + 1 = \frac{3}{3} + 1 = 1 + 1 = 2$

وبالتالي: الدالة ليس لها نهاية عند  $x \rightarrow 3$   $\leftarrow \leftarrow$  النهاية اليمنى  $\neq$  النهاية اليسرى

مثال ٣) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x > 1 \\ 5 - x, & x < 1 \end{cases}$  فابحث وجود  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ؟

الحل



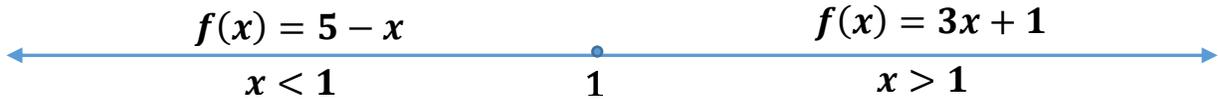
أولاً: إيجاد النهاية اليمنى:  $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x + 1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى:  $f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 5 - x = 5 - 1 = 4$

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى  $\leftarrow \leftarrow$  وبالتالي: نهاية الدالة = 4  $x \rightarrow 1$

مثال ٣) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x > 1 \\ 5 - x, & x < 1 \end{cases}$  فابحث وجود  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ؟

الحل



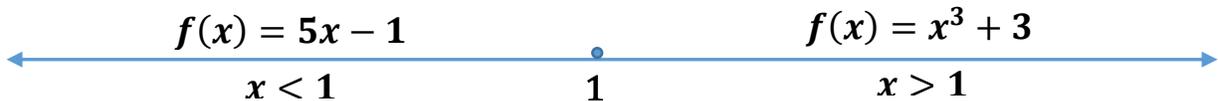
أولاً: إيجاد النهاية اليمنى:  $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x + 1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى:  $f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 5 - x = 5 - 1 = 4$

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى  $\leftarrow \leftarrow$  وبالتالي: نهاية الدالة = 4  $x \rightarrow 1$

سؤال) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x > 1 \\ 5x - 1, & x < 1 \end{cases}$  فان:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots$  (أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) ليس لها نهاية

الحل



أولاً: إيجاد النهاية اليمنى:  $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 + 3 = (1)^3 + 3 = 1 + 3 = 4$

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى:  $f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 5x - 1 = 5(1) - 1 = 5 - 1 = 4$

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى  $\leftarrow \leftarrow$  وبالتالي: نهاية الدالة = 4  $x \rightarrow 1$

سؤال) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x > 0 \\ 2 \cos 3x, & x < 0 \end{cases}$  فان:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots$  (أ) 2 (ب) 3 (ج) -2 (د) ليس لها نهاية

## الحل

$$f(x) = 2 \cos 3x$$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$$



$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

أولاً: إيجاد النهاية اليمنى:

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \cos 3x = 2 \cos 3(0) = 2(1) = 2$$

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى:

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى ← ← وبالتالي: نهاية الدالة = 2

سؤال) إذا كانت الدالة

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots \quad \text{فان} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 3x}{x}, & x > 0 \\ \cos 3x, & x < 0 \end{cases}$$

(أ) 3 (ب) 2 (ج) 9 (د) ليس لها نهاية

## الحل

$$f(x) = \cos 3x$$

$$f(x) = \frac{\tan 3x}{x}$$



$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan 3x}{x} = 3$$

أولاً: إيجاد النهاية اليمنى:

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos 3x = \cos 3(0) = 1$$

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى:

النهاية اليمنى  $\neq$  النهاية اليسرى ← ← وبالتالي: ليس للدالة نهاية

تمارين :

1)  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 8, & x > 1 \\ 2x + 9, & x < 1 \end{cases}$  find  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ?      2)  $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x > 3 \\ x^2 + 3, & x < 3 \end{cases}$  find  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ?

3)  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x < 1 \end{cases}$  find  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ?      4)  $f(x) = \begin{cases} 3x + 5, & x > 2 \\ x^2 + 7, & x < 2 \end{cases}$  find  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ?

## اتصال الدالة عند نقطة

اتصال الدالة عند نقطة  $x = a$

(١) الدالة معرفة عن  $x = a$  أي قيمة الدالة  $f(a)$  موجودة (٢) نهاية الدالة موجودة عند  $x \rightarrow a$

(٣) قيمة الدالة = نهاية الدالة

مثال (١) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 11, & x = 2 \end{cases}$  عند  $x = 2$  ؟

## الحل

$$f(2) = 11$$

أولاً: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{1} = 3(2)^2 = 3 \times 4 = 12$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة  $\neq$  نهاية الدالة: الدالة غير متصلة عند  $x = 2$ .

مثال (٢) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$  عند  $x = 2$  ؟

الحل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة  $f(2) = 1$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{1} = \frac{2(2)-1}{1} = 2 - 1 = 1$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة = نهاية الدالة: الدالة متصلة عند  $x = 2$ .

مثال (٣) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$  عند  $x = 3$  ؟

الحل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة  $f(3) = 6$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{1} = \frac{2(3)}{1} = 6$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة = نهاية الدالة: الدالة متصلة عند  $x = 2$ .

مثال (٤) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$  متصلة عند  $x = 1$  فإن:  $k = \dots$

الحل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة  $f(1) = k$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$

ثالثا: الدالة متصلة قيمة الدالة = نهاية الدالة  $k = \frac{1}{2}$

مثال (٥) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$  متصلة عند  $x = 2$  فإن:  $k = \dots$

الحل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة  $f(2) = k$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x-3} = \frac{2(2)}{2(2)-3} = \frac{4}{1} = 4$

ثالثا: الدالة متصلة قيمة الدالة = نهاية الدالة  $k = 4$

مثال (٦) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$  عند  $x = 0$  ؟

الحل

أولاً: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة  
 ثانياً: إيجاد نهاية الدالة  
 ثالثاً: بحث اتصال الدالة: قيمة الدالة = نهاية الدالة  
 عند  $x = 0$  الدالة متصلة عند  $f(0) = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$

مثال (٧) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$  عند  $x = 2$  ؟  
 الحل  
 أولاً: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة  
 ثانياً: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{1} = 2(2) = 4$   
 ثالثاً: بحث الاتصال قيمة الدالة = نهاية الدالة = 4  
 الدالة متصلة عند  $x = 2$

مثال (٨) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x^2-9}, & x \neq 3 \\ k, & x = 3 \end{cases}$  متصلة عند  $x = 3$  فأوجد قيمة  $k$  ؟  
 الحل  
 أولاً: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة  
 ثانياً: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3(3)^2}{2(3)} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$   
 ثالثاً: الدالة متصلة قيمة الدالة = نهاية الدالة =  $\frac{9}{2}$   
 $k = \frac{9}{2}$  ∴

### اتصال الدالة المعرفة بقاعدتين

تكون الدالة المعرفة بقاعدتين متصلة عند نقطة  $x = a$  إذا كان:

$$\text{قيمة الدالة } f(a) = \text{النهية اليمنى } f(a^+) = \text{النهية اليسرى } f(a^-)$$

مثال (١) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 2 \\ 4x - 3, & x < 2 \end{cases}$  عند  $x = 2$  ؟  
 الحل

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى $f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 4x - 3$ $= 4(2) - 3 = 8 - 3 = 5$	ثانياً: إيجاد النهاية اليمنى $f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 2$ $= 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$	أولاً: إيجاد قيمة الدالة عند $x = 2$ $f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$
--	--	--

قيمة الدالة = النهاية اليمنى  $\neq$  النهاية اليسرى لذلك الدالة غير متصلة عند  $x = 2$

مثال (٢) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x > 1 \\ x + 1, & x \leq 1 \end{cases}$  عند  $x = 1$  ؟

الحل

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى	ثانياً: إيجاد النهاية اليمنى	أولاً: إيجاد قيمة الدالة عند $x = 1$
$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1$	$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 1$	$f(1) = 1 + 1 = 2$
$= 1 + 1 = 2$	$= 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$	

قيمة الدالة = النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = 2 لذلك الدالة متصلة عند  $x = 1$

مثال (٣) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x, & x \geq 2 \\ x - 3, & x < 2 \end{cases}$  عند  $x = 2$  ؟  
الحل

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى	ثانياً: إيجاد النهاية اليمنى	أولاً: إيجاد قيمة الدالة عند $x = 2$
$f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 3$	$f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 5 - 2x$	$f(2) = 5 - 2(2) = 5 - 4 = 1$
$= 2 - 3 = -1$	$= 5 - 2(2) = 5 - 4 = 1$	

قيمة الدالة = النهاية اليمنى  $\neq$  النهاية اليسرى لذلك الدالة غير متصلة عند  $x = 2$

مثال (٤) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5, & x \geq 2 \\ 2x + 3, & x < 2 \end{cases}$  عند  $x = 2$  ؟  
الحل

ثانياً: إيجاد النهاية اليسرى	ثانياً: إيجاد النهاية اليمنى	أولاً: إيجاد قيمة الدالة عند $x = 2$
$f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 3$	$f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x^2 - 5$	$f(2) = 3(2)^2 - 5 = 12 - 5$
$= 2(2) + 3 = 7$	$= (2)^2 - 5 = 12 - 5 = 7$	$= 7$

قيمة الدالة = النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = 7 لذلك الدالة متصلة عند  $x = 2$

مثال (٥) ابحث اتصال الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{3x}, & x \neq 0 \\ 5\cos 3x, & x = 0 \end{cases}$  عند  $x = 0$  ؟  
الحل

أولاً: إيجاد قيمة الدالة عند  $x = 0$   $f(0) = 5\cos 3(0) = 5 \times 1 = 5$

ثانياً: إيجاد نهاية الدالة عند  $x \rightarrow 0$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3}$

قيمة الدالة  $\neq$  النهاية اليمنى لذلك الدالة متصلة عند  $x = 0$

## فترات التزايد والتناقص للدالة

الخطوات:

(١) إيجاد المشتقة الاولى للدالة

(٢) مساواة المشتقة الاولى بالصفر وحل المعادلة وإيجاد قيم  $x$  الحرجة

(٣) نضع قيم  $x$  علي خط الاعداد ونقسمه فترات (٤) من كل فترة نأخذ قيمة اختيارية لـ  $x$  ونعوض في المشتقة الاولى

(٥) إذا كانت قيم المشتقة موجبة كانت الدالة تزايديه في الفترة وإذا كانت قيمة المشتقة سالبة كانت الدالة تناقصيه في الفترة

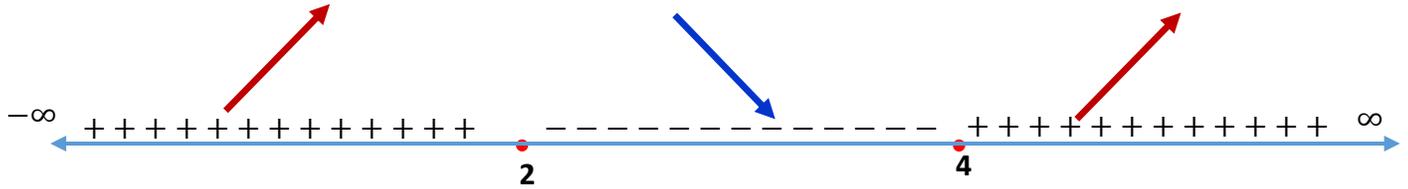
مثال (١) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$  ؟

الحل

(١) إيجاد المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$  ثم مساواة المشتقة بالصفر

ويمكن حل المعادلة باستخدام الآلة فحصل علي  $3x^2 - 18x + 24 = 0$

$$x = 2, \quad x = 4$$



(٢) تحديد الفترات

1) $]-\infty, 2[$ , $x = 0$ $f'(0) = 3(0)^2 - 18(0) + 24$ $= 0 - 0 + 24 = +24$ الدالة تزايديه في الفترة $]-\infty, 2[$	2) $]2, 4[$ , $x = 3$ $f'(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 24$ $= 27 - 54 + 24 = -3$ الدالة تناقصيه في الفترة $]2, 4[$	3) $]4, \infty[$ , $x = 5$ $f'(5) = 3(5)^2 - 18(5) + 24$ $= +9$ الدالة تزايديه في الفترة $]4, \infty[$
---	--	---

## فترات التحذب لأعلي والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب

(١) نوجد المشتقة الاولى (٢) ثم نوجد المشتقة الثانية (٣) نساوي المشتقة الثانية بالصفر وإيجاد قيم  $x$  الحرجة

(٤) نضع قيم  $x$  على خط الاعداد ونقسمه الي فترات (٥) نختار قيمة اختيارية من كل فترة ونعوض في المشتقة الثانية

(٦) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية في الفترة موجبة كل تحذب لأسفل وإذا القيمة سالبة يكون تحذب لأعلي في الفترة

(٧) إذا تغير التحذب قبل وبعد قيمة  $x$  (من تحذب لأعلي الي تحذب لأسفل) كانت النقطة هي نقطة انقلاب

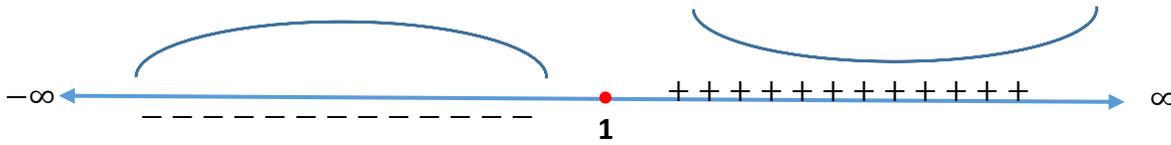
(٨) نعوض بقيمة  $x$  في الدالة الاصلية لإيجاد نقطة الانقلاب  $(x, f(x))$

مثال (١) اوجد فترات التحذب لأعلي والتحدب لأسفل ونقطة الانقلاب للدالة  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  ؟

الحل

(١) المشتقة الاولى  $f'(x) = 3x^2 - 6x$  ثم إيجاد المشتقة الثانية  $f''(x) = 6x - 6$

$$6x - 6 = 0 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1 \quad \text{٢) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة}$$



٣) تحديد الفترات

$$1) ] -\infty, 1[, \quad x = 0$$

$$f''(0) = 6(0) - 6 = -6$$

الفترة تحذب لأعلي للدالة

$$2) ] 1, \infty[, \quad x = 2$$

$$f''(2) = 6(2) - 6 = 6$$

الفترة تحذب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحذب قبل وبعد  $x=1$  فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

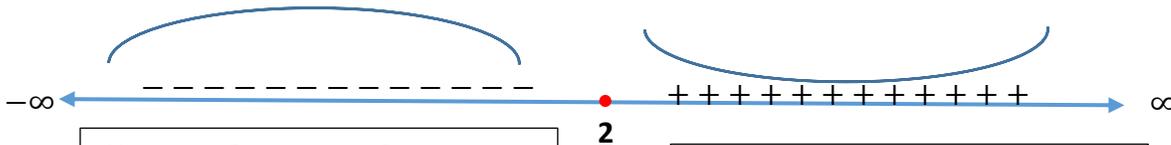
$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2 \quad \text{تكون نقطة الانقلاب} \quad (1,2)$$

مثال ٢) نقطة الانقلاب للدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  هي  $(2,3)$ .....

الحل

$$1) \text{ المشتقة الاولى } f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \text{ثم إيجاد المشتقة الثانية } f''(x) = 6x - 12$$

$$2) \text{ مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة } 6x - 12 = 0 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$



٣) تحديد الفترات

$$1) ] -\infty, 2[, \quad x = 0$$

$$f''(0) = 6(0) - 12 = -12$$

الفترة تحذب لأعلي للدالة

$$2) ] 2, \infty[, \quad x = 3$$

$$f''(3) = 6(3) - 12 = 6$$

الفترة تحذب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحذب قبل وبعد  $x = 2$  فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

$$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 1 = 3 \quad \text{تكون نقطة الانقلاب} \quad (2,3)$$

مثال ٣) نقطة الانقلاب للدالة  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 10$  هي  $(1.5, -5.5)$ .....

الحل

$$1) \text{ المشتقة الاولى } f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \quad \text{ثم إيجاد المشتقة الثانية } f''(x) = 12x - 18$$

$$2) \text{ مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة } 12x - 18 = 0 \rightarrow 12x = 18 \rightarrow x = 1.5$$



### الدالة الصريحة والدالة الضمنية

الدالة الصريحة: هي دالة يكون المتغير التابع في أحد طرفي الدالة والمتغير او المتغيرات المستقلة في الطرف الاخر

$$y = f(x)$$

1)  $y = x^2 + 2x + 3$       2)  $f(x) = 4x^3 - 3x$       3)  $y = 4x + 9$       4)  $y = x^5 - 3$

### كل الدوال السابقة دوال صريحة

الدالة الضمنية: يكون المتغير التابع والمتغير او المتغيرات المستقلة في طرف واحد (أي في مقدار واحد)

$$f(x, y) = c$$

1)  $2y - 3x^2 + 2x = 3$       2)  $3y + 4x^3 = 3x$       3)  $y + 4x = 9$       4)  $x^5 + y = 6$

### كل الدوال السابقة دوال ضمنية

١) الدالة  $y + 3x = 5$  تكون دالة صريحة على الشكل .....

أ)  $y + 3x - 5 = 0$       ب)  $x = y - 5$       ج)  $y = -3x + 5$       د)  $x = 3y + 5$

٢) الدالة  $y^2 + x^2 = 4$  تكون دالة صريحة على الشكل .....

أ)  $y = 4 - x^2$       ب)  $x = 4 - y^2$       ج)  $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$       د)  $x = 2 - y$

1)  $y^2 + x^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

2)  $y^2 + x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 4 - y^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{4 - y^2}$

### الدالة الفردية والدالة الزوجية

الدالة الزوجية: هي الدالة التي يكون  $f(-x) = f(x)$

امثلة على الدوال الزوجية

1)  $f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 = -x \times -x = x^2 = f(x)$  دالة زوجية

2)  $f(x) = |x| \Rightarrow f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$  دالة زوجية

3)  $f(x) = \cos x \Rightarrow f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$  دالة زوجية

الدالة الفردية: هي الدالة التي يكون  $f(-x) = -f(x)$

امثلة على الدوال الفردية

1)  $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x \times -x \times -x = -x^3 = -f(x)$  دالة فردية

2)  $f(x) = \sin x \Rightarrow f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$  دالة فردية

3)  $f(x) = \tan x \Rightarrow f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$  دالة فردية

تكون الدالة ليست فردية وليست زوجية إذا كان  $f(-x) \neq f(x)$        $f(-x) \neq -f(x)$

امثلة بين أي الدوال الاتية فردية ام زوجية ام ليست فردية وليست زوجية:

$$1) f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$$

$$2) f(x) = \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5}$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 - 5$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \sin(-x)}{(-x)^4 + 5}$$

$$f(-x) = x^4 - 4x^2 - 5 = f(x)$$

$$f(-x) = \frac{-x^3 \times -\sin x}{x^4 + 5} = \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5} = f(x)$$

الدالة زوجية

الدالة زوجية

$$3) f(x) = \frac{|x| \sin x}{x^2}$$

$$4) f(x) = \frac{|x| \cdot (x^2 + 1)}{x^3}$$

$$f(-x) = \frac{|-x| \sin(-x)}{(-x)^2}$$

$$f(-x) = \frac{|-x| \cdot ((-x)^2 + 1)}{(-x)^3}$$

$$f(-x) = \frac{|x| \times -\sin x}{x^2} = -\frac{|x| \sin x}{x^2}$$

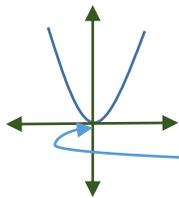
$$f(-x) = \frac{|x| \cdot (x^2 + 1)}{-x^3} = -\frac{|x| \cdot (x^2 + 1)}{x^3} = -f(x)$$

الدالة فردية

الدالة فردية

### الدالة التربيعية والتمثيل البياني لها

الصورة العامة للدالة التربيعية:  $f(x) = (x - a)^2 \pm b$  حيث  $a, b$  ثوابت



(أ) إذا كان قيمة  $a = b = 0$  فان الدالة تصبح علي الصورة  $f(x) = x^2$

التمثيل البياني لها منحنى مفتوح لأعلي راس المنحنى عند نقطة الأصل  $a = (0, 0)$

وهي دالة زوجية لتمثالها حول محور الصادات

(ب) إذا كانت  $a \neq 0, b = 0$

(١) فإذا كانت الإشارة في القوس سالبة فنحصل علي منحنى الدالة بإزاحة منحنى الدالة التربيعية  $f(x) = x^2$  افقيا علي

محور السينات الي اليمين بمقدار  $a$  من الوحدات

(٢) فإذا كانت الإشارة في القوس موجبة فنحصل علي منحنى الدالة بإزاحة منحنى الدالة التربيعية  $f(x) = x^2$  افقيا علي

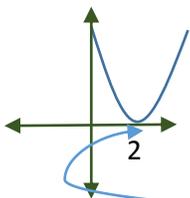
محور السينات الي اليسار بمقدار  $a$  من الوحدات

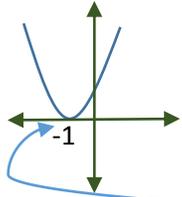
مثال (١) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = (x - 2)^2$

الإشارة في القوس سالبة فنحصل علي منحنى الدالة بإزاحة منحنى

الدالة التربيعية  $f(x) = x^2$  افقيا علي محور السينات الي اليمين

بمقدار ٢ وحدة فيكون راس المنحنى  $(2, 0)$





مثال ٢) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = (x + 1)^2$

الإشارة في القوس موجبة فنحصل علي منحنى الدالة بإزاحة منحنى

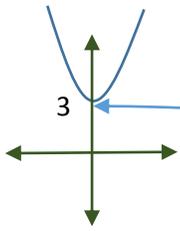
الدالة التربيعية  $f(x) = x^2$  أفقيا على محور السينات الي اليسار

بمقدار وحدة واحدة فيكون رأس المنحنى  $(-1, 0)$

ملحوظة: إذا كانت الإشارة داخل القوس سالبة تكون إزاحة الي اليمين وإذا كانت الإشارة داخل القوس موجبة تكون إزاحة الي اليسار

ج) إذا كانت  $a = 0, b \neq 0$

إذا كان قيمة  $b$  موجبة فان الإزاحة تكون راسيا الي اعلي علي محور الصادات وإذا كانت سالبة تكون الإزاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات



مثال ٣) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = x^2 + 3$

قيمة العدد  $b = 3$  موجب فنحصل علي منحنى الدالة بإزاحة منحنى

الدالة التربيعية  $f(x) = x^2$  راسيا الي أعلى علي محور الصادات

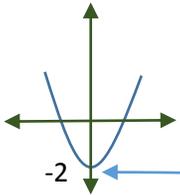
بمقدار ٣ وحدة فيكون رأس المنحنى  $(0, 3)$

مثال ٤) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = x^2 - 2$

قيمة العدد  $b = -2$  سالبة فنحصل علي منحنى الدالة بإزاحة منحنى

الدالة التربيعية  $f(x) = x^2$  راسيا الي أسفل علي محور الصادات

بمقدار ٢ وحدة واحدة فيكون رأس المنحنى  $(0, -2)$



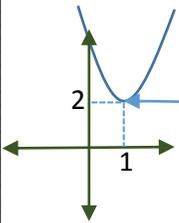
ملحوظة: إذا كانت قيمة  $b$  موجبة تكون إزاحة راسيا الي اعلي علي محور الصادات وإذا كانت  $b$  سالبة تكون إزاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات

مثال ٥) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

هنا نلاحظ هناك إزاحة أفقيا الي اليمين علي محور السينات بمقدار ١ وحدة

وإزاحة راسيا الي اعلي علي محور الصادات بمقدار ٢ وحدة للدالة التربيعية

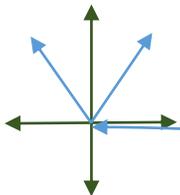
$f(x) = x^2$  فيكون رأس المنحنى  $(1, 2)$



ثانيا: الصورة العامة لدالة المقياس:  $f(x) = |x - a| \pm b$  حيث  $a, b$  ثوابت

أ) إذا كان قيمة  $a = b = 0$  فان الدالة تصبح على الصورة  $f(x) = |x|$

التمثيل البياني لها شعاعين لأعلي لهما نقطة بداية واحدة عند نقطة الأصل  $o = (0, 0)$



وهي دالة زوجية لتمثلها حول محور الصادات

ب) إذا كانت  $a \neq 0, b = 0$

١) فإذا كانت الإشارة في المقياس سالبة فنحصل على منحنى الدالة بإزاحة منحنى دالة المقياس  $f(x) = |x|$  أفقيا على محور السينات الي اليمين بمقدار  $a$  من الوحدات

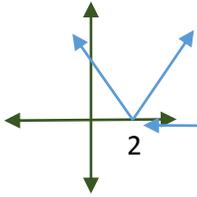
٢) فإذا كانت الإشارة في المقياس موجبة فنحصل على منحنى الدالة بإزاحة منحنى دالة المقياس  $f(x) = |x|$  أفقيا على محور السينات الي اليسار بمقدار  $a$  من الوحدات

مثال ١) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = |x - 2|$

الإشارة في المقياس سالبة فنحصل على منحنى الدالة بإزاحة منحنى

دالة المقياس  $f(x) = |x|$  أفقيا على محور السينات الي اليمين

بمقدار ٢ وحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين  $(2, 0)$

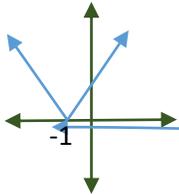


مثال ٢) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = |x + 1|$

الإشارة في المقياس موجبة فنحصل على منحنى الدالة بإزاحة منحنى

دالة المقياس  $f(x) = |x|$  أفقيا على محور السينات الي اليسار

بمقدار وحدة واحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين  $(-1, 0)$



ملحوظة: إذا كانت الإشارة داخل المقياس سالبة تكون إزاحة الي اليمين وإذا كانت الإشارة داخل المقياس موجبة تكون إزاحة الي اليسار

ج) إذا كانت  $a = 0, b \neq 0$

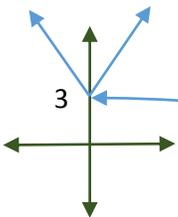
إذا كان قيمة  $b$  موجبة فإن الإزاحة تكون راسيا الي اعلي على محور الصادات وإذا كانت سالبة تكون الإزاحة راسيا الي اسفل على محور الصادات

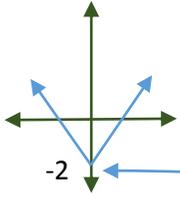
مثال ٣) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = |x| + 3$

قيمة العدد  $b = 3$  موجب فنحصل على منحنى الدالة بإزاحة منحنى

دالة المقياس  $f(x) = |x|$  راسيا الي أعلى على محور الصادات

بمقدار ٣ وحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين  $(0, 3)$





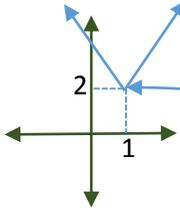
مثال ٤) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = |x| - 2$

قيمة العدد  $b = -2$  سالبة فنحصل علي منحنى الدالة بإزاحة منحنى

دالة المقياس  $f(x) = |x|$  راسيا الي أسفل علي محور الصادات

بمقدار ٢ وحدة واحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين  $(0, -2)$

ملحوظة: إذا كانت قيمة  $b$  موجبة تكون إزاحة راسيا الي اعلي علي محور الصادات وإذا كانت  $b$  سالبة تكون إزاحة راسيا الي أسفل علي محور الصادات



مثال ٥) اوجد التمثيل البياني للدالة  $f(x) = |x - 1| + 2$

هنا نلاحظ هناك إزاحة افقيا الي اليمين علي محور السينات بمقدار ١ وحدة

وإزاحة راسيا الي اعلي علي محور الصادات بمقدار ٢ وحدة لدالة المقياس

$f(x) = |x|$  فيكون راس المنحنى  $(1, 2)$

تمارين:

١) يمكن الحصول علي منحنى الدالة  $f(x) = x^2 - 1$  بإزاحة منحنى الدالة  $f(x) = x^2$  الي.....

٢) يمكن الحصول علي منحنى الدالة  $f(x) = |x - 3|$  بإزاحة منحنى الدالة  $f(x) = x^2$  الي.....

٣) نوع الدالة  $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^4 + 1}$  .....

٤) نوع الدالة  $f(x) = \frac{x^3 \cos x}{x^5 + x}$  .....

٥) الدالة  $2y^2 + x = 7$  هي دالة صريحة على الشكل .....

٦) الدالة  $y = 6x^2 + 3$  هي دالة ضمنية على الشكل .....

٧) إذا علمت ان دالة الطلب لسلعة معينة  $Q_n = 3p - 4$  ودالة العرض لنفس السلع  $Q_n = 36 - 2p$  فأجب عما

يأتي (أ) سعر التوازن ..... (٢٠ ، ٨ ، ١٠ ، ٤٠)

(ب) الكمية التي يحدث عندها التوازن .... (٣٦ ، ٨ ، ٢٤ ، ٢٠)

٨) إذا كانت  $y = e^{-5x}$  فان  $y' = \dots$ ,  $\int e^{-5x} dx = \dots$ ,  $y'' = \dots$

٩) إذا كانت الدالة  $y = x^3 - 3x^2$  فان نقطة الانقلاب هي ..... [  $(1, -3)$ ,  $(1, -4)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, -2)$  ]

## التفاضل الجزئي

(ب) دوال ذات أكثر من متغير

تنقسم الدوال الي (أ) دوال ذات متغير واحد

(أ) دوال ذات متغير واحد (يسمى التفاضل في هذه الحالة تفاضل عادي)

$$1) y = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 3,$$

↓  
متغير  
تابع

↓  
متغير  
مستقل

↓  
تفاضل عادي

$$2) y = 3x^2 + 6x + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x + 6$$

↓  
متغير  
تابع

↓  
متغير  
مستقل

↓  
تفاضل عادي

( دوال ذات أكثر من متغير (يسمى التفاضل في هذه الحالة تفاضل جزئي)

$$1) z = 2xy + 3x^2y^2$$

↓  
متغير  
تابع

↓  
x, y  
متغيرين مستقلين

$$2) z = 3xt + x^2y + yt^5$$

↓  
متغير  
تابع

↓  
x, y, t  
3 متغيرات مستقلة

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}, \dots$$

في هذه الحالة يطلق على التفاضل تفاضل جزئي بالنسبة لـ x و y و t ويرمز له بالرمز

مثال (1) اذا كانت الدالة  $z = 2x^2y + 3xy^3$  فأوجد:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2(2x)y + 3(1)y^3 = 4xy + 3y^3, \quad Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2(1) + 3x(3y^2) = 2x^2 + 9xy^2$$

مثال (2) اذا كانت الدالة  $z = x^2 + y^2$  فأوجد:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 = 2x,$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

مثال (3) اذا كانت الدالة  $z = 2x^3y^2 + 5y^3t^2 + 6xyt$  فأوجد:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}$

الحل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2(3x^2)y^2 + 0 + 6(1)yt = 6x^2y^2 + 6yt$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3(2y) + 5(3y^2)t^2 + 6x(1)t = 4x^3y + 15y^2t^2 + 6xt$$

$$Z_t = \frac{\partial z}{\partial t} = 0 + 5y^3(2t) + 6xy(1) = 10y^3t + 6xy$$

مثال (4) اذا كانت الدالة  $z = 3x^2y^3 + 5xy^2 + 2x^4y^5$  فأوجد:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3(2x)y^3 + 5(1)y^2 + 2(4x^3)y^5 = 6xy^3 + 5y^2 + 8x^3y^5$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2(3y^2) + 5x(2y) + 2x^4(5y^4) = 9x^2y^2 + 10xy + 10x^4y^4$$

مثال ٥) إذا كانت الدالة  $z = x^2 + 2xy$  فأوجد:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$   
الحل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2(1)y = 2x + 2y, \quad Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2x(1) = 2x$$

مثال ٦) إذا كانت الدالة  $z = 6x^2y + 3xy^2$  فأوجد:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$   
الحل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6(2x)y + 3(1)y^2 = 6xy + 3y^2, \quad Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2(1) + 3x(2y) = 6x^2 + 6xy$$

مثال ٧) إذا كانت الدالة  $z = 3x^2y^2 + 6x^3y + 4xy^3$  فأوجد:  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$   
الحل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3(2x)y^2 + 6(3x^2)y + 4(1)y^3 = 6xy^2 + 18x^2y + 4y^3$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2(2y) + 6x^3(1) + 4x(3y^2) = 6x^2y + 6x^3 + 12xy^2$$

### المعادلات التفاضلية

ينقسم التفاضل الى

- (١) تفاضل عادي يكون للدالة متغير واحد  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$  ، تفاضل عادي من الرتبة الاولى والثانية والثالثة ...
- (٢) تفاضل جزئي يكون للدالة أكثر من متغير  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$  ، تفاضل جزئي من الرتبة الاولى والثانية ...

### رتبة المشتقة: هو أعلى مستوى تفاضل للدالة

تعريف المعادلة التفاضلية: هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات لمتغير تابع بالنسبة لمتغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x + 3y, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 3x = 6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4x - 3y = 2$$

### أنواع المعادلات التفاضلية

#### ٢) معادلات تفاضلية جزئية

#### ١) معادلات تفاضلية عادية

معادلات تفاضلية عادية إذا كانت المعادلة تحتوي على متغير مستقل واحد فإن المشتقة تصبح مشتقة عادية وتصبح المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 3x = 6 \quad \text{مثل ( Ordinary Differential Equation ) معادلة تفاضلية عادية}$$

معادلات تفاضلية جزئية إذا احتوت المعادلة على أكثر من متغير مستقل واحد فإن المشتقات تكون مشتقات جزئية وتصبح

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + 3y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4x = 3y \quad \text{مثل ( Partial Differential Equation ) معادلة تفاضلية جزئية}$$

مثال (١) المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$  هي معادلة تفاضلية عادية وذلك لأن المشتقة  $\frac{dy}{dx}$  هي مشتقة عادية.

مثال (٢) لمعادلة التفاضلية  $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} = 3y$  هي معادلة تفاضلية جزئية وذلك لأن المشتقات  $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$  هي مشتقات جزئية.

لاحظي أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

تحتوي تربيع المشتقة الأولى

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

متغير مستقل واحد

تحتوي المشتقة الثانية بالنسبة لـ  $\frac{d^2y}{dx^2}$

## تصنيف المعادلات التفاضلية [ حسب الرتبة والدرجة ]

**تعريف:** رتبة المعادلة التفاضلية هي أكبر أو أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية.

مثال ١ المعادلة التفاضلية  $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 5x$  من الرتبة الثالثة

نلاحظ أكبر مشتقه هي الثالثة . هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثالثة.

مثال ٢ المعادلة التفاضلية  $y'''' + y'' + y = x$  هي معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة

مثال ٣ المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$  من الرتبة الأولى ( العبارة صحيحة - العبارة خاطئة )

مثال ٤ المعادلة التفاضلية  $\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + x = 7$  من الرتبة الخامسة ( العبارة صحيحة - العبارة خاطئة )

**درجة المعادلة التفاضلية هي أس أكبر مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية.**

المعادلة التفاضلية التالية  $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = 7$  هي من الدرجة الثانية..

نلاحظ أن..

١. أكبر مشتقة هي  $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$  وهذا يعني أنها من الرتبة الثالثة.

٢. لهذه المشتقة (والتي هي أكبر مشتقة) ندرس الأس المرفوعة إليه فنجدها مرفوعة للأس الثاني وهذا يعني أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية.

مثال (٢) المعادلة التفاضلية التالية  $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + x = 11$  هي من الدرجة الثالثة.

نلاحظ أن..

١. أكبر مشتقة هي  $\frac{d^2y}{dx^2}$  وهذا يعني أنها من الرتبة الثانية.

٢. لهذه المشتقة (والتي هي أكبر مشتقة) ندرس الأس المرفوعة إليه فنجدها مرفوعة للأس الثالث وهذا يعني أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثالثة.

مثال (٣) المعادلة التفاضلية  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 11$  :

لان اس اعلي مشتقة بها هو ٣ لذلك فهي من الدرجة الثالثة

هي من الدرجة الثانية (x)

لان اعلي مشتقة بها هي المشتقة الثانية لذلك فهي من الرتبة الثانية

هي من الرتبة الثالثة (x)

## حل المعادلات التفاضلية

### حل المعادلات التفاضلية عن طريق فصل المتغيرات (باستخدام التكامل)

مثال (١) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = 2x$  ؟ الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1} \Rightarrow dy \times 1 = 2x \times dx \Rightarrow dy = 2x dx \Rightarrow \int dy = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x^2}{2} + c \Rightarrow y = x^2 + c$$

مثال (٢) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$  ؟ الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3}{1} \Rightarrow dy \times 1 = (2x + 3) dx \Rightarrow dy = (2x + 3) dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int (2x + 3) dx \Rightarrow y = \frac{2x^2}{2} + 3x + c \Rightarrow y = x^2 + 3x + c$$

مثال (٣) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = 6x$  ؟ الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{1} \Rightarrow dy \times 1 = 6x \times dx \Rightarrow dy = 6x dx \Rightarrow \int dy = \int 6x dx$$

$$\Rightarrow y = \frac{6x^2}{2} + c \Rightarrow y = 3x^2 + c$$

مثال (٤) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$  ؟ الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y dy = x dx \Rightarrow \int y dy = \int x dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2} \Rightarrow y^2 = x^2 + c$$

مثال (٥) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  ؟ الحل هنا لفصل المتغيرات نقسم البسط ÷ البسط = المقام ÷ المقام

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + \ln(c) \Rightarrow \ln(y) = \ln(c \cdot x) \Rightarrow y = c \cdot x$$

مع تهنيتي بالتوفيق والنجاح لجميع الطلاب

د محمد تركي



جامعة الدمام  
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الرياضيات للإدارة

**MATH 120**

دكتور محمد تركي

أستاذ الرياضيات والاحصاء المساعد

الايمل الجامعي

**mstorky@uod.edu.sa**



## قسم المراجعات

المراجعة العامة الاولى: (تم حل تمارين المراجعة الاولى في المحاضرة ١١ - تحت عنوان تمارين متنوعة)

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

1) النقطة التي احداثياتها  $(2, -3)$  تقع في الربع .....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

2) النقطة  $(-1, -5)$  تقع في الربع .....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

3) النقطة  $(0, 2)$  تقع .....

(أ) في الربع الأول (ب) علي محور السينات (ج) في الربع الثالث (د) علي محور الصادات

4) إذا كان  $(a, b) = (3, 1)$  فإن  $a + b = \dots$

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

٥) إذا كان  $X \times Y = \{(2, 6), (2, a), (5, 6), (5, a), (8, 6), (8, a)\}$  فإن  $X = \dots\dots\dots$

(أ)  $\{2, 5, 8\}$  (ب)  $\{2, 3\}$  (ج)  $\{6, a\}$  (د)  $\{5, 6\}$

٦) إذا كان  $n(X) = 3$  ,  $n(Y) = 2$  فإن  $n(X \times Y) = \dots\dots\dots$

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 6

٧) إذا كانت العلاقة  $R = \{(1, 2), (2, 3), (5, 2), (4, 3)\}$  تمثل دالة فان مداها يساوي

(أ)  $\{2, 3\}$  (ب)  $\{1, 2, 4, 5\}$  (ج)  $\{2, 3, 4, 5\}$  (د)  $\{3, 4, 6, 7\}$

٨) إذا كانت  $f(x) = 2$  فإن  $2 \times f(3) = \dots\dots\dots$

(أ) 10 (ب) 4 (ج) 3 (د) 2

٩) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويقطع جزءا من محور الصادات السالب طوله 5 وحدات هي

(أ)  $y = -2x + 5$  (ب)  $y = 2x - 5$  (ج)  $y = 5x - 2$  (د)  $y = 2x + 2$

١٠) ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(3, 4)$  ,  $(2, 3)$  يساوي .....

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

11) الدالة  $f(x) = 2x^5 + 5x^2 + 4x - 11$  من الدرجة

(أ) الاولى (ب) الثانية (ج) الثالثة (د) الخامسة

12) الدالة  $f(x) = 5$  يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

(أ)  $(5, 0)$  (ب)  $(0, 5)$  (ج)  $(5, 5)$  (د)  $(0, 0)$

13) أودع شخص مبلغ 10000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10% سنويا لمدة خمس سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية

المدة تساوي .....

(أ) 2000 (ب) 10000 (ج) 15000 (د) 5000

14) افترض شخص مبلغ 1000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة ثلاث سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي

(أ) ١٢٥٩.٧١٢ (ب) ٢٥٩.٧١٢ (ج) ٢٢٥٩.٧١٢ (د) ٤٥٩.٧١٢

15) جملة مبلغ P بمعدل فائدة مركبة R% سنويا لمدة n من السنوات يساوي

(أ)  $S = P + (1 + R)^n$  (ب)  $S = P - (1 + R)^n$  (ج)  $S = P \div (1 + R)^n$  (د)  $S = P \times (1 + R)^n$

16) المشتقة الاولى للدالة  $f(x) = 10$  هي ....

(أ) 0 (ب) 5 (ج) 15 (د) 10

17) اذا كانت الدالة  $f(x) = x^2 + x + 2$  فان المشتقة الأول لها هي

(أ)  $f'(x) = 2x$  (ب)  $f'(x) = x^2 + 1$  (ج)  $f'(x) = 2x + 1$  (د)  $f'(x) = 2x + 2$

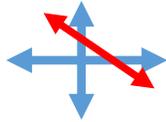
18) ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  عندما  $x = 1$  يساوي .....

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

19) إذا كان  $2 \in X$  و  $5 \in Y$  فان  $(5, 2) \in \dots \dots \dots$

(أ)  $X \times Y$  (ب)  $Y \times X$  (ج)  $X^2$  (د)  $Y^2$

20) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل



(أ) موجب (ب) سالب (ج) صفر (د) غير معروف

21) إذا كانت الدالة  $f(x) = (x - 2)(x + 2)$  فان  $f'(x) = \dots$

(أ)  $x^2$  (ب)  $2x$  (ج)  $2x - 4$  (د)  $x$

22) إذا كانت الدالة  $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$  فان  $f'(x) = \dots$

(أ)  $\frac{7}{3x+2}$  (ب)  $\frac{7}{(3x+2)^2}$  (ج)  $\frac{-7}{(3x+2)^2}$  (د)  $\frac{7}{(2x-1)^2}$

23) إذا كانت الدالة  $f(x) = (2x + 7)^5$  فان  $f'(x) = \dots$

(أ)  $(20x + 70)^4$  (ب)  $10(2x + 7)^5$  (ج)  $5(2x + 7)^4$  (د)  $10(2x + 7)^4$

24) إذا كانت الدالة  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  فان  $f''(x) = \dots$

(أ)  $6x^2$  (ب)  $3x^2 + 2$  (ج)  $6x$  (د)  $6x + 2$

25) القيمة العظمى للربح اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $f(x) = -2x^2 + 12x + 3$  هي

(أ) 18 (ب) 19 (ج) 20 (د) 21

26) إذا كان سعر السلعة P والكمية المطلوبة من هذه السلعة q فان مرونة الطلب السعرية  $E_p = \dots$

(أ)  $\frac{P+q'}{q}$  (ب)  $\frac{P-q'}{q}$  (ج)  $\frac{P \cdot q'}{q}$  (د)  $\frac{P \div q'}{q}$

27) ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$  عند  $x = 3$  يساوي .....

(أ) 6 (ب) 12 (ج) 18 (د) 0

28) اودعت مرام مبلغ 5000 في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة 3 سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة يساوي .....

(أ) 6000 (ب) 1298.56 (ج) 6298.56 (د) 6239.56

29) إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{3x}$  فان المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = \dots$

(أ)  $e^{3x}$  (ب)  $\frac{e^{3x}}{3}$  (ج)  $3e^{3x}$  (د)  $-3e^{3x}$

(٣٠) إذا كانت الدالة  $f(x) = \ln 2x$  فإن المشتقة الأولى للدالة ...  $f'(x) = \dots$

(أ)  $2x$  (ب)  $\frac{2}{x}$  (ج)  $\frac{1}{2x}$  (د)  $\frac{1}{x}$

(٣١) إذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة  $C(x) = x^2 + 3x + 20$  فإن التكاليف الحدية عند  $x=10$  تساوي

(أ) 150 (ب) 23 (ج) 17 (د) 50

(٣٢)  $\int x + 1 dx$  يساوي .....

(أ)  $x^2 + c$  (ب)  $x^2 + x + c$  (ج)  $\frac{1}{2}x^2 + c$  (د)  $\frac{1}{2}x^2 + x + c$

(٣٣) إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{-5x}$  فإن المشتقة الثانية للدالة ...  $f''(x) = \dots$

(أ)  $e^{-5x}$  (ب)  $\frac{e^{-5x}}{25}$  (ج)  $25e^{-5x}$  (د)  $-25e^{-5x}$

(٣٤) إذا كانت دالة الإيراد تعطي بالعلاقة  $R(x) = x^2 - 5x$  فإن الإيراد الحدي عند  $x=100$  تساوي

(أ) 300 (ب) 205 (ج) 195 (د) 9500

(٣٥)  $\int x^{-5} dx$  يساوي .....

(أ)  $\frac{x^{-6}}{-6} + c$  (ب)  $x^{-6} + c$  (ج)  $x^{-4} + c$  (د)  $\frac{x^{-4}}{-4} + c$

(٣٦) المساحة تحت منحنى الدالة  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$  وبين المستقيمين  $x = 0$ ,  $x = 2$  تساوي

(أ) 12 (ب) 13 (ج) 10 (د) 8

(٣٧) إذا كانت  $f(x)$  دالة فإن  $\int_a^b f(x) dx = \dots$

(أ)  $F(b) + F(a)$  (ب)  $F(b) - F(a)$  (ج)  $F(a) - F(b)$  (د)  $F(b) \div F(a)$

(٣٨) إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{3x}$  فإن المشتقة الأولى للدالة ...  $\int e^{2x} dx = \dots$

(أ)  $e^{2x}$  (ب)  $\frac{e^{2x}}{2}$  (ج)  $2e^{2x}$  (د)  $-2e^{2x}$

(٣٩)  $\int \sqrt{x} dx$  يساوي .....

(أ)  $\frac{x^{0.5}}{0.5} + c$  (ب)  $\frac{x^{-0.5}}{-0.5} + c$  (ج)  $\frac{x^{1.5}}{1.5} + c + c$  (د)  $\frac{x^2}{2} + c$

(٤٠) إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $P(x) = 2x^2 - 10x$  فإن الإيراد الحدي عند  $x=10$  تساوي

(أ) 100 (ب) 30 (ج) 40 (د) 30

(٤١)  $\int (2x - 1)^6 dx$  يساوي .....

(أ)  $\frac{(2x-1)^5}{10} + c$  (ب)  $\frac{(2x-1)^7}{7} + c$  (ج)  $\frac{(2x-1)^7}{14} + c$  (د)  $6(2x - 1)^5 + c$

(٤٢)  $\int (2x^2 + 3x - 1)^7 (4x + 3) dx$  يساوي .....

(أ)  $\frac{(2x^2+3x-1)^8}{8} + c$  (ب)  $(2x^2 + 3x - 1)^8 + c$  (ج)  $7(2x^2 + 3x - 1)^6$  (د) لا شيء مما سبق

(٤٣)  $\int \frac{1}{e^{3x-5}} dx$  يساوي .....

(أ)  $\frac{e^{3x-5}}{3} + c$  (ب)  $\frac{e^{-3x+5}}{-3} + c$  (ج)  $3 \cdot e^{3x-5}$  (د)  $-3e^{-3x+5} + c$

٤٤) إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطي بالعلاقة  $C'(x) = 3x^2 + 2x + 20$  علما بان التكاليف الثابتة تساوي ١٠٠ فان دالة التكاليف عند  $C(x) = \dots$  هي

(أ)  $x^3 + x^2 + 20x + 100$  (ب)  $6x + 2$  (ج)  $6x + 102$  (د)  $x^3 + x^2 + 20x + 100$

٤٥)  $\int \frac{1}{x} dx$  يساوي .....

(أ)  $x^2 + c$  (ب)  $x^{-1} + c$  (ج)  $x + c$  (د)  $\ln x + c$

٤٦) إذا كانت دالة الإيراد الحدي تعطي بالعلاقة  $R'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 8$  فان دالة الإيراد عند  $x=1$  تساوي...

(أ) 26 (ب) 16 (ج) 10 (د) 8

٤٧) إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي  $p'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 24x^3$  فان دالة الربح...

(أ)  $2x^6 + 3x^5 + 6x^4$  (ب)  $60x^4 + 60x^3 + 72x^2$  (ج)  $5x^4 + 4x^3 + 4x^2$  (د)  $12x^6 + 15x^5 + 24x^4$

٤٨) اطراد الدالة  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  في الفترة  $[-2, 1]$  هو .....

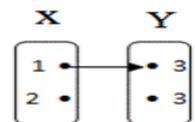
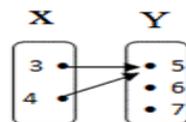
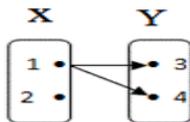
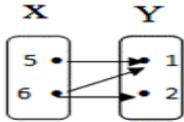
(أ) تزايديه (ب) تناقصيه (ج) ثابتة (د) زوجية

٤٩) جملة مبلغ 9000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة ١٢% ثلث سنوي لمدة 8 سنوات هو ....

(أ) 22283.66 (ب) 13283.66 (ج) 8640 (د) 17640

(٥٠)

المخطط  
الذي يمثل  
دالة فيما



يأتي .....

(أ) (ب) (ج) (د)

## المراجعة الشاملة الثانية

أكمل الجمل الآتية لتحصل على إجابة صحيحة

- (1) نهاية الدالة  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$  يساوي.....
- (2) إذا كانت الدالة  $f(x) = \ln 5x$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots$
- (3) نهاية الدالة  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8}$  يساوي.....
- (4) إذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة  $C(x) = x^3 + 5x + 20$  فإن التكاليف الحدية عند  $x=6$  تساوي
- (5)  $\int 2x + 5 dx$  يساوي .....
- (6) نهاية الدالة  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{3x^3 - 4x - 8}$  يساوي.....
- (7) إذا كان  $\sin x = 0.3$  و  $\cos x = 0.6$  فإن  $\tan x = \dots$
- (8) إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{-3x}$  فإن المشتقة الثالثة للدالة  $f'''(x) = \dots$
- (9) إذا كانت دالة الإيراد تعطي بالعلاقة  $R(x) = x^3 - 5x^2 + 10x$  فإن الإيراد الحدي عند  $x=8$  تساوي
- (10)  $\int x^{-4} dx$  يساوي .....
- (11) المساحة تحت منحنى الدالة  $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$  وبين المستقيمين  $x = 0$ ,  $x = 3$  تساوي
- (12) إذا كانت  $f(x)$  دالة فإن  $\int_a^b f(x) dx = \dots$
- (13) إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{7x}$  فإن  $\int e^{7x} dx = \dots$
- (14)  $\int_0^1 3x^2 - 2x + 9 dx = \dots$
- (15) نهاية الدالة  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin 3x}{5x}$  تساوي .....
- (16) إذا كانت الدالة  $f(x) = \sin 5x$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots$
- (17) إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $P(x) = 3x^2 - 15x$  فإن الإيراد الحدي عند  $x=20$  تساوي
- (18)  $\int (2x - 1)^{11} dx$  يساوي .....
- (19) النقطة التي احداثياتها  $(-1, 3)$  تقع في الربع .....
- (20) النقطة  $(-3, -2)$  تقع في الربع .....
- (21) النقطة  $(9, 0)$  تقع .....
- (22)  $\int \sec^2 3x dx = \dots$
- (23) إذا كان  $(a, 3) = (5, b)$  فإن  $a \cdot b = \dots$
- (24) إذا كان  $Y \times X = \{(1, 4), (1, 5), (1, 7), (6, 4), (6, 5), (6, 7)\}$  فإن  $X = \dots$
- (25) إذا كان  $n(Y \times X) = \dots$  فإن  $n(X) = 3$ ,  $n(Y) = 4$
- (26) إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x > 2 \\ 6x - 3, & x \leq 2 \end{cases}$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots$
- (27) إذا كانت الدالة  $f(x) = \cos 3x + \tan 5x$  فإن  $f'(x) = \dots$

٢٨ إذا كانت العلاقة  $R = \{(6,1), (2,5), (7,3), (4,9)\}$  تمثل دالة فان مداها يساوي

٢٩ إذا كانت  $f(x) = 5$  فان  $4 \times f(2) = \dots$

٣٠ معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويقطع جزءا من محور الصادات الموجب طولها 2 وحدات هي

٣١ ميل المستقيم المار بالنقطتين (3, 6) , (1, 2) يساوي .....

٣٢ الدالة  $f(x) = 5x^3 - 2x^4 + 7x^2 + 9$  من الدرجة

٣٣ الدالة  $f(x)=9$  يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

٣٤ أودع شخص مبلغ 20000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 12% سنويا لمدة 10 سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية

المدة تساوي .....

٣٥ اقترض شخص مبلغ 2000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 10% سنويا لمدة 5 سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي

.....

٣٦ جملة مبلغ P بمعدل فائدة مركبة R% سنويا لمدة n من السنوات يساوي .....

٣٧ المشتقة الاولى للدالة  $f(x) = 7$  هي ....

٣٨ إذا كانت الدالة  $f(x) = x^4 + 2x + 5$  فان المشتقة الأولى لها هي .....

٣٩ ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^5 - 4x + 3$  عندما  $x=1$  يساوي .....

٤٠ إذا كان  $8 \in X$  و  $6 \in Y$  فان  $(8, 6) \in \dots$

٤١ ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل .....

٤٢ إذا كانت الدالة  $f(x) = (x - 5)(x + 5)$  فان  $f'(x) = \dots$

٤٣ إذا كانت الدالة  $f(x) = \frac{x-1}{2x+5}$  فان  $f'(x) = \dots$

٤٤ إذا كانت الدالة  $f(x) = (2x + 3)^{15}$  فان  $f'(x) = \dots$

٤٥ إذا كانت الدالة  $f(x) = x^5 + 3x^2 + 1$  فان  $f''(x) = \dots$

٤٦ القيمة الصغرى للربح إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $f(x) = x^2 - 10x + 11$  هي .....

٤٧ إذا كان سعر السلعة p والكمية المطلوبة من هذه السلعة q فان مرونة الطلب السعرية  $E_p = \dots$

٤٨ ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = 2x^5 - 11x + 2$  عند  $x=2$  يساوي .....

٤٩ اودعت علا مبلغ 2000 في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة 11% سنويا لمدة 6 سنوات فان الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة

يساوي .....

٥٠ إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{7x}$  فان المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = \dots$

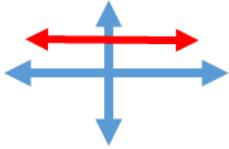
٥١  $\int (x^4 + 3x - 1)^6 (4x^3 + 3) dx$  يساوي .....

٥٢  $\int \frac{1}{e^{5x-6}} dx$  يساوي .....

٥٣  $\int \frac{1}{x} dx$  يساوي .....

٥٤ إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطي بالعلاقة  $C'(x) = 2x + 10$  علما بان التكاليف الثابتة تساوي 30 فان دالة التكاليف عند هي  $C(x) = \dots$

٥٥ إذا كانت دالة الايراد الحدي تعطي بالعلاقة  $R'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 5$  فان دالة الايراد عند  $x=2$  تساوي...



٥٦ إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي  $p'(x) = 3x^2 + 8x + 1$  فإن دالة الربح...

٥٧ اطراد الدالة  $f(x) = 4x - 1$  في الفترة  $[1, 5]$  هو .....

٥٨ جملة مبلغ 5000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 14% نصف سنوي لمدة 6 سنوات هو ....

٥٩ مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة  $f(x) = 8x^3 + 2$  بين المستقيمين  $x = 0$ ,  $x = 1$  تساوي .....

٦٠ معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 3 ويمر بالنقطة  $(2, 5)$  هي .....

### المراجعة العامة والنهائية

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (q) من منتج ما والسعر (p) تعطى بالمعادلة الآتية:  $q = 200 - 7p^2$  فإن الطلب يكون مرناً عندما  $p = 10$

(أ) العبارة صحيحة (ب) العبارة خاطئة

٢ إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 5$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \times g(x)] = \dots$

٣ إذا كانت  $\sin x = 0.2$  و  $\cos x = 0.5$  فإن:

١)  $\tan x = \dots$  [ (أ) ٠.٢ (ب) ٠.٥ (ج)  $\frac{5}{2}$  (د)  $\frac{2}{5}$  ]  
٢)  $\cot x = \dots$  [ (أ) ٠.٢ (ب) ٠.٥ (ج)  $\frac{5}{2}$  (د)  $\frac{2}{5}$  ]

٤ إذا كانت  $\sin x = 0.3$  و  $\cos x = 0.7$  فإن:

١)  $\tan x = \dots$  [ (أ) ٠.٣ (ب) ٠.٧ (ج)  $\frac{7}{3}$  (د)  $\frac{3}{7}$  ]  
٢)  $\cot x = \dots$  [ (أ) 0.3 (ب) 0.7 (ج)  $\frac{7}{3}$  (د)  $\frac{3}{7}$  ]

٣)  $\csc x = \dots$  [ (أ) ٠.٣ (ب) ٠.٥ (ج)  $\frac{10}{7}$  (د)  $\frac{3}{10}$  ]  
٤)  $\sec x = \dots$  [ (أ) ٠.٣ (ب) ٠.٥ (ج)  $\frac{10}{7}$  (د)  $\frac{3}{10}$  ]

٥  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \tan 2x}{\sin 5x + 4x} = \dots$

٦ إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 8, & x > 1 \\ 2x + 9, & x < 1 \end{cases}$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots$

٧ الدالة  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 2 \\ 4x - 3, & x < 2 \end{cases}$  متصلة عند  $x = 2$  اختر (أ) العبارة صحيحة (ب) العبارة خاطئة

٨ إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$  متصلة عند  $x = 1$  فإن:  $k = \dots$

٩ الدالة  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$  تزايدية في الفترة  $[2, 4]$  اختر (أ) العبارة صحيحة (ب) العبارة خاطئة

١٠ نقطة الانقلاب للدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  هي .....

(١١)

١ إذا كانت قيمة المشتقة الأولى للدالة عند أي نقطة في فترة موجبة فإن الدالة..... في الفترة

(أ) تزايدية (ب) تناقصية (ج) لها تحذب لأعلى (د) لها تحذب لأسفل

٢ إذا كانت قيمة المشتقة الأولى للدالة عند أي نقطة في فترة سالبة فإن الدالة..... في الفترة

(أ) تزايدية (ب) تناقصية (ج) لها تحذب لأعلى (د) لها تحذب لأسفل

٣ إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند أي نقطة في فترة موجبة فإن الدالة..... في الفترة

(أ) تزايديه (ب) تناقصية (ج) لها تحذب لأعلي (د) لها تحذب لأسفل  
 (٤) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند أي نقطة في فترة سالبة فإن الدالة ..... في الفترة  
 (أ) تزايديه (ب) تناقصية (ج) لها تحذب لأعلي (د) لها تحذب لأسفل

(١٢) الدالة  $f(x) = \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5}$  هي دالة فردية اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)  
 (١٣) إذا علمت ان دالة الطلب لسلعة معينة  $Q_n = 3p - 4$  ودالة العرض لنفس السلع  $Q_n = 36 - 2p$  فأجب عما يأتي

(ا) سعر التوازن ..... (٢٠ ، ٨ ، ١٠ ، ٤٠)

(ب) الكمية التي يحدث عندها التوازن .... (٣٦ ، ٨ ، ٢٤ ، ٢٠)

(١٤) إذا كانت الدالة  $y = x^3 - 3x^2$  فان نقطة الانقلاب هي ..... [ (1, -3), (1, -4), (1, 0), (1, -2) ]

(١٥) إذا كانت الدالة  $z = x^2 + y^2$  فان  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y$  اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

(١٦) إذا كانت الدالة  $z = x^2 + 2xy$  فان  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y$  اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

(١٧) المعادلة التفاضلية  $5x = \frac{d^3 y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5$  من الرتبة الخامسة اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

(١٨) المعادلة التفاضلية التالية  $7 = \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^6$  هي من الدرجة الثالثة اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

(١٩) حل المعادلة التفاضلية حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = 2x$  هو .....

(٢٠) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$  هو  $y = x + c$  اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

(٢١) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  هو .....

(٢٢) نهاية الدالة  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$  يساوي .....

(23) إذا كانت الدالة  $f(x) = \ln 5x$  فان المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = \dots$

(24) نهاية الدالة  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x^2 - 4}$  يساوي .....

(٢٥) إذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة  $C(x) = x^3 - 5x^2 + 30$  فان التكاليف الحدية عند  $x=10$  تساوي

(٢٦) يمكن الحصول علي منحنى الدالة  $f(x) = x^2 - 1$  بإزاحة منحنى الدالة  $f(x) = x^2$  أفقيا الي اليسار علي محور السينات بمقدار وحدة واحدة اختر (ا- العبارة صحيحة ب- العبارة خاطئة)

(27) نهاية الدالة  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 3}{5x^3 + 6x - 1}$  يساوي .....

(٢٨) إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{-5x}$  فان المشتقة الثالثة للدالة  $f'''(x) = \dots$

(٢٩) إذا كانت دالة الإيراد تعطي بالعلاقة  $R(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$  فان الإيراد الحدي عند  $x=2$  تساوي .....

(٣٠)  $\int x^{-5} dx$  يساوي .....

(٣١) المساحة تحت منحنى الدالة  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$  وبين المستقيمين  $x = 0$ ,  $x = 2$  تساوي

(٣٢) إذا كان تكامل الدالة  $f(x)$  هو  $F(x)$  فان  $\int_a^b f(x) dx = \dots$

٣٣ إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{8x}$  فإن  $\int e^{8x} dx = \dots$

٣٤ إذا كانت الدالة  $f(x) = \sin 5x$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots$

٣٥ إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $P(x) = 2x^3 - 15x^2$  فإن الإيراد الحدي عند  $x=10$  تساوي .....ز

٣٦  $\int (3x - 5)^9 dx$  يساوي .....

٣٧ النقطة التي احداثياتها  $(-7, 2)$  تقع في الربع .....

٣٨ النقطة  $(8, -5)$  تقع في الربع .....

٣٩ النقطة  $(0, -11)$  تقع .....

٤٠  $\int \sec^2 5x dx = \dots$

٤١ إذا كان  $(a, 4) = (8, b)$  فإن  $a \div b = \dots$

٤٢ إذا كان  $Y \times X = \{(3, 4), (3, 5), (3, 7), (8, 4), (8, 5), (8, 7)\}$  فإن  $X = \dots$

٤٣ إذا كان  $n(Y \times X) = \dots$  فإن  $n(X) = 5$  ,  $n(Y) = 3$

٤٤ إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x > 2 \\ 6x - 3, & x \leq 2 \end{cases}$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots$

٤٥ إذا كانت الدالة  $f(x) = \cos 3x + \tan 5x$  فإن  $f'(x) = \dots$

٤٦ إذا كانت العلاقة  $R = \{(6, 2), (2, 5), (7, 6), (4, 8)\}$  تمثل دالة فان مداها يساوي .....

٤٧ إذا كانت  $f(x) = 3$  فإن  $2 \times f(4) = \dots$

٤٨ معادلة الخط المستقيم الذي ميله 5 ويقطع جزءاً من محور الصادات السالب طولها 3 وحدات هي

٤٩ ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(3, 5)$  ,  $(2, 1)$  يساوي .....

٥٠ الدالة  $f(x) = 2x^3 - 3x^4 + 7x^5 + 6$  من الدرجة .....

٥١ الدالة  $f(x) = 5$  يمثلها بيانياً خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة .....

٥٢ أودع شخص مبلغ 15000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10% سنوياً لمدة 12 سنوات فإن قيمة الفائدة المستحقة في نهاية المدة تساوي .....

٥٣ اقترض شخص مبلغ 4000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنوياً لمدة 6 سنوات فإن جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي ...

٥٤ جملة مبلغ P بمعدل فائدة مركبة R% سنوياً لمدة n من السنوات يساوي .....

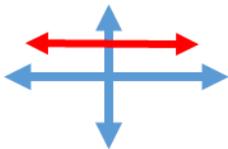
٥٥ المشتقة الأولى للدالة  $f(x) = 7$  هي ....

٥٦ إذا كانت الدالة  $f(x) = x^4 + 2x + 5$  فإن المشتقة الأولى لها هي .....

٥٧ ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 9$  عندما  $x=1$  يساوي .....

٥٨ إذا كان  $3 \in X$  و  $2 \in Y$  فإن  $(2, 3) \in \dots$

٥٩ ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل .....



٦٠ إذا كانت الدالة  $f(x) = (3x - 8)(3x + 8)$  فان  $f'(x) = \dots$

٦١ إذا كانت الدالة  $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$  فان  $f'(x) = \dots$

٦٢ إذا كانت الدالة  $f(x) = (3x + 2)^{10}$  فان  $f'(x) = \dots$

٦٣ إذا كانت الدالة  $f(x) = x^6 + 4x^3 + 1$  فان  $f''(x) = \dots$

٦٤ القيمة الصغرى للربح إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  هي .....

٦٥ إذا كان سعر السلعة  $p$  والكمية المطلوبة من هذه السلعة  $q$  فان مرونة الطلب السعرية  $E_p = \dots$

٦٦ ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = 5x^2 - 11x + 2$  عند  $x = 1$  يساوي .....

٦٧ اودعت علا مبلغ 3000 في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة ٨ % سنويا لمدة 4 سنوات فان الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة يساوي .....

٦٨ إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{9x}$  فان المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = \dots$

٦٩  $\int (x^3 + 2x - 1)^5 (3x^2 + 2) dx$  يساوي .....

٧٠  $\int \frac{1}{e^{4x-2}} dx$  يساوي .....

٧١ إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطي بالعلاقة  $C'(x) = 4x + 15$  علما بان التكاليف الثابتة تساوي 10 فان دالة التكاليف عند هي  $C(x) = \dots$

٧٢  $\int \frac{2}{x} dx$  يساوي .....

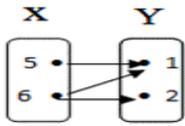
٧٣ إذا كانت دالة الإيراد الحدي تعطي بالعلاقة  $R'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 2$  فان دالة الإيراد عند  $x=2$  تساوي ...

٧٤ إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي  $p'(x) = x^2 + 6x + 4$  فان دالة الربح ...

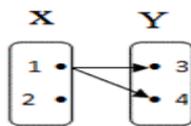
٧٥ اطراد الدالة  $f(x) = 8x - 2$  في الفترة  $[2, 6]$  هو .....

٧٦ جملة مبلغ ٤٠٠٠ ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 1.5% شهري لمدة ٣ سنوات هو ....

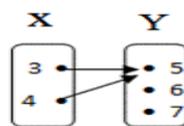
٧٧ المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي .....



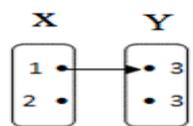
(د)



(ج)



(ب)



(أ)

٧٨ مساحة المنطقة أسفل منحني الدالة  $f(x) = 12x^3 + 2$  بين المستقيمين  $x = 0$ ,  $x = 1$  تساوي

٧٩ معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي ٤ ويمر بالنقطة (1,2) هي .....

٨٠ المعادلة  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + 3y$  هي معادلة تفاضلية عادية اختر ( العبارة صحيحة - العبارة خاطئة )

مع تهنيتي بالتوفيق والنجاح لجميع الطلاب

د محمد تركي

الواجب الأول – رياضيات للإدارة

إذا كانت الدالة  $y = (5x - 7)^4$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots\dots\dots$

$4(5x - 7)^3$

$20(5x - 7)^3$

$20(5x - 7)^4$

$(5x - 7)^3 (5x - 7)^3$

إذا كانت  $f(x) = 4$  فإن  $2 \times f(3) = \dots$

8

2

4

6

من الدرجة

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 11$

الدالة

الأولى

الثانية

الثالثة

الصفرية

ميل المستقيم المار بالنقطتين (1,3),(4,6) يساوي .....

4

1

3

2

إذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة  $C(x) = x^2 - 5x + 30$  فإن التكاليف الحدية عند  $x = 10$  تساوي

20

15

25

80

أودعت علياء مبلغ 2000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة بسيطة % 10 لمدة 18 شهر فان جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي

600

300

2000

2300

النقطة التي احداثيتها  $(-2, -5)$  تقع في الربع .....

الثالث

الاول

الرابع

الثاني

إذا كانت العلاقة  $R = \{(1,3), (2,5), (5,7), (4,6)\}$  تمثل دالة فان مداها يساوي .....

- {3,5,6,7}
- {1,2,4,5}
- {3,4,5,6,7}
- {1,2,3,4,5}

إذا كانت  $n(X) = 3$  ،  $n(X \times Y) = 6$  ، فان  $n(Y^2) = \dots\dots\dots$

- 4
- 2
- 1
- 6

إذا كان  $(a-1, 3) = (2, b)$  فان  $a \times b = \dots$

- 3
- 5
- 9
- 6

إذا كانت الدالة  $f(x) = \ln(2x+3)$  فان المشتقة الاولى للدالة هي  $f'(x) = \dots\dots\dots$

- $\frac{2}{2x+3}$
- $\frac{1}{2x+3}$
- $\frac{3}{2x+3}$
- $2x+3$

معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويقطع جزءا من محور الصادات السالب طولها 5 وحدات هي .....

$y = 3x - 5$

$y = 3x + 5$

$y = 5x + 3$

$y = 5x - 3$

إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{-5x}$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots\dots\dots$

$-5.e^{-x}$

$-e^{-5x}$

$5.e^{-5x}$

$-5.e^{-5x}$

إذا كان  $y = \{7\}$  و  $x = \{2,3\}$  فإن  $y \times x = \dots\dots\dots$

$\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

$\{(7,7)\}$

$\{(7,2),(7,3)\}$

$\{(2,7),(3,7)\}$



المستوى الثاني / إدارة أعمال  
جامعة الدمام / التعليم عن بعد - e7sas

حل الواجب الثاني لمقرر رياضيات الإدارة

السؤال 1

يساوي .....  $\int (2x^2 + 3x - 1)^7 (4x + 3) dx$

e7sas

$\frac{(2X^2+3X-1)^8}{8} + c$

لا شيء مما سبق

$(2X^2+3X-1)^8 + c$

$7(2X^2+3X-1)^6$

السؤال 2

إذا كانت الدالة  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  فان  $f''(x) = \dots$

e7sas

$3x^2+2$

$6x^2$

$6x+2$

$6x$

السؤال 3

إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{-5x}$  فان المشتقة الثانية للدالة  $f''(x) = \dots$

e7sas

$-25e^{-5x}$

$e^{-5x}$

$\frac{e^{-5x}}{25}$

$25e^{-5x}$

إذا كانت  $f(x)$  دالة فان  $\int_a^b f(x) dx = \dots$

e7sas

F(a) - F(b)

F(b) + F(a)

F(b) ÷ F(a)

F(b) - F(a)

$f'(x) = \dots$

فان  $f(x) = (2x + 7)^5$

إذا كانت الدالة

e7sas

$10(2x+7)^4$

$10(2x+7)^5$

$5(2x+7)^4$

$(20x+70)^4$

أودع شخص مبلغ 10000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10% سنويا لمدة خمس سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية المدة تساوي .

e7sas

10000

5000

15000

20000

إذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة  $C(x) = x^2 + 3x + 20$  فان التكاليف الحدية عند  $x=10$  تساوي

e7sas

50

17

23

150

إذا كانت دالة الإيراد الحدي تعطي بالعلاقة  $R'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 8$  فان دالة الإيراد عند  $x=1$  تساوي ..

e7sas

10 8 26 16 

القيمة العظمى للربح اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $f(x) = -2x^2 + 12x + 3$  هي

e7sas

20 18 19 21 

ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$  عند  $x = 3$  يساوي .....

e7sas

0 18 12 6 

اذا كان سعر السلعة  $p$  والكمية المطلوبة من هذه السلعة  $q$  فان مرونة الطلب السعرية  $E_p = \dots$

e7sas

 $\frac{p+q'}{q}$   $\frac{p-q'}{q}$   $\frac{p \times q'}{q}$   $\frac{p+q'}{q}$

إذا كانت الدالة  $f(x) = (x - 2)(x + 2)$  فان  $f'(x) = \dots$

e7sas

x 2x-4 x<sup>2</sup> 2x 

السؤال 4

( إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{3x}$  فان المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = \dots$

e7sas

 $\frac{e^{3x}}{3}$  3.e<sup>3x</sup> -3.e<sup>3x</sup> e<sup>3x</sup> 

السؤال 6

اطراد الدالة  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  في الفترة  $[-2, 1]$  هو .....

e7sas

زوجية تناقصية ثابتة تزايدية 

السؤال 7

جملة مبلغ 9000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% ثلث سنوي لمدة 8 سنوات هو ....

e7sas

22283.66 17640 8640 13283.66

المساحة تحت منحنى الدالة  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$  وبين المستقيمين  $x = 0$ ,  $x = 2$  تساوي

e7sas

- 10
- 8
- 13
- 12

السؤال 10

$$\int e^{2x} dx = \dots$$

$$\frac{e^{2x}}{2} \quad \text{Ⓐ}$$

$$2e^{2x} \quad \text{Ⓑ}$$

$$\frac{e^{2x}}{-2} \quad \text{Ⓒ}$$

$$e^x \quad \text{Ⓓ}$$

e7sas

إذا كانت دالة الإيراد تعطي بالعلاقة  $R(x) = x^2 - 5x$  فإن الإيراد الحدي عند  $x=100$  تساوي

e7sas

- 195
- 300
- 9500
- 205

$$\int (x+1) dx = \dots\dots\dots$$

**e7sas**  $\frac{x^2}{2} + c$

$x^2 + c$

$x^2 + x + c$

$\frac{x^2}{2} + x + c$

إذا كانت الدالة  $f(x) = \ln 2x$  فان المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = \dots$

$\frac{2}{x}$

**e7sas**

$\frac{1}{x}$

$\frac{1}{2x}$

$2x$

ملتقى طلاب وطالبات جامعة الملك فيصل وجامعة الدمام

السؤال 1

معادلة تفاضلية .....

المعادلة  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + 3y$

e7sas

جزئية من الرتبة الاولى

عادية من الرتبة الاولى

جزئية من الدرجة الثانية

جزئية من الرتبة الثانية

السؤال 2

هو .....

حل المعادلة  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

e7sas

$y^2 = x^2 + c$

$y^2 = x + c$

$y = x^2 + c$

$y = x + c$

السؤال 3

$\tan x = \dots\dots\dots$

اذا كانت  $\sin x = 0.3$  ,  $\cos x = 0.7$  فان

$\frac{10}{3}$

$\frac{10}{7}$

$\frac{7}{3}$

$\frac{3}{7}$

e7sas

السؤال 5

$\cot x = \dots\dots\dots$

اذا كانت  $\cos x = 0.2$  و  $\sin x = 0.5$  فان

0.4

5

2

2.5

e7sas

$$\int \sin(2x) + \sec^2(4x) dx = \dots\dots\dots + c$$

**e7sas**

$\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\tan(4x)}{4}$

$2 \cos(2x) + 4 \tan(4x)$

$\frac{-\cos(2x)}{2} - \frac{\tan(4x)}{4}$

$\frac{-\cos(2x)}{2} + \frac{\tan(4x)}{4}$

إذا كانت قيمة المشتقة الثانية في فترة ما موجبة عند نقطة في الفترة فإن الدالة..... في الفترة

**e7sas**

لها تحدب لاسفل

تزايدية

تناقصية

لها تحدب لاعلى

حل المعادلة التفاضلية حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = 6x$  هو.....

**e7sas**

$y = 6x + c$

$y = 6x^2 + c$

$y = x^2 + c$

$y = 3x^2 + c$

إذا كانت الدالة متصلة فإن  $k = \dots\dots\dots$   $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$

**e7sas**

$2$

$\frac{-1}{2}$

$-2$

$\frac{1}{2}$

إذا كانت قيمة المشتقة الأولى للدالة سالبة عند نقطة تنتمي لفترة ما فإن هذه الدالة..... في الفترة

تناقصية

لها تحدب لاعلى

e7sas

تزايدية

لها تحدب لاسفل

يمكن الحصول على منحنى الدالة  $f(x) = |x-3|$  بازاحة التمثيل البياني للدالة  $f(x) = |x|$

افقيا الى اليمين بمقدار 3 وحدات

راسيا الى اسفل بمقدار 3 وحدات

e7sas

افقيا الى اليسار بمقدار 3 وحدات

راسيا الى اعلى بمقدار 3 وحدات

يمكن الحصول على منحنى الدالة  $f(x) = x^2 + 7$  بازاحة منحنى الدالة  $f(x) = x^2$  .....

راسيا الى اعلى بمقدار 7 وحدات

راسيا الى اسفل بمقدار 7 وحدات

e7sas

افقيا الى اليسار بمقدار 7 وحدات

افقيا الى اليمين بمقدار 7 وحدات

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - 5x}{x + \tan 3x} = \dots\dots\dots$$

$\frac{1}{2}$

2

e7sas

$\frac{1}{4}$

$\frac{7}{3}$

السؤال 3

إذا كانت النقطة (3,7) نقطة انقلاب للدالة  $f(x)$  فإن  $f''(3) = \dots\dots\dots$ :

0

7

e7sas

موجبة

سالبة

السؤال 1

إذا كانت الدالة  $z = x^3 + xy^2$  فإن  $\frac{\partial z}{\partial x} = \dots\dots\dots$

$3x^2 + y^2$

$3x^2 + 2y$

$3x^2$

$3x + y^2$

e7sas

السؤال 2

المعادلة التفاضلية  $(\frac{d^5y}{dx^5})^3 + 2(\frac{dy}{dx})^4 = 7$  معادلة من الدرجة .....

الرابعة

الثالثة

الخامسة

الثامنة

e7sas

السؤال 3

الدالة  $3y - x = 8$  تكون دالة صريحة علي الشكل .....

$x = \frac{y-8}{3}$

$y = \frac{x+8}{3}$

$v = 3x + 8$

$x = 3y + 8$

e7sas

الدالة  $f(x) = \frac{x^5 \cdot \tan(x)}{x^6 + 3}$  نوعها .....

e7sas

زوجية

فردية

ليست زوجية وليست فردية

ثابتة

إذا كانت  $f(x) = \tan(2x)$  فإن المشتقة الأولى  $f'(x) = \dots\dots\dots$

$-2 \cdot \sec^2(2x)$

$-2 \csc^2(2x)$

e7sas

$2 \cdot \sec^2(2x)$

$\sec^2(2x)$

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 24$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 5} [f(x) \div g(x)] = \dots\dots\dots$  إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 8$

8

$\frac{1}{3}$

e7sas

3

24

إذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 1 \\ kx^2-2, & x \leq 1 \end{cases}$  متصلة عند  $x=1$  فإن قيمة  $k$  تساوي .....

2

3

0

e7sas

4

المعادلة التفاضلية  $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 5x$  من الرتبة .....

الرابعة

الاولى

الثالثة

السابعة

e7sas

مجال الدالة  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$  هو ..... حيث  $R$  هي مجموعة الاعداد الحقيقية

$R - \{-1, 9\}$

$R - \{3\}$

$R - \{3, -3\}$

$R - \{-1\}$

e7sas

الدالة  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 30$  تزايدية في الفترة .....

$] -\infty, 3[$

$] 3, \infty [$

$] 1, 3[$

$] -\infty, 1[$

e7sas

اذا كانت الدالة  $f(x) = \begin{cases} 3x+5, & x \geq 4 \\ x^2+2, & x < 4 \end{cases}$  فان  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  يساوي .....

17

ليس لها نهاية

18

35

e7sas

الأختبار الفصلي - رياضيات للأدارة

إذا كان  $3 \in x$  ,  $7 \in y$  فإن  $(7,3) \in \dots\dots\dots$

$X \times Y$

$X^2$

$Y^2$

$Y \times X$

إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$  فإن الربح الحدي عندما  $x = 5$  يساوي .....

50

150

90

100

إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطي بالعلاقة  $C'(x) = 6x + 20$  علما بان التكاليف الثابتة تساوي 10 فإن دالة التكاليف عند هي  $C(x) = \dots\dots\dots$

40

2

$3x^2 + 20x$

$3x^2 + 20x + 10$

$$\int 2x - 3 dx = \dots\dots\dots + c$$

$x^2 - 3x$

$x^2 + 3x$

$\frac{x^2}{2} - 3x$

$2x$

النقطة  $(7, 0)$  تقع .....

محور الصادات

لربع الرابع

محور السينات

لربع الثاني

المشتقة الاولى للدالة  $f(x) = 6$  هي .....  $\int_0^3 6x^2 - 2x + 1 dx = \dots$

45

48

34

49

3

6x

0

6

لدالة  $f(x) = 9$  يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة .....

(9,9)

(0,9)

(9,0)

(0,0)

$$\int \frac{1}{e^{2x-3}} dx = \dots + c$$

$-2 \cdot e^{-2x+3}$

$2 \cdot e^{2x-3}$

$\frac{e^{2x-3}}{2}$

$\frac{e^{-2x+3}}{-2}$

لدالة  $f(x) = 5x^3 - 2x^4 + 7x^2 + 9$  من الدرجة .....

التاسعة

الثالثة

الثانية

الرابعة

جملة مبلغ  $P$  بمعدل فائدة مركبة  $R\%$  سنويا لمدة  $T$  السنوات هي.....

$S = p \cdot (1+R.T)$

$S = p \cdot (1+R)^T$

$S = p \cdot (1-R.T)$

$S = p \div (1+R)^T$

ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = x^5 - 3x + 6$  عند النقطة  $(1,2)$  يساوي .....

77

2

35

4

النقطة التي احداثياتها  $(5, -9)$  تقع في الربع .....

الاول

الثالث

الرابع

الثاني

اودعت علا مبلغ 4000 في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة 10 % سنويا لمدة 5 سنوات فان الفائدة المركبة المستحقة في نهاية المدة يساوي

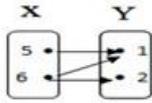
2000

6442.04

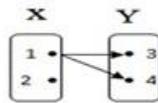
6000

2442.04

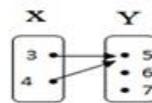
المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي .....



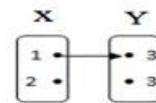
(د)



(ج)



(ب)



(أ)

ب

أ

ج

د

إذا كانت الدالة  $f(x) = (4x - 5)^{10}$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots$

$\frac{(4x - 5)^{11}}{44}$

$40(4x - 5)^9$

$4(4x - 5)^9$

$10(4x - 5)^9$

[uod.edu.sa/webapps/assessment/take/take.jsp?course\\_assessment\\_id=29942\\_1&course\\_id=129727\\_1](http://uod.edu.sa/webapps/assessment/take/take.jsp?course_assessment_id=29942_1&course_id=129727_1)

إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{-4x}$  فإن المشتقة الثالثة للدالة  $f'''(x) = \dots$

$-4 e^{-4x}$

$-64 e^{-4x}$

$12 e^{-4x}$

$\frac{e^{-4x}}{-64}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \dots + c$$

$x^2$

$\ln(x)$

$x^{-1}$

$\frac{x^2}{2}$

إذا كانت الدالة  $f(x) = \frac{x-2}{2x+3}$  فان المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = \dots$

$\frac{1}{(2x+3)^2}$

$\frac{-1}{(2x+3)^2}$

$\frac{7}{(2x+3)^2}$

$\frac{-7}{(2x+3)^2}$

إذا كان  $Y \times X = \{(2,3), (2,5), (2,7), (4,3), (4,5), (4,7)\}$  فان  $X = \dots$

$\{2,3,5\}$

$\{3,5,7\}$

$\{2,4\}$

$\{4,5,7\}$

النهاية العظمي لدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$  هي .....

7

4

10

3

إذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطي بالعلاقة  $y = 20 - 2x$  (حيث  $y$  تمثل الكمية و  $x$  تمثل سعر السلعة) فإن سعر السلعة عندما يكون الكمية المطلوبة  $y = 12$  هو .....

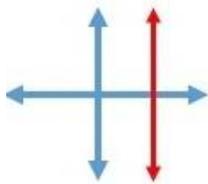
- 8   
 4   
 20   
 12

١٧/ إذا كانت الدالة  $f(x) = e^{5x}$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f(x) = \dots$

- $5 \cdot e^{5x}$  ●  
 $\frac{5 \cdot e^{5x}}{25}$  ●  
 $25 \cdot e^{5x}$  ●  
 $\frac{e^{5x}}{5}$  ●

معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 2 ويمر بالنقطة (1, 3) هي .....

- $y = 2x + 1$  ●  
 $y = -2x + 5$  ●  
 $y = 2x + 5$  ●  
 $y = -2x + 1$  ●



ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل

- غير محروف   
 سالب   
 صفر   
 موجب

$$\int x^{-2} dx = \dots + c$$

$-x^{-1}$

$x^{-1}$

$\frac{x^{-3}}{-3}$

$-2x^{-3}$

ميل المستقيم المار بالنقطتين (1,2) , (3,6) يساوي .....

3

4

1

2

$$\int (5x - 3)^{19} dx = \dots + c$$

$\frac{(5x - 3)^{20}}{20}$

$\frac{(5x - 3)^{20}}{5}$

$\frac{(5x - 3)^{20}}{100}$

$19(5x - 3)^{18}$

ايراد الدالة  $f(x) = 3x - 5$  في الفترة  $[1,4]$  هي دالة .....

فردية

تزايدية

تناقصية

ثابتة

فان المشتقة الثانية للدالة هي  $f''(x) = \dots\dots\dots$   $f(x) = x^5 + 3x^2 + 1$

إذا كانت الدالة

$\frac{x^6}{6} + 2x^3 + x$

$5x^4 + 6x$

$20x^3$

$20x^3 + 6$

أودع شخص مبلغ 20000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 12% سنويا لمدة 10 سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية المدة تساوي .....

4000

20000

24000

44000

إذا كانت الدالة  $f(x) = (x-6)(x+6)$  فان المشتقة الاولى للدالة  $f'(x) = \dots\dots\dots$

$2x$

$2x - 6$

36

$2x + 6$

إذا كانت دالة العرض لسلعة معينة تعطى بالعلاقة  $y = 3x + 15$  (حيث  $y$  تمثل الكمية المعروضة و  $x$  تمثل سعر السلعة) فان الكمية المطلوبة عندما تكون السلعة مجاناً  $(x=0)$  هي

.....  
 $15$

$3$

$18$

$12$

إذا كانت الدالة  $f(x) = \ln(7x)$  فإن  $f'(x) = \dots\dots\dots$

$7x$

$7^x$

$\frac{1}{x}$

$\frac{7}{x}$

إذا كان  $n(x) = 5$  ,  $n(y) = 3$  فإن  $n(Y \times X) = \dots\dots\dots$

-2

8

15

2

إذا كانت دالة الإيراد الحدي تعطي بالعلاقة  $R'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 3$  فإن دالة الإيراد عند  $x = 1$  (علما بأن الإيراد الثابت أي ثابت التكامل = 0) تساوي .....

30

0

20

8

القيمة الصغرى للربح إذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة  $f(x) = x^2 - 6x + 11$  هي .....

3

-2

38

2

إذا كان سعر السلعة  $p$  والكمية المطلوبة من هذه السلعة  $q$  فإن مرونة الطلب السعرية  $E_p = \dots\dots\dots$

$\frac{q \cdot p'}{p}$

$\frac{p \cdot q'}{q}$

$\frac{p - q'}{q}$

$\frac{p + q'}{q}$

إذا كان تكامل الدالة  $f(x)$  هو  $F(x)$  فإن :  $\int_a^b f(x) dx = \dots\dots\dots$

$F(b) + F(a)$

$F(b) - F(a)$

$F(a) - F(b)$

$F(b) \div F(a)$

إذا كان  $(a, 3) = (2, b)$  فإن  $a \cdot b = \dots\dots\dots$

4

5

6

1

افترض شخص مبلغ 2000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 4% ربع سنويا لمدة 5 سنوات فإن جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي .....

1600

3600

2440.38

440.38

إذا كان  $f(x) = 5$  فإن  $4 \times f(2) = \dots$

10

8

20

4

مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة  $f(x) = 4x^3 + 1$  وبين المستقيمين  $x = 0$  ,  $x = 1$  تساوي .....

2

4

5

12

مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة  $f(x) = 4x^3 + 1$  وبين المستقيمين  $x = 0$  ,  $x = 1$  تساوي .....

2

4

5

12

افترض شخص مبلغ 2000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 10% سنويا لمدة 5 سنوات فإن جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي

3221.02

3000

1000

1221.02

//i.imgur.com/n0Zefxd.png

إذا كانت الدالة  $f(x) = x^3 + x + 3$  فإن المشتقة الأولى للدالة  $f'(x) = \dots\dots\dots$

$x^3 + 1$

$3x^2 + 3$

$3x^2$

$3x^2 + 1$

ng

$$\int (x^3 + 5x - 1)^6 (3x^2 + 5) dx = \dots\dots\dots + c$$

$x^3 + 5x - 1$

$(x^3 + 5x - 1)^7$

$6(x^3 + 5x - 1)^5$

$\frac{(x^3 + 5x - 1)^7}{7}$

إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي  $P'(x) = 3x^2 + 6x + 5$  فان دالة الربح  $P(x) = \dots\dots\dots$

$x^3 + 3x^2 + 5x$

$6x + 6$

$3x^3 + 6x^2 + 5x$

$5x + 6$

معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويقطع جزءا من محور الصادات الموجب طولها 2 هي.....

$y = 2x + 3$

$y = -3x + 2$

$y = 3x + 2$

$y = 3x - 2$

ميل المماس لمنحني الدالة  $f(x) = 5x^2 - 11x + 1$  عند  $x = 2$  يساوي .....

11

10

9

0

إذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطي بالعلاقة  $y = 20 - 2x$  (حيث  $y$  تمثل الكمية و  $x$  تمثل سعر السلعة) فإن الكمية المطلوبة عندما يكون سعر السلعة  $x = 5$  هي .....

- 10  
 5  
 20  
 15

الدالة  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 35$  تناقصية في الفترة .....

]2,5[

]2,4[

]-∞,2[

]4,∞[

إذا كانت دالة الإيراد تعطي بالعلاقة  $R(x) = 2x^3 - 20x^2 + 100x$  فإن الإيراد الحدي عند  $x = 10$  تساوي ....

- 1000  
 3000  
 200  
 300

إذا كانت العلاقة  $R = \{(6,1), (2,5), (7,3), (4,9)\}$  تمثل دالة فان مداها يساوي .....

{1,2,3,4}

{1,3,5,9}

{2,4,6,7}

{1,2,3,4,6,7,9}

إذا كانت الدالة  $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$  فإن المشتقة الأولى لها  $f'(x) = \dots\dots\dots$

$12x^2 + 2$

$x^4 - x^2$

$12x^2$

$12x^2 - 2$

ore2.up-00.com/2015-04/1428863643853.jpg

٣٤/أودعت علا مبلغ 4000 في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 10% سنوياً لمدة 5 سنوات فإن الفائدة المركبة المستحقة في السنة تساوي ...

2442.04

2000

6000

6442.04

المساحة تحت منحنى الدالة  $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$  وبين المستقيمين  $x=0, x=2$  تساوي ....

15

7

13

16

إذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة  $C(x) = x^2 + 5x + 10$  فإن التكاليف الحدية عند  $x=5$  تساوي ...

60

20

40

15

e7sas

نقطة الانقلاب للدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$  هي .....

- 4
- (1,6)
- (2,4)
- 6

إذا كانت دالة الطلب لسلمة معينة تعطي بالعلاقة  $y = 30 - 3x$  ودالة الطلب لنفس السلعة تعطي بالعلاقة  $y = 2x + 10$  فإن الكمية التي يحدث عندها توازن السوق هي.....

- (4,18)
- 4
- 18
- (18,4)

إذا كانت دالة الطلب لسلمة معينة تعطي بالعلاقة  $y = 30 - 3x$  ودالة الطلب لنفس السلعة تعطي بالعلاقة  $y = 2x + 10$  فإن نقطة توازن السوق هي

- 4
- 18
- (4,18)
- (18,4)

إذا كانت دالة الطلب لسلمة معينة تعطي بالعلاقة  $y = 30 - 3x$  ودالة الطلب لنفس السلعة تعطي بالعلاقة  $y = 2x + 10$  فإن سعر توازن السوق هو .....

- (18,4)
- 4
- (4,18)
- 18

جملة مبلغ 2000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% نصف سنوي لمدة 4 سنوات هو ....

- 3187.6
- 96
- 2960
- 1187.696
- 3920